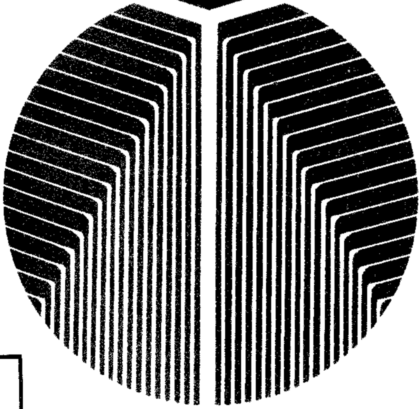
经济管理应用数学

（下）



经济管理应用数学(下)

运 筹 学

Jingji Guanli Yingyong Shuxue

主 编：唐贵才 孙克忠

副主编：龙启林 杨玉德 张景和

李建华 张连诚

辽宁科学技术出版社出版、发行

（沈阳市南京街6段1里2号）

沈 阳 新 华 印 刷 厂 印 刷

开本：787×1092 1/32 印张：11 字数：242,000

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

责任编辑：路 明 封面设计：庄庆芳

印数：1—10,000

ISBN 7-5381-0330-9/O·31 定价：3.40 元

出版说明

本书为《经济管理应用数学》的下册，内容为运筹学，教学时数为 80～120学时。参加本书编写的有：孙守湖（第一章）、张景和（第二章）、孙克忠（第三章）、唐贵才（第四章）、李建华（第五章）、张连诚、杨玉德、于吉江（第六章）、龙启林（第七章）。

本书由唐贵才、张连诚统稿，潘德惠教授审阅。

编　者

1988年6月

目　录

第一章　线性规划……………………………………………… 1
§1.1　线性规划问题的数学模型…………………………… 1
§1.2　线性规划问题的标准型……………………………… 9
习题一……………………………………………………15
第二章　单纯形法…………………………………………19
§2.1　线性规划问题的图解法……………………………19
§2.2　线性规划问题的代数解法…………………………24
§2.3　单纯形法……………………………………………30
§2.4　单纯形法的推广……………………………………50
§2.5　线性规划问题解的矩阵表示………………………59
§2.6　应用举例……………………………………………65
习题二……………………………………………………74
第三章　对偶问题与对偶单纯形法………………………79
§3.1　对偶问题……………………………………………79
§3.2　对偶单纯形法………………………………………88
§3.3　影子价格……………………………………………92
§3.4　灵敏度分析…………………………………………95
习题三…………………………………………………… 110
第四章　运输问题………………………………………… 116
§4.1　运输问题的数学模型……………………………… 116
§4.2　表上作业法………………………………………… 119

§4.3　单纯形法与表上作业法………………………… 132
§4.4　图上作业法………………………………………… 135
§4.5　运输模型的应用…………………………………… 139
习题四 …………………………………………………… 161
第五章　图与网络方法 ……………………………… 167
§5.1　基本概念…………………………………………… 167
§5.2　网络分析…………………………………………… 171
§5.3　网络方法在计划评审中的应用………………… 184
习题五…………………………………………………… 216
第六章　决策论……………………………………… 222
§6.1　决策的基本概念…………………………………… 222
§6.2　不确定型决策模型………………………………… 229
§6.3　风险型决策模型…………………………………… 235
§6.4　多阶段决策模型…………………………………… 256
§6.5　模糊决策模型……………………………………… 270
习题六…………………………………………………… 288
第七章　存贮论……………………………………… 292
§7.1　存贮论的基本概念………………………………… 292
§7.2　确定性存贮模型…………………………………… 296
§7.3　其它类型存贮模型………………………………… 325
习题七…………………………………………………… 335
习题答案………………………………………………… 340

第一章　线性规划

线性规划是运筹学的重要分支。是40年代末期开始发展起来的一门新兴的数学科学。其理论日趋成熟，计算技术比较简便，在实际中的应用日益广泛和深入。它可以用来解决科学研究、工程设计、军事指挥、经济规划等方面提出的大量问题。它是现代管理科学的重要基础和手段之一，已成为高中级管理人员必不可少的专业基础知识，是经济管理应用数学的重要组成部分。

§1.1　线性规划问题的数学模型

1. 线性规划问题的提出

现代化管理的特点是定量化和最优化。在企业的生产组织和经营管理领域中，人们经常遇到如下两类问题：

（1）在给定的人力、物力、财力资源不变的条件下，如何运用这些资源，最大限度地完成各项计划指标，以期取得最佳的经济效益；

（2）对于给定的一项任务，如何统筹安排，才能以最小的消耗（人力、物力、财力）来完成。

线性规划就是研究和解决这类问题定量化和最优化的一种成熟的数学方法。

为了便于了解和掌握线性规划的问题和内容，我们先从

具体例子入手加以说明。

例 1　资源分配问题。

某工厂可供使用的原材料、电力、劳动力都是有限度的。拟生产甲、乙两种产品，每单位产品分别需要原材料、电力、劳动力，以及所得的利润如表 1－1。问：怎样安排生产才能获得最大利润？

表 1－1

资源 \ 产品	甲(x_1)	乙(x_2)	各种投入物限制
原材料（吨）	9	4	360
电力（千瓦）	4	5	200
劳动力（人）	3	10	300
利润（万元）	7	12	

我们可以假设 x_1 和 x_2 分别为该厂安排甲、乙两种产品的产量。显然，x_1 和 x_2 是两个未知量。尚需待定，习惯上，称其为决策变量。

因为该厂原材料投入的最大限度为360吨，且每生产一个单位甲产品需要 9 吨，生产一个单位乙产品需要 4 吨，那么，在安排产品产量时所需原材料不能超过投入的限度，则可得反映这个限制条件的不等式

$$9x_1+4x_2\leqslant 360$$

类似地，生产甲、乙两种产品 x_1 和 x_2 所需电力和劳动力分别有以下不等式

$$4x_1+5x_2\leqslant 200$$

$$3x_1+10x_2\leqslant 300$$

再考虑到产品甲、乙的产量必须是非负的，得　$x_1\geqslant 0$，

$x_2 \geqslant 0$.

这样，我们就得到原问题的一组限制条件

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

习惯上，称不等式组（1）为**约束条件**，通常记作“s·t”，意思是“受约束于”。

我们再假设该厂可得利润为 z，依题意有

$$z = 7x_1 + 12x_2 \qquad (2)$$

习惯上，称函数（2）为**目标函数**。这里，该厂所追求的是在满足约束条件（1）式的前提下，使目标函数（2）的值最大，通常记作 $\max\ z = 7x_1 + 12x_2$。这里“max”的意思是“求…的最大值”。

综上所述，可得描述该问题的数学表达式

$$\max\ z = 7x_1 + 12x_2$$

$$s \cdot t \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (3)$$

这样，实际问题就转化为求 x_1 和 x_2 满足约束条件

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

使目标函数

$$\max\ z = 7x_1 + 12x_2$$

显然，解决了这个数学问题，原问题就随之解决了。表达式（3）即为原问题的数学模型。

一般地，对满足上述问题中约束条件的 x_1 和 x_2 任一组值，称为**可行解**；所有可行解的集合称为**可行域**；使目标函数达到最大（最小）值的可行解称为最优解。从管理上来说，一个可行解，就是一个计划方案，可行域就是所有计划方案的总体，最优解就是最佳方案。

例 2　物资调运问题。

某地有三个粮库以 A_1、A_2、A_3 表示。它的库存量分别为400、750、800 万吨。这些粮食分别供应四个居民点，并分别以 B_1、B_2、B_3、B_4 来表示，其粮食需要量分别为500、750、400、300 万吨。已知由每个粮库到各个居民点的距离如表 1 — 2 所示。

表 1 — 2

居民点 / 距离（公里） / 粮库	B_1	B_2	B_3	B_4	库存量
A_1	8	10	12	5	400
A_2	7	12	9	6	750
A_3	13	8	15	9	800
需要量	500	750	400	300	1950

上表说明，由库 A_1 到居民点 B_1 的距离为 8 公里，到 B_2 的距离为10公里，到 B_3 的距离为12公里，到 B_4 的距离为 5 公里…。现在的问题是如何确定粮食的合理调运方案，

使得总重吨公里（为以吨表示的运送粮食的重量，乘上以公里表示的运送距离）为最少。

为了回答这个问题，我们可以建立如下的数学关系式。

设从粮库 A_i 运往居民点 B_j 的粮食的重量为 x_{ij}（$i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$）。如表1—3所示。

表1—3

居民点 / 粮食重量（万吨） / 粮库	B_1	B_2	B_3	B_4	库存量（万吨）
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	400
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	750
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	800
需要量（万吨）	500	750	400	300	1950

根据问题的要求，我们可得如下的约束条件：

其一，运往各居民点的粮食重量之和应等于各个粮库的库存量，可得如下等式

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=750 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=800 \end{cases}$$

其二，各居民点的粮食需要量应等于各个粮库的供应量之和，可得如下等式

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=500 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=750 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=400 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=300 \end{cases}$$

其三，运往各居民点的粮食重量不可能为负数，可得如下不等式

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$$

再假设总重吨公里为z，则可得目标函数为

$$\begin{aligned} z=&8x_{11}+10x_{12}+12x_{13}+5x_{14}\\ &+7x_{21}+12x_{22}+9x_{23}+6x_{24}\\ &+13x_{31}+8x_{32}+15x_{33}+9x_{34} \end{aligned}$$

综上所述，可得解决这个问题的调运方案的数学问题为

$$\begin{aligned} \min z=&8x_{11}+10x_{12}+12x_{13}+5x_{14}\\ &+7x_{21}+12x_{22}+9x_{23}+6x_{24}\\ &+13x_{31}+8x_{32}+15x_{33}+9x_{34} \end{aligned} \tag{4}$$

$$s \cdot t. \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=750\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=800\\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=500\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=750\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=400\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=300\\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,3;\ j=1,2,3,4) \end{cases} \tag{5}$$

这里"min"的意思是"求…最小值"。

显然，这个物资调运问题就转化为求 x_{ij} $(i=1,2,3;$ $j=1,2,3,4)$ 满足约束条件（5）式，使目标函数（4）的值最小的数学问题。

例 3　饲料混合问题。

某饲养场养鸡一万只。每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 公斤，其中至少应有0.11公斤蛋白质和0.03公斤的钙。已知每一公斤大豆中含50%的蛋白质和0.2%的钙，价格是0.4元，

每公斤谷物含10%的蛋白质和0.1%的钙，价格是0.2元。问应如何混合饲料，才能使成本最低?

设每天的大豆用量为 x_1 公斤，谷物用量为 x_2 公斤，z 为每天的饲料总成本，根据要求，则可得如下的问题

$$\min \quad z = 0.4x_1 + 0.2x_2$$

$$s\cdot t\begin{cases} x_1 + x_2 = 5000 \\ 0.5x_1 + 0.1x_2 \geqslant 5000 \times 0.11 \\ 0.002x_1 + 0.001x_2 \geqslant 5000 \times 0.03 \\ \quad x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解决这个数学问题，求得满足约束条件又同时使目标函数取得最小值的 x_1 和 x_2，便是使成本最低的饲料配料最佳方案。

以上三个问题，尽管从不同的角度来安排生产计划，但都属于同一类优化问题。从它们的数学模型上看，其共性是求一组非负的变量（称为决策变量），使它们满足某些线性方程或线性不等式（称为约束条件），并使一个线性函数（称为目标函数）达到最大值（或最小值），这样的问题就称为**线性规划问题**。目标函数和约束条件是构成线性规划问题的两大组成部分。

2. 线性规划问题的一般形式

从上面的例子可以看出，任何一个经济（技术）问题，如果满足下列条件，就可以给出线性规划问题：

（1）它的决策目标能够用线性函数来描述；

（2）存在着达到决策目标的多种方案；

（3）达到决策目标是在一定的约束条件下实现的，这些约束条件又是用线性不等式或线性等式来描述的。

一般地说，线性规划的目标函数可以是求最大值，也可

以是求最小值；约束条件可以是“≤”，也可以是“=”或“≥”。因而线性规划问题的数学模型一般形式可表述如下：

求 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ \quad x_1, x_2 \cdots x_m \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

使得函数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{7}$$

取值最大或最小。

称条件（6）为约束条件，称（7）为目标函数．线性规划问题的约束条件中出现的函数，以及目标函数都是变量 x_j $(j=1,2,\cdots,n)$的线性函数，这正是线性规划名词中“线性”二字的由来。

其中 a_{ij}, b_i, c_j $(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$都是已知常数，$m$ 是约束条件的个数，n 是决策变量的个数。

为了书写方便起见，通常把上述线性规划问题的数学模型一般形式简写成

求 x_j $(j=1,2,\cdots,n)$

$$s \cdot t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant)\ b_i (i=1,2,\cdots,m) \\ \quad x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

使得

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j (\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j)$$

§1.2 线性规划问题的标准型

线性规划问题的数学模型的一般形式，描述了线性规划问题的普遍性规律。但在上面给出的各个线性规划问题中，约束条件可以是线性方程组，也可以是线性不等式组；目标函数可以出现求最大值，也可以出现求最小值。约束条件和目标函数这种形式上的不一致性，给我们讨论线性规划问题的求解，带来很大的不便。为了便于研究线性规划问题和求解的需要，我们来讨论线性规划问题的标准型及化标准型的方法和步骤。

1．线性规划问题的标准型

这里规定，线性规划问题的标准型是求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，满足

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ \quad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{8}$$

使目标函数

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

其中， $b_i \geqslant 0$，$(i = 1, 2, \cdots, m)$。

线性规划问题的标准型中，c_j，b_i，a_{ij} 均为已知常数。c_j 通常称为**利润系数**或**成本系数**，前者一般是求最大值问题，后者是求最小值问题；b_i 通常称为**限制系数**或**资源系数**，为非负实数；a_{ij} 通常称为**结构系数**或**消耗系数**。

线性规划问题的标准型可以缩写成

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s\cdot t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{9}$$

其中，$b_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$。

利用向量和矩阵的符号，线性规划问题的标准型也可以简记作

$$\max\ z=CX$$

$$s\cdot t\begin{cases}AX=b\\ X\geqslant 0\end{cases} \tag{10}$$

其中 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

则（10）称为线性规划问题标准型的矩阵形式。

上面给出的线性规划标准型（8）、（9）、（10），显然，有以下四个特点：

（1）目标函数是求最大化类型；

（2）在约束条件中，除决策变量非负用“$\geqslant$”号表示

外，其它所有约束条件均用等式表示；

（3）每个约束方程，右边的常数项 b_i 都是非负的 $(b_i \geq 0)$；

（4）所有变量都受非负限制。

2．化标准型的一般方法步骤

线性规划问题的标准型是求解线性规划问题的出发点，因此，对于具体线性规划问题常常需要化成标准型。

（1）若给出的目标函数为求最小值问题，可以在目标函数两端同乘以（－1），化成求最大值问题。如求

$$\min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

可化为求

$$\max(-z) = -(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

令 $z' = -z$，则有

$$\max\ z' = -(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

（2）若约束条件右端的常数 b_i 不满足非负要求，可以通过对约束条件两端同乘以(－1)解决。例如 $3x_1 - 2x_2 = -5$，两边同乘以（－1），得

$$-3x_1 + 2x_2 = 5$$

（3）若给出的约束条件含有不等式，例如

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

可以通过在不等式左边加一个变量 x_{n+1}，化成

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

其中 $x_{n+1} \geq 0$，通常称为松弛变量。这一步叫做引进松弛变量，化"≤"情形为"＝"的情形。

（4）若给出的约束条件含有不等式，例如

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

可以通过在不等式左边减去一个变量 x_{n+1}，化成

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + x_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

其中 $x_{n+1} \geqslant 0$，通常称为**剩余变量**。这一步叫做引进剩余变量，化"$\geqslant$"情形为"$=$"情形。

（5）若给出某一变量没有非负要求，如对 x_k 可正也可负，通常称 x_k为**自由变量**，则可设

$$x_k = x_k' - x_k''$$

其中，x_k'，$x_k'' \geqslant 0$，而后用 $x_k' - x_k''$ 代换各表达式中所有的x_k。

为更清楚地说明问题，举例如下：

例 1　把线性规划问题

$$\max\ z = 7x_1 + 12x_2$$

$$s \cdot t \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ \quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

化成标准型。

解　按标准型要求，引入松弛变量 x_3，x_4，x_5，且应与 x_1 和x_2 同等看待，均受非负限制，纳入目标函数时，其系数均为零。得标准型为

$$\max\ z = 7x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s \cdot t \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_3 + x_5 = 300 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$