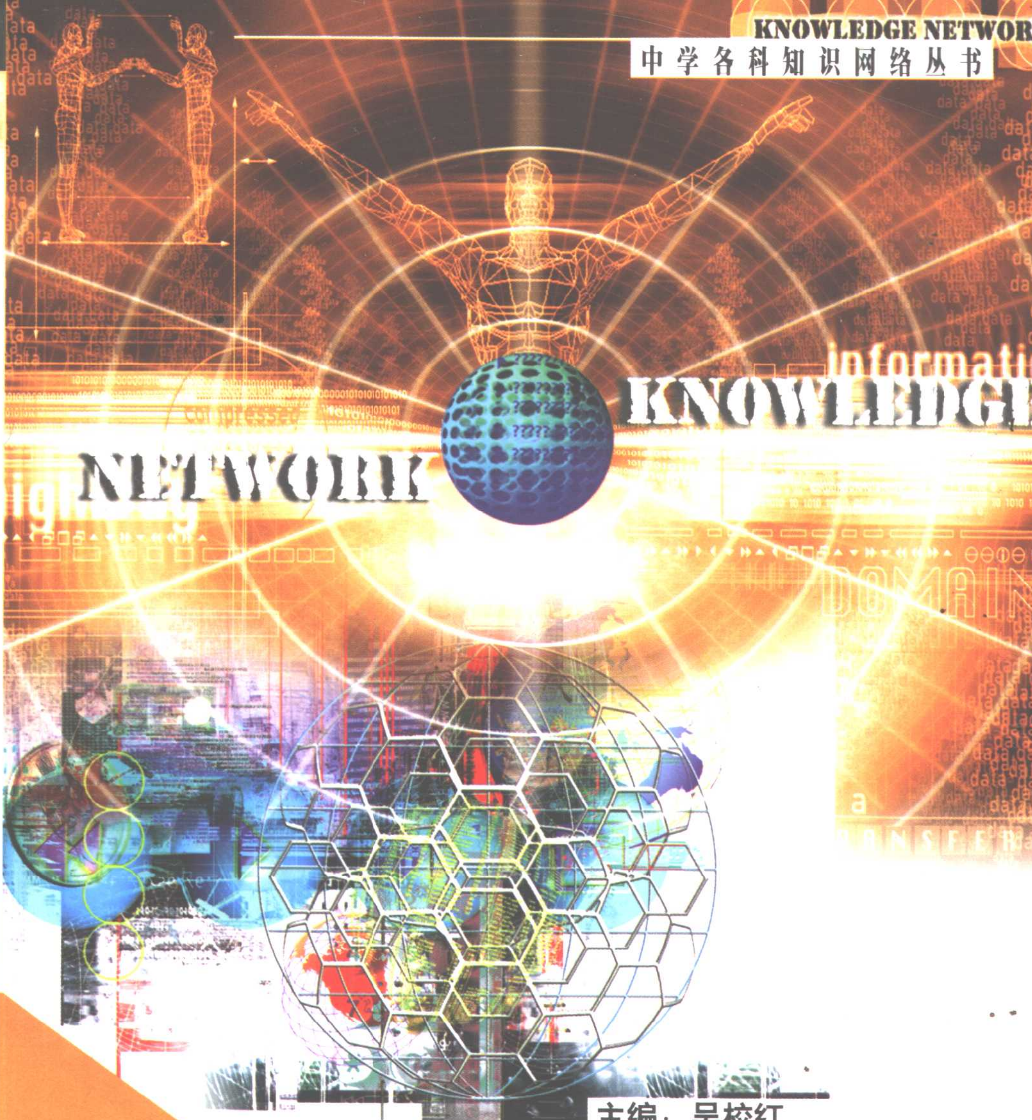
KNOWLEDGE NETWORK

中学各科知识网络丛书



主编：吴校红

中学数学知识网络

湖南师范大学出版社

中学各科知识网络丛书

中学数学
知识网络

◆主编 / 吴校红

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

中学数学知识网络 / 吴校红主编 .—长沙：湖南师范大学出版社，2002.4

（中学各科知识网络丛书）

ISBN 7—81081—135—5/G·081

Ⅰ.中 ... Ⅱ.吴 ... Ⅲ.数学课—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 020664 号

中 学 数 学 知 识 网 络

主　　编：吴校红
丛书策划：廖建军
责任编辑：廖小刚
责任校对：刘琼琳

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　湖南航天长宇印刷有限责任公司印刷
850×1168　32 开　12.75 印张　401 千字
2002 年 4 月第 1 版　2002 年 4 月第 1 次印刷
印　数：1—15200 册
ISBN7—81081—135—5/G·081
定　价：15.00 元

序　言

杨金安

（国家级骨干教师·湖北省红安县第一中学校长）

21世纪是知识经济时代，知识正逐步代替资源、资本成为经济和社会发展中最重要、最活跃的因素。广泛涉猎各种知识，构建基础扎实、适应面广、能够满足未来社会继续学习和工作需要的知识网络，并在此基础上转化成创造、创新能力，已成为当代中学生的迫切需要。湖南师范大学出版社和黄冈市部分重点中学携手合作，出版这套《中学各科知识网络丛书》，在教材和练习之外，开辟一条新的适合学生独立自学的途径，作了一个有益的尝试。

《中学各科知识网络丛书》一套共5本，涉及中学教学和高考的所有主要学科：语文、数学、英语、物理、化学、生物、地理、历史、政治等。丛书以“网结知识、形成能力、弘才启智、适应需要”为宗旨，以知识为线索，按新的教学大纲和教材的知能要求，将高中阶段需要掌握的内容，分解成若干个既相对独立、又相互联系的点，并分成“知识内涵”“知识点击”“经典例题”“知识拓展”（或“发散思维”）四个板块，组成一个由浅入深、知能结合的知识网络。

知识内涵：以网络、图表和文字说明形式将基础知识系统化，力求知识全面，突出重难点，便于整体认知，形成体系。

知识点击：立足知识，着眼能力培养，传授掌握知识、形成能力的方法、途径，重在启发、诱导。

经典例题：剖析1～3个近年高考、会考卷中出现的典型试题，从出题思路、解题技巧等方面作精心解析，让学生融会贯通之后能举一反三，自觉迁移。

知识拓展（或“发散思维”）：围绕知识点作横向和纵向扩展，力求拓宽加深，便于学科内综合。

这套丛书体系完备，讲解透彻，在目前教辅资料市场练习类图书充斥的

情况下，以辅导学生独立自学为己任，独树一帜。丛书适合高中阶段各个年级尤其是高三年级学生的需要，也是各科教师教学时理想的参考资料。

这套丛书由黄冈市一批基础扎实，有着丰富教学经验和资料编写经验的中青年骨干教师编写，融入了这些学校教学科研的新成果。但由于时间原因，书中肯定还存在一些不够完善甚至是错谬的地方，我们真诚希望读者使用本丛书时，能够与出版社联系，及时反馈意见，使我们能够在修订时有所改进。

编写说明

本书是由黄冈市重点中学长期从事高三教学工作的特级、高级教师严格遵循国家教育部颁发的高考数学《考试说明》规定的原则，以精到地梳理数学知识点为基本内容，以能力训练为编写主旨，在总结近几年高考试题的命题特点和最新题型的基础上精心编写而成的。

本书分为四大部分：代数、三角、解析几何、立体几何。每个部分包含若干个知识点、能力点（测试点）。每个知识点及能力点下又分设四个栏目：

知识网络：用图表展示该测试点脉络，从整体上以综合概括，可使读者对该知识有一个整体印象。

知识点击：针对该测试点的重点、难点及疑点进行精辟的提示，对复习方法、规律进行精心的总结。

经典例题：精选近几年高考试题中最能体现能力考查要求的高质量试题，对其出题思想，测试角度，解题步骤、技巧，辨析规则进行多层次的精细剖析。

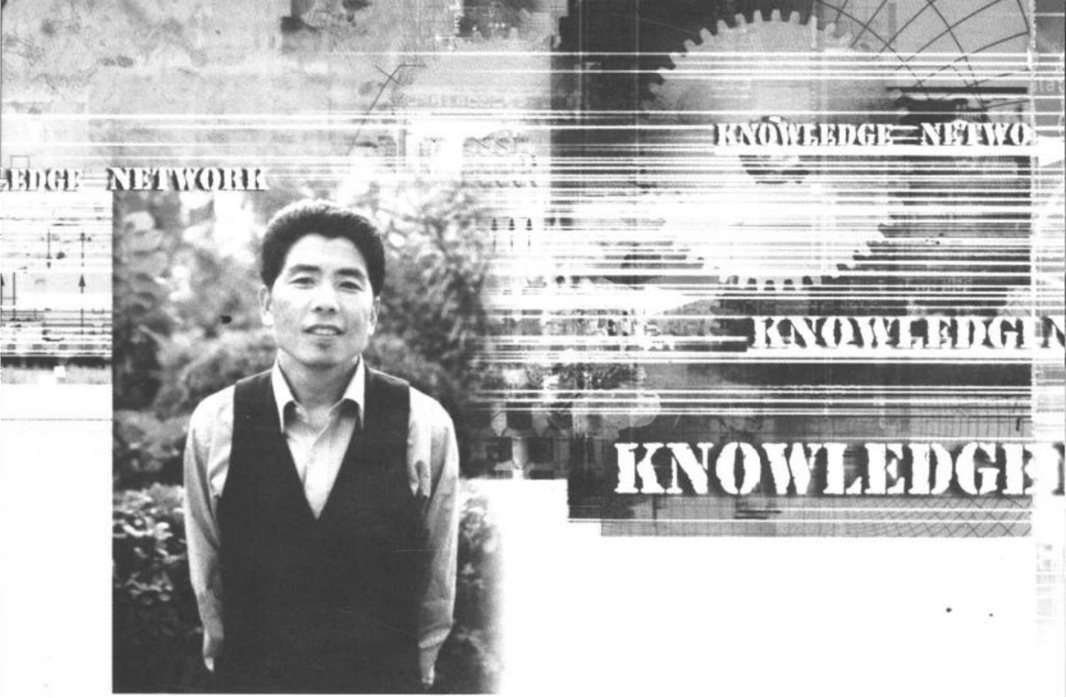
发散思维：针对那些与有关章节、学科交叉、渗透的知识点，予以恰当的阐释和迁移，对今后高考的命题趋势作一些前瞻性的分析和预测。

本书既可作为高三毕业生系统复习数学的备考用书，又可作为其他中学生学习数学的辅导用书。

本书为集体创作，参编者有宋斌、黄孝银、车清华、周春生、尚厚家、耿协明、姚平南、程忠文。本书中错谬之处恳请批评、指正。

编者

2002年4月



◆吴校红

男，湖北省黄冈市人，1984 年毕业于华中师范大学数学系，现为湖北省黄冈市红安一中数学特级教师，黄冈市中学数学专业委员会理事。

以激发学生的创造为主要教学风格，注重培养学生的数学素质和能力，课堂教学生动、活泼而轻松，适于各种层面的学生，曾培养出湖北省高考理科状元。

1990 年以来，就中学数学的教学、解题、考试、竞赛等专题写作了近 200 万字，主要著述：《数学题典》、《黄冈考王》、《学王一拖三—高考快艇》、《中学数学节节练》、《黄冈密卷——学易通》、《为什么错？》、《高中数学总复习备考教程》等。

目　录

三角部分

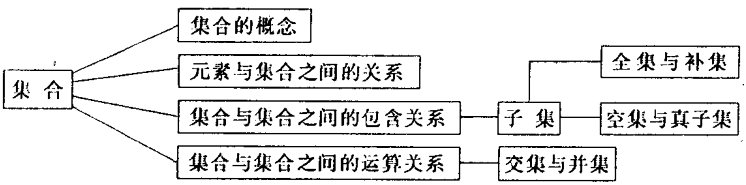
解析几何

代数部分

第一章　集合与简易逻辑

一、集合

A. 知识网络



B. 知识点击

1. **集合**　集合是数学中一个不加定义的、描述性的原始概念，一般是这样来描述的：某些指定的对象集在一起就成为一个集合，或者说：某些具有确定的对象集在一起就成为一个集合. 例如，所有的直角三角形组成一个集合. 集合用大写的拉丁字母 A,B,C 等表示.
2. **元素**　集合中的每一个对象叫做这个集合的元素. 元素用小写的拉丁字母表示，如 a,b,c 等. 例如“北京，上海，天津，重庆”四大城市可以组成一个集合，则北京、上海等均为这个集合中的元素.
3. **常用集合的记法**　自然数集(或非负整数集)记作 $\mathbf{N}$，自然数集内排除 0 的集，也称正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$（注意：自然数集包括 0）. 整数集记作 $\mathbf{Z}$. 有理数集记作 $\mathbf{Q}$. 实数集记作 $\mathbf{R}$.
4. **元素与集合的关系**　如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$（或 $a\overline{\in} A$）. 例如，$\frac{3}{5}\in\mathbf{Q}$，但 $\frac{3}{5}\notin\mathbf{Z}$.
5. **有限集**　含有有限个元素的集合叫做有限集.
   无限集　含有无限个元素的集合叫做无限集.

6. **集合的表示法**

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做列举法,例如,由数1,2,3,4,5组成的集合,可以表示成$\{1,2,3,4,5\}$.当一个集合有较多个数的元素或无限多个元素时,列出全部元素是很麻烦的,甚至是不可能的,故列举法通常只适用于元素个数较少的集合.

(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,叫描述法.用描述法表示集合的常用的形式是:$A=\{x\mid p\}$,竖线前面的x表示集合的代表元素,竖线后面的p指出元素x所具有的公共属性.例如,不等式$x-\frac{1}{2}>3$的解集可以表示为$\{x\in\mathbf{R}\mid x-\frac{1}{2}>3\}$,或$\{x\mid x-\frac{1}{2}>3\}$.

有些集合的代表元素可能不用单个字母x表示.如由抛物线$y=x^2-2x+3$上的所有的点组成的集合,就可记为$\{(x,y)\mid y=x^2-2x+3\}$,此集合中的代表元素是(x,y),其中x,y都是实数,通常无需注明"$x,y\in\mathbf{R}$".

(3)图示法:用一条封闭的曲线(或数轴)的内部来表示一个集合.如图1-1和图1-2分别表示的集合为$\{a,b,c,d,e\}$和$\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x\leqslant 4\}$.

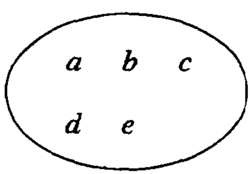


图1-1

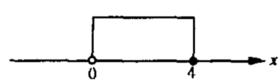


图1-2

7. **集合中元素的特性**

(1)确定性:即对于一个给定的集合,它的元素的意义是明确的.例如由所有直角三角形组成的集合,这个集合中的元素的意义是明确的.如果说"由大树组成的集合",那么这个"集合"的元素的意义是不明确的,因为"大树"是一个没有严格的数量标准的、相对模糊的概念,所以这

个“大树集合”是无法组成的.故在集合的元素的确定性中，$a\in A$ 和 $a\notin A$ 二者必居其一。

(2)互异性：即对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的.例如方程 $x^2-2x+1=0$ 有实根 $x_1=x_2=1$，它的解的集合表示为 $\{1\}$，只含有一个元素.

(3)无序性：主要是针对用列举法表现的有限集而言.如：$\{a,b\}$ 和 $\{b,a\}$ 表示同一个集合.若用列举法表示无限集，则应遵循一定的规律或顺序，如正整数集 $\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$.

8. **空集**　我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.例如：$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}=\varnothing$，$\{$两边之和小于第三边的三角形$\}=\varnothing$.注意不能把空集理解成没有意义的集合，它只是表示集合中没有元素或元素个数为 0.

9. **a 与 $\{a\}$ 的关系**　对于集合 $\{a\}$ 来说，a 是它的元素，集合 $\{a\}$ 只有一个元素，是一个单元素集合，a 与集合 $\{a\}$ 的关系是属于关系，即 $a\in\{a\}$.

10. **子集**　对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或者说集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$(或 $A\subset B$)，$B\supseteq A$(或 $B\supset A$).这时我们称集合 A 是集合 B 的子集.

    当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，记作 $A\nsubseteq B$(或 $A\not\subset B$)，$B\nsupseteq A$(或 $B\not\supset A$).

    规定：空集是任何集合的子集.即对任何一个集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$.

11. **真子集**　对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集.记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).例如 $\{a,b\}\subsetneqq\{a,b,c,d\}$.对于任何一个集合它不是本身的真子集.空集是任何非空集合的真子集，即 $\varnothing\subsetneqq A$(A 为非空集合).

12. **子集的性质**　(1)$A\subseteq A$；(2)$\varnothing\subseteq A$；(3)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；(4)有 n 个元素的集合的子集个数是 2^n.

13. **真子集的性质**　(1)空集是任何非空集合的真子集；(2)若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$；(3)有 n 个元素的集合的真子集的个数是 2^n-1.

14. **集合相等**　对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$，即若 $A\subseteq B$，又 $B\subseteq A$，则 $A=B$.注意，由集合相等的概念可知：两个相等的非空集合 A 和 B，它们的元素是完全相同的.

例如，$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{-1,2\}$，则 $A=B$.

15. **$\varnothing$与$\{\varnothing\}$的关系** $\varnothing$是不含任何元素的集合. $\{\varnothing\}$是只含一个元素$\varnothing$的单元素集合，故$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$. 虽然$\varnothing$中没有元素，但作为集合来说，$\{\varnothing\}$是含有一个元素$\varnothing$的，故有$\varnothing\in\{\varnothing\}$.

16. **全集** 在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，全集通常用符号 U 表示. 全集是相对于所研究的问题而言的一个相对概念，它含有与所研究的问题有关的各个集合的全部元素，因此全集会随研究问题的不同而不同. 例如在解不等式时，通常把实数集合作为全集.

17. **补集** 一般地，设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$），由 S 中所有不属于A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集），记作 $\complement_S^A$，即 $\complement_S^A=\{x\mid x\in S$，且 $x\notin A\}$. 也就是说，如果从集合 S 中取出集合A 的全部元素，则所有剩余下来的元素组成的集合就是 $\complement_S^A$. 用图示法可表示成图 1－3 中的阴影部分.

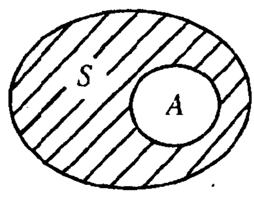


图 1－3

18. **交集** 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与B 的交集，记作 $A\cap B$（读作"A 交B"），即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且$x\in B\}$. 在理解概念时，要注意"且"字，它说明 $A\cap B$ 的任何一个元素 x 都是A 与B 的公共元素. 故 A 与 B 的交集也可理解为由 A 和B 的所有公共元素（不包含其他元素）组成的集合，即 $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.
用图示法可表示成图 1－4 中的阴影部分.

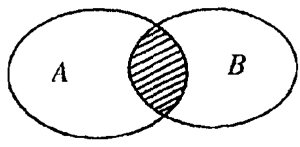


图 1－4

19. **并集** 由所有属于集合 A 或集合B 的元素所组成的集合，叫做 A 与B 的并集，记作 $A\cup B$（读作"A 并B"），即：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或$x\in B\}$. 注意概念中的"或"字，用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的，"$x\in A$，或 $x\in B$"这一条件，包括了下列三种情况：(1)$x\in A$，但 $x\notin B$"；(2)$x\in B$，但 $x\notin A$；(3)$x\in A$，且 $x\in B$. 还要注意，A 与B 的公共元素在$A\cup B$ 中只出现一次. A 与B 的并集也可理解为由A 和B 的所有元素（不含其他元素）组成的集合.
用图示法可表示成图 1－5 中的阴影部分.

20. **交集运算性质**

(1)$A\cap A=A$;(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$;(3)$A\cap B=B\cap A$.

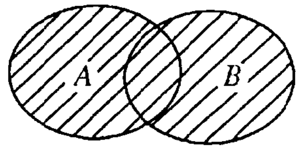


图 1－5

并集运算性质

(1)$A\cup A=A$;(2)$A\cup\varnothing=A$;(3)$A\cup B=B\cup A$;(4)若把有限集合 A 的元素个数记作 card(A),则 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}A+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

补集的运算性质

(1)$A\cap(\complement_S^{A})=\varnothing$;(2)$A\cup(\complement_S^{A})=S$;(3)$\complement_S(\complement_S^{A})=A$.

21. **集合交、并、补的运算的性质推论**

(1)$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(2)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(3)若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$,$A\cup B=B$;

(4)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(5)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(6)$\complement_S(A\cap B)=(\complement_S^{A})\cup(\complement_S B)$

(7)$\complement_S(A\cup B)=(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$

22. **奇数集、偶数集**　形如 $2n+1(n\in\mathbf{Z})$的整数叫做奇数,全体奇数的集合简称奇数集;形如 $2n(n\in\mathbf{Z})$的整数叫做偶数,全体偶数的集合简称偶数集.

23. **几个符号的意义**

(1)“$\in$”是元素与集合之间的关系.如 $1\in\{1,3,5\}$,$4\notin\{1,3,5\}$.

(2)“$\subseteq$”,“$\subsetneqq$”是集合与集合之间的包含关系,如$\{1,2\}\subsetneqq\{1,2,3\}$,$\{1,2\}\subseteq\{1,2\}$.

(3)“$\cap$”,“$\cup$”是集合与集合之间的运算关系,如$\{1,2,3\}\cup\{2,3,5\}=\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3\}\cap\{2,3,5\}=\{2,3\}$.

C. 经典例题

例 1(直通题)　用列举法表示下列集合:

(1)$A=\{x\in \mathbf{N}|\frac{9}{9-x}\in \mathbf{N}\}$;

(2)$B=\{\frac{9}{9-x}\in \mathbf{N}|x\in \mathbf{N}\}$;

(3)$C=\{y|y=-x^2+6,x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N}\}$;

(4)$D=\{(x,y)|y=-x^2+6,x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N}\}$;

(5)$E=\{x|\frac{p}{q}=x,p+q=5,p\in \mathbf{N},q\in \mathbf{N}^*\}$.

点拨 正确理解集合的概念,弄清集合中元素是什么,充分挖掘集合中元素所具有的性质及涉及范围.

集合 A 中的元素是自然数 x,它必须满足$\frac{9}{9-x}$也是自然数;

集合 B 中的元素是自然数$\frac{9}{9-x}$,它必须满足 x 也是自然数;

集合 C 中的元素是自然数 y,它必须满足的条件实际上是二次函数 $y=-x^2+6(x\in \mathbf{N})$的函数值的取值范围;

集合 D 中的元素是点,这些点必须满足的条件是它们在二次函数 $y=-x^2+6$的图象上,且横坐标、纵坐标都是自然数;

集合 E 中的元素是数 x,它必须满足的条件是 $x=\frac{p}{q}$,其中 $p+q=5$,且 $p\in \mathbf{N},q\in \mathbf{N}^*$.

解 (1)当 $x=0,6,8$ 这三个自然数时,$\frac{9}{9-x}=1,3,9$ 也是自然数,

$\therefore A=\{0,6,8\}$.

(2)由(1)知,$B=\{1,3,9\}$.

(3)由 $y=-x^2+6,x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N}$,知:$0\leqslant y\leqslant 6$, $\therefore x=0,1,2$ 时 $y=6,5,2$ 符合题意.

$\therefore C=\{2,5,6\}$.

(4)点(x,y)满足条件 $y=-x^2+6,x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N}$ 时有:

$$\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1\\y=5\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases},$$

$\therefore D=\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$.

(5)依题意,$p+q=5,p\in \mathbf{N},q\in \mathbf{N}^*$,可得:

$\begin{cases}p=0\\q=5\end{cases}$或$\begin{cases}p=1\\q=4\end{cases}$或$\begin{cases}p=3\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}p=4\\q=1\end{cases}$,

$\therefore x=0,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4.$

$\therefore E=\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4\}.$

点评　用列举法表示集合时，既要根据集合的特性(确定性、互异性、无序性)，又要根据具体集合本身特征及元素特点，把集合中的元素不重不漏地一一列举出来.

例2(高频题)　数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则有 $\frac{1+a}{1-a}\in A(a\neq 1)$.

(1)已知 $2\in A$，求证：在 A 中肯定还有另外三个数，并求出这三个数；

(2)已知 $a\in\mathbf{R}$，求证：A 不可能是单元素集合.

点拨　注意根据已知条件及集合中元素的性质反复使用 $a\in A\Rightarrow\frac{1+a}{1-a}\in A$，直至最后所得元素与初始 a 所给定的值相同，再根据集合的性质可获得集合 A 中的全部元素.

解　(1)　$\because 2\in A$，　$\therefore \frac{1+2}{1-2}=-3\in A$，

$\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}\in A$，$\frac{1+(-\frac{1}{2})}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{3}\in A$，又 $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$，故集合中不再有其他元素.

$\therefore A$ 中必须还有另外三个数 -3、$-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$.

(2)若 A 是单元素集合，则必有

$a=\frac{1+a}{1-a}\Rightarrow a^2+1=0\Rightarrow a\in\varnothing.$

$\therefore A$ 不可能是单元素集合.

点评　满足上述条件的集合 A 中，另外有且只有三个数，若继续使用已知条件，则所获得的元素与 2、-3、$-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$ 成周期性重复出现.

若将数集 A 满足的条件改为：若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A(a\neq 1)$. 你能说出集合 A 中有 n 个元素吗？请证明你的结论.