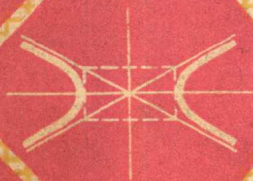


中学数学基础
ZHONGXUE SHUXUE JICHU

$$y=f(x)$$



代数

上册

胡显承 米道生 钱文侠

等编

梁绍鸿 孟广烈

人民教育出版社

中学数学基础

代 数

上 册

胡显承 米道生 钱文侠 等编
梁绍鸿 孟广烈

人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

这套《中学数学基础》目前包括《代数》(上、下册)、《几何》、《三角》、《解析几何》、《公式和数表》,以及前五册的习题解答各一本,它们是在一九七五年出版的一套《初等数学》的基础上编写的。其中代数、几何、三角是重新编写的;解析几何是在原书的基础上,对部分内容进行了修改,增加了习题数量;公式和数表只改正了原书中的错误。这套书加强了基本理论的内容;增加了习题数量;引入了一些近代数学的初步知识。

《代数》上册内容包括:预备知识,整式,一次方程,乘法公式和因式分解,分式和根式,二次方程,不等式,对数,数列。

这套《中学数学基础》可供广大青年自学相当于中学程度的数学基础知识之用,也可供中小学教师阅读和参考。

中学数学基础

代 数

上 册

胡显承 米道生 钱文侠 等编
梁绍鸿 孟广烈

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 11.75 字数 244,000

1980年4月第1版 1980年7月第1次印刷

印数 1—200,000

书号 7012·0116 定价 0.85 元

前 言

这套《中学数学基础》目前包括代数(上、下册)、几何、三角、解析几何、公式和数表,以及前五册的习题解答各一本。这套书是在一九七五年出版的一套《初等数学》的基础上编写的。其中代数、几何、三角是重新编写的;解析几何是在原书的基础上,对部分内容进行了修改,增加了习题数量;公式和数表只改正了原书中的错误。

为了更好地帮助广大青年自学相当于中学程度的基础数学知识,在重新编写和修订这套书的过程中,特别注意以下问题:加强基本理论的内容;介绍一些常用的证明方法和计算方法;增加习题数量;注意习、例题的灵活性和综合性;同时引进一些近代数学的初步知识。

目 录

预备知识	第三节 整式的乘法	56
第一节 用字母表示数	指数律	56
第二节 有理数	单项式的乘法	59
正数和负数	多项式的乘法	61
数轴	小结	64
大小的比较	复习题	65
图表	第二章 一次方程	
第三节 有理数的四则运算	第一节 方程的基本知识	68
加法规则	第二节 一元一次方程	73
减法规则	方程的同解变形	73
乘法规则	解法举例	75
除法规则	应用举例	79
第四节 有理数的乘方和开方	第三节 二元一次方程组	84
有理数的乘方	消元法	86
有理数的开方	解的公式	92
实数	应用举例	98
小结	第四节 解的几何意义	104
复习题	平面直角坐标	104
第一章 整式	二元一次方程的图形	108
第一节 代数式	解的几何意义	111
一般概念	小结	112
单项式和多项式	复习题	114
第二节 整式的加减法	第三章 乘法公式和 分解因式	
合并同类项	第一节 乘法公式	118
竖式计算		

第二节 分解因式 125

提公因式法 125

应用公式法 128

又乘试算法 131

分组分解法 135

第三节 恒等变形 140

小结 146

复习题 147

第四章 分式和根式

第一节 分式的化简 150

基本性质 151

约分 153

真分式和假分式 156

第二节 分式的四则运算 162

通分 162

分式的加、减法 165

分式的乘、除法 167

第三节 零指数、负整数

指数幂 173

第四节 根式的恒等变形 179

算术根 179

根式变形的规则 182

根式的运算和化简 187

第五节 分数指数幂 195

小结 199

复习题 202

第五章 二次方程

第一节 一元二次方程 206

配方法 207

公式解法 209

应用举例 212

第二节 一元二次方程

的讨论 216

根的判别式 216

虚数根 218

根与系数的关系 224

求根与因式分解 227

第三节 二次函数 234

二次方程根的几何意义 235

极大和极小 239

第四节 二元二次方程组 244

第五节 分式方程和

根式方程 248

同解方程和增根的概念 249

分式方程 251

根式方程 259

小结 263

复习题 265

第六章 不等式

第一节 不等式及其

基本性质 269

不等式 269

区间 270

基本性质 272

第二节 一次不等式 275

一元一次不等式 275

一元一次不等式组 279

二元一次不等式 283

第三节 一元二次不等式 287

图象解法 287

分解因式解法	292
小结	296
复习题	297
第七章 对数	
第一节 指数式和对数	300
第二节 常用对数	303
定义和性质	303
查表求常用对数	305
首数和尾数	307
反对数表	310
第三节 对数的运算规则和 应用	313
积、商、幂的对数	313
利用对数简化计算	316
指数方程和对数方程	321
换底公式	324
第四节 自然对数	327
以 e 为底的对数	327

自然对数的运算规则	328
自然对数的求法	329
第五节 计算尺简介	331
小结	336
复习题	338
第八章 数列	
第一节 等差数列	341
定义和通项公式	341
求和公式	345
第二节 等比数列	349
定义和通项公式	349
求和公式	352
第三节 其他数列举例	355
调和数列	355
高阶等差数列	357
Σ 符号	366
小结	369
复习题	370

预 备 知 识

在算术里,大家学习了整数和分数(包括小数),以及它们的运算.和算术一样,初等代数也是研究数和数的运算规律的.但是,代数和算术有一个明显的区别,就是它将广泛地用 a, b, c, x, y, z 等字母来表示数.为什么要用字母表示数?学习初等代数就从这里开始.

第一节 用字母表示数

用字母表示数,是简明地表达现实世界中数量之间关系的需要.举例来说:

一个长是5米、宽是3米的长方形房间,它的地面面积是 $5 \times 3 = 15$ (平方米);

一块长方形土地,经丈量后长是38.5丈,宽是22丈,这块土地的面积就是 $38.5 \times 22 = 847$ (平方丈);

概括成一般规律就是:“任何长方形,其面积都是长和宽的乘积”.为了简明地表达这个一般规律,我们用字母 S 表示“长方形面积”, a 、 b 分别表示长方形的“长”和“宽”,得到公式:

$$S = ab^*$$

* 字母和数、字母和字母相乘时,通常把“ $\times$ ”号记作“ $\cdot$ ”,或者省略不写.如 $a \times b$ 写成 $a \cdot b$ 或 ab ; $2 \times a$ 写成 $2 \cdot a$ 或 $2a$; $a \times 2$ 也写成 $2a$ (不写成 $a2$).但数和数相乘时,一般仍写“ $\times$ ”号.

这个公式简单明白地表示了长方形面积和边长之间的普遍关系。这是由特殊到一般。对于某个长方形，只要把长和宽的具体数值代入到式子 ab 中去，就能算出相应的面积 S 。如 $a=7$ 米， $b=12$ 米时，

$$S=7 \times 12=84(\text{平方米})$$

这是由一般到特殊。

我们看到，字母 a, b 代表数，但又不仅是代表一个具体的数。

在数学和其他自然科学中，广泛地使用着字母代数的方法，来表达数量之间的一般关系。例如：

“三角形面积是底和高乘积的一半”可表达为

$$S=\frac{1}{2}bh$$

其中 S 代表面积， b, h 分别表示底和高。

“梯形面积是上、下底之和与高的乘积的一半”可表达为

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h$$

其中 S 表示面积， a, b 分别表示上、下底， h 表示高。

“速度等于距离除以时间”可表达为

$$v=\frac{s}{t}$$

其中 v 表示速度， s 表示距离， t 表示时间。

“重量等于体积乘以比重”可表达为

$$W=Vd$$

其中 W 表示重量， V 表示体积， d 表示比重。

上面这些例子，都是用字母代数的方法把一句话“翻译”

成为包含字母的式子。这种“翻译”工作很重要，是学习初等代数的一个基本功。

例1 用字母 x 表示某数，把下面的话翻译成式子：

(1) 某数的三倍； (2) 某数的一半；

(3) 某数与 $\frac{1}{3}$ 之和； (4) 某数的 2 倍减 5。

解：(1) $3x$ (2) $\frac{1}{2}x$ (3) $x + \frac{1}{3}$ (4) $2x - 5$

例2 用话来叙述式子：

(1) $a+3$ (2) $2(a+b)$ (3) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$

解：(1) a 与 3 之和；

(2) a 与 b 之和的二倍；

(3) a 的一半与 b 的三分之一的差。

问：设字母 n 为整数，则 $2n$ 是奇数还是偶数？任何奇数可以用怎样的式子表示？三个连续整数的乘积可以用什么式子表示？

用字母表示数，还可以简明地表达数的运算规律。算术里讲过，数(整数和分数)的加法和乘法都适合交换律和结合律，还适合分配律。这些规律可以简明地表示如下：

加法交换律： $a+b=b+a$

加法结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律： $ab=ba$

乘法结合律： $(ab)c=a(bc)$

加、乘分配律： $(a+b)c=ac+bc$

其中 a, b, c 代表任何数。这五个运算规律，是初等代数中贯穿始终的基本规律，总称为基本运算定律。

运用这些简明的运算规律，可以为实践中一系列计算问题提供简捷的方法。

例如，某工厂生产一批零件，其形状相同，如图 1，但尺寸有几种规格，为了计算面积，就需要找出一般的计算公式。

如图，零件面积 S 是一个长方形和一个梯形的面积之和，有

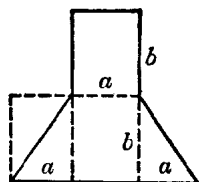


图 1

$$S = ab + \frac{1}{2}(a + 3a)b \quad (1)$$

由分配律，有 $a + 3a = (1 + 3)a = 4a$

所以，
$$S = ab + \frac{1}{2} \cdot 4ab$$

$$= ab + 2ab$$

$$= (1 + 2)ab \quad (\text{分配律})$$

最后得到

$$S = 3ab \quad (2)$$

公式(2)比公式(1)简单多了，很明显，用公式(2)进行计算，可以大大节省计算工作量。

初等代数的基本问题之一，就是把含有字母的式子化简，这对在实际工作中简化计算以及分析数量关系都有重要的意义。

初等代数的另一个基本问题，是根据未知数所满足的条件求出未知数。

例如，一块水稻试验田，原准备在缓苗期每亩施硫酸铵(含氮量为 21%)15 斤，现改用氨水(含氮量为 14%)，要达到同样效果，每亩应施用氨水多少斤呢？

在这个问题中,每亩施用氨水斤数是未知数,可以用字母 x 来表示. 要求它与硫铵达到同样的效果,就是说: x 斤氨水与 15 斤硫铵的含氮量相等,即有

$$0.14x = 0.21 \times 15$$

即 $0.14x = 3.15$ (3)

上式表示 x 满足的条件. 这是已知两数的积和一个乘数,求另一个乘数的问题. 用除法,得

$$x = \frac{3.15}{0.14} = 22.5 \quad (4)$$

即每亩应施氨水 22.5 斤.

类似这样的问题,在三大革命的实践中是很多的.

上述两类问题,一是把包含字母的式子由繁化简;一是根据包含表示未知数的字母的等式,将未知化为已知. 繁和简、未知和已知都是矛盾着的双方,但在一定条件下又互相转化. 简单地说,初等代数就是研究怎样实现这些转化的. 掌握初等代数的规律就是要掌握数量的运算之间的转化规律. 因此,必须用唯物辩证法作指导,来学习初等代数.

习 题

1. 写出下列公式:

- (1) 长方形的周长(l)等于长(a)与宽(b)之和的 2 倍;
- (2) 圆周长(l)等于圆周率(π)与直径(D)的乘积.

2. 用式子表示下面所求的量:

- (1) 长是 a 丈、宽是 b 丈的长方形空地,划出它的四分之一做操场,这个操场的面积是多少?
- (2) 面粉每袋重 50 斤,大米每袋重 100 斤, a 袋面粉和 b 袋大米

一共重多少斤？

3. 设 $a=7$, $b=5$, 求下列各式子的值:

(1) $(2a+b)(a-b)$

(2) $2a+b(a-b)$

(3) $(2a+b)a-b$

(4) $2(a+b)(a-b)$

(注意: 各个式子因括号位置不同而有不同的值.)

4. 用数的基本运算定律化简下列式子:

(1) $7ab+8ba+4ab$

(2) $3(a+b)+n(b+a)$

5. 求下列等式中的未知数 x :

(1) $x+5=21$

(2) $5:x=7:12$

(3) $5+3x=23$

(4) $\frac{5}{11}=\frac{8}{x}$

6. 平原上有 50 亩地, 每亩产小麦 a 斤, 山坡上有 30 亩地, 每亩产小麦 b 斤. 一共收获了 s 斤.

(1) 用等式表示这些数量之间的关系;

(2) 如果 $a=350$ 斤, $s=26500$ 斤, 求 b .

第二节 有 理 数

用字母表示数, 是数学发展上的一大进步. 由于用字母能够表达和研究数量关系的一般规律, 这就提供了解决问题的简捷方法; 但是, 如果字母只是表示算术里学过的整数和分数(包括小数), 这个优点就会受到限制.

例如, 为了比较北京和外地的气温, 把北京的温度减去外地的温度, 叫做温差. 温差的一般公式是

$$T=a-b$$

其中 T 表示温差, a 、 b 分别表示北京和外地的温度. 如果北京是 18 度, 长春是 13 度, 则温差是

$$T=18-13=5(\text{度})$$

这说明，北京的温度比长春的高 5 度。但是，如果要算北京对上海的温差；而上海是 23 度，则

$$T = 18 - 23 = ?$$

用算术里学过的知识没法计算。就是说，温差的一般公式没法用了。从实际情况看（如图 2），北京的温度比上海的低 5 度。由于算术里的数只表示了量的大小，而无法区别“高 5 度”和“低 5 度”这种意义相反的量，所以运用上述温差的一般公式就受到了限制。因此，我们要扩充数的概念。

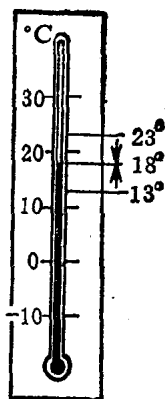


图 2

正数和负数

现实生活中，有许多具有相反意义的量。如温度为零上 3° 和零下 3° 就是相反意义的量，其他如水位的上升和下降，车辆向东行驶和向西行驶，产量的增加和减少等等，都是相反意义的量。

为了区别相反意义的量，把其中一种意义的量规定为正，和它相反意义的规定为负。正的量用算术里的数表示，如“高 5°”记作 5°，“零上 3°”记作 3°；负的量在这些数的前面添上“-”（负）号来表示，如“低 5°”记作 -5°，读作“负五度”，“零下 3°”记作 -3°，读作“负三度”。

算术里的数（除了零）都叫做正数，在它们前面添上“-”号的数叫做负数。如 3, 5, $\frac{1}{3}$, 0.63 都是正数，-3, -5, $-\frac{1}{3}$,

-0.63 都是负数。

0 是个特殊的数，正如恩格斯所指出的，它是“既不是正又不是负的唯一真正的中性数”。

只差一个符号的两个数，如 3 和 -3，我们说其中一个是另一个的相反数。

有时为了强调正数对于负数的相反性，在正数前面添上“+”(正)号，如 4 可以写成 +4。4 和 +4 是一样的。

一般写正数时，都把“+”号省略。

正的整数和分数、负的整数和分数、零，统称为有理数。

数 轴

在日常生活中，用直尺上的刻度表示长度的大小，用温度计上的刻度表示温度的高低，这实际上就是把数直观地用一条直线上的点表示出来。

画一条直线，在上面取一点 O 作为计算的起点，表示数 0 (图 3)，叫做原点。原点两边分别表示正和负，一般规定从左

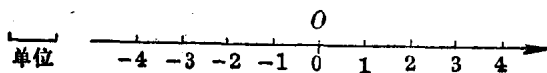


图 3

向右为正方向(用箭头表示)，从右向左为负。再取一个度量单位。这样规定了原点、方向和度量单位的直线，叫做数轴。

所有的有理数，都能用数轴上的点来表示。

例 把下列各数用数轴上的点表示出来：

2, -2, -3.5, 3.5, 7

解：先画数轴，然后在数轴上找出相应的点。

图 4 中的 A 、 B 、 C 、 D 、 E 各点分别表示 2, -2, -3.5, 3.5 和 7.

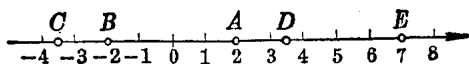


图 4

从图 4 可以看出, 和原点距离相等的两个点, 如 A 和 B , C 和 D 所表示的数互为相反数.

我们把数轴上表示一个数的点到原点的距离叫做这个数的**绝对值**, 并用记号“ $| \quad |$ ”表示. 如表示 2 与 -2 的点到原点的距离都是 2 个单位, 它们的绝对值都是 2, 记作 $|2|=2$, $|-2|=2$.

一般规定如下:

正数或零的绝对值是它们自己;

负数的绝对值是它的相反数.

从这里可以看出, 除零以外, 正数和负数的绝对值都是正数.

如果两个数互为相反数, 那么这两个数的绝对值必定相等. 如 $\frac{1}{2}$ 与 $-\frac{1}{2}$ 互为相反数,

$$\left| \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

大小的比较

大家已经会比较正数的大小, 例如 8 比 7 大, 用不等号表示, 就是 $8 > 7$ 或 $7 < 8$. 读作“八大于七”或“七小于八”.

对于正数和负数, 负数和负数, 怎么比较它们的大小呢?

拿温度来说, 零上的温度比零下的温度高, 所以正数大于负数; -3° 高于 -5° , 所以 $-3 > -5$. 因此, 有理数比较大小的规则是:

正数大于零, 正数和零大于负数;

正数中, 绝对值大的数大; 负数中, 绝对值大的数小.

例 比较下列各对数的大小:

$$(1) \quad 0 \text{ 与 } \frac{2}{7} \qquad 0 < \frac{2}{7}$$

$$(2) \quad 0 \text{ 与 } -\frac{2}{7} \qquad 0 > -\frac{2}{7}$$

$$(3) \quad -0.01 \text{ 与 } -89 \qquad -0.01 > -89$$

$$(4) \quad |-8| \text{ 与 } |7| \qquad |-8| > |7|$$

在数轴上, 对于任意两个点, 位置较右的点, 它表示的数较大, 所以有理数大小的比较, 从数轴上看是很明显的.

图 表

在实际工作中, 常常用图形表示量的变化情况.

例 1 某气象台测得某地区某年十二个月的降水量如下表:

月 份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
降水量 (毫米)	3.4	4.5	6.3	14.6	33.4	75.0	154.6	179.5	38.4	16.9	8.8	3.9

用图形表示降水量变化情况.

用数轴表示月份, 在原点处画一条与数轴垂直的直线, 并规定了单位和正方向, 用以表示测量的降水量. 然后在表示