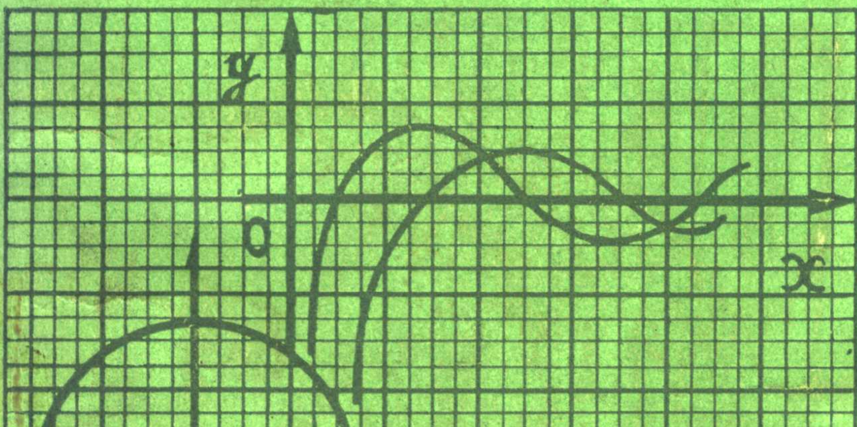
正交函数系及其有关课题

徐润炎 著



大连工学院出版社

正交函数系及其有关课题

徐 润 炎 编

大连工学院出版社

一九八七年七月

内 容 提 要

本书介绍傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换的基本理论和方法，以及某些常用的二阶变系数线性常微分方程解系所规定的特殊函数。并附有适量练习题。本书可作为物理、力学、无线电和其它工程专业开设数学物理方法课程的一个专题教材，也可以作为大专院校师生了解应用数学的参考书。

正交函数系及其有关课题

Zhengjiao Hanshuxi Jiqi Youguan Ke ti

徐 润 炎 编著

大连工学院出版社出版 辽宁省新华书店经销
（大连市甘井子区凌水河）
大连工学院印刷厂印刷 大连凌山印刷厂装订

开本：787×1092 1/32 印张：9.5 字数：221千字
1987年7月第一版 1987年7月第一次印刷
印数：0001—1700

统一书号：13400·15 ISBN 7-5611-0042-6/O·7
定价：1.39元

前　言

以正交函数系为基础的Fourier级数及与之有关的一些积分变换是数学物理方法与不少工程数学广泛运用的基本工具。Fourier级数的研究是分析数学中的重要分支，教材、专著、文章为数极多。这里只对此作一些初步介绍，以利于我们对数学物理方法这门应用数学的学习。这本小书是根据笔者讲授工科研究生数学与力学、物理等专业数学物理方法课程时所用讲义改写而成的。内容包括Fourier级数、积分变换（主要是Fourier变换与Laplace变换）、某些常用的由二阶变系数线性常微分方程解系所规定的特殊函数与参考由这些特殊函数形成特征函数系的Fourier展开等，用作教材时，大约需40—60学时，在高等数学课程中已学过Fourier级数的读者可以略去§2的大部分内容。如果与数学物理方程穿插起来学习，对如何运用这里所讲方法会得到更好的领会，学过线性代数与本书的读者，可以进而阅读线性泛函分析的内容，本书§6中前三节就是为此作准备而写的，初次学习时可以略去，因为既作为一个小引，所述皆不深透，只是粗浅介绍而已。

书中收集了一定份量的练习题，附于各节之后，用以邦助思考并理解所讲内容，但均非难解者。

徐润炎

1986年冬

前　言

以正交函数系为基础的Fourier级数及与之有关的一些积分变换是数学物理方法与不少工程数学广泛运用的基本工具。Fourier 级数的研究是分析数学中的重要分支，教材、专著、文章为数极多。这里只对此作一些初步介绍，以利于我们对数学物理方法这门应用数学的学习。这本小书是根据笔者讲授工科研究生数学与力学、物理等专业数学物理方法课程时所用讲义改写而成的。内容包括Fourier 级数、积分变换（主要是Fourier变换与Laplace变换）、某些常用的由二阶变系数线性常微分方程解系所规定的特殊函数与参考由这些特殊函数形成特征函数系的Fourier 展开等，用作教材时，大约需40—60学时，在高等数学课程中已学过 Fourier级数的读者可以略去§ 2 的大部分内容。如果与数学物理方程穿插起来学习，对如何运用这里所讲方法会得到更好的领会，学过线性代数与本书的读者，可以进而阅读线性泛函分析的内容，本书§ 6 中前三节就是为此作准备而写的，初次学习时可以略去，因为既作为一个小引，所述皆不深透，只是粗浅介绍而已。

书中收集了一定份量的练习题，附于各节之后，用以邦助思考并理解所讲内容，但均非难解者。

徐润炎

1986年冬

正交函数系及其有关课题

目　　录

§1　正交函数系与 *Fourier* 级数……………………（1）

$n°1·1$　正交函数系与函数参考正交函数系的 Fourier 级数……………………（1）

$n°1·2$　平方可积函数……………………（8）

$n°1·3$　二元正交函数系……………………（14）

§2　三角级数……………………（18）

$n°2·1$　周期为 2π 的 Fourier 三角级数……（18）

$n°2·2$　正弦项级数与余弦项级数……………（28）

$n°2·3$　周期非 2π 的 Fourier 级数…………（32）

$n°2·4$　Fourier 三角级数的收敛性问题………（39）

$n°2·5$　Fourier 三角级数的复数形式…………（50）

$n°2·6$　二重 Fourier 三角级数………………（56）

§3　*Fourier* 变换……………………（63）

$n°3·1$　Fourier 积分公式……………………（63）

$n°3·2$　Fourier 变换……………………（75）

$n°3·3$　正、余弦变换……………………（83）

§4　*Laplace* 变换……………………（90）

$n°4·1$　单位函数与脉冲函数……………………（90）

$n°4·2$　Laplace 变换……………………（97）

$n°4·3$　Laplace 变换象函数的存在性与解析性……………………（100）

$n°4·4$　Laplace 变换的基本运算性质…………（104）

n°4·5　微分法则与积分法则…………………… (110)
n°4·6　卷积定理………………………………… (125)
n°4·7　Laplace 变换表………………………… (130)
n°4·8　Laplace 变换的反演法………………… (138)
n°4·9　周期函数的 Laplace 变换…………… (149)
§ 5　***Sturm-Liouville* 问题**…………………… (164)
n°5·1　Laplace 方程的变量分离法…………… (164)
n°5·2　变系数二阶线性常微分方程在正常点邻域中的幂级数解法。Laplace 方程…… (173)
n°5·3　变系数二阶线性常微分方程在正则奇点邻域中的广义幂级数解法……………… (184)
n°5·4　Bessel 方程……………………………… (190)
n°5·5　变相 Bessel 方程……………………… (198)
n°5·6　Sturm-Liouville 问题………………… (201)
n°5·7　Legendre 多项式……………………… (211)
n°5·8　关联 Legendre 函数…………………… (227)
n°5·9　Bessel 函数系的基本恒等式与正交性……………………………………… (236)
n°5·10 Bessel 函数的几件有关事项………… (251)
§ 6　**几个基本问题的推广**……………………… (266)
n°6·1　Hilbert 空间…………………………… (266)
n°6·2　线性算子………………………………… (276)
n°6·3　自伴随算子的特征问题………………… (281)
n°6·4　超几何方程……………………………… (283)

正交函数系及其有关课题

§1　正交函数系与 Fourier 级数

$n^\circ 1\cdot 1$　正交函数系与函数参考正交函数系的 *Fourier* 级数

区间〔a, b〕上的实函数系

$$\varphi_0(x)、\varphi_1(x)、\varphi_3(x)、\cdots、\varphi_n(x)、\cdots \qquad (1)$$

满足条件

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=0 \qquad (2)$$

$$(m\neq n,\ m、n=0、1、2、\cdots)$$

时，叫做区间〔a, b〕上的正交函数系，条件（2）就是正交性条件。这里，还总假定了

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx\neq 0\ (n=0、1、2、\cdots).$$

正数

$$\|\varphi_n(x)\| \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$$

叫做函数 $\varphi_n(x)$ 的范数（或模）。特别当 $\|\varphi_n\|=1$ 时，$\varphi_n(x)$ 叫做归一化的；（1）中每个函数的范数都等于 1 时，这个正交函数系就叫做标准正交系或者就范正交系。任一正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 都可以使它归一化（或说就范化或标准化）成为

$$\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right\} \quad (n=0、1、2、\cdots).$$

设有在〔a, b〕上定义的函数 $f(x)$，假定它可以表示成为函数项级数的和函数：

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots$$
$$\cdots\ (a<x<b), \tag{3}$$

这里函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 在〔a, b〕上是正交的，按正交性条件（2）就有

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)dx,$$

从此得出

$$c_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \tag{4}$$
$$(n=0、1、2、\cdots).$$

系数列（4）叫做函数 $f(x)$ 参考正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Fourier 系数列，对应的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ 叫做 $f(x)$ 参考 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Fourier 级数。不过，由于这个级数的收敛性、推导系数列（4）时所用的逐项积分过程、以及收敛时是否收敛到 $f(x)$ 等问题尚未肯定，所以暂且只能写

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)\quad(a<x<b),$$

而不能联以等号。这些问题要到后面来解释，如今只能先提出如下的一个定理。

定理 1. 如果正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 中的函数 $\varphi_n(x)$ 都在〔a, b〕上连续，并且 $f(x)$ 是某个函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$

的和函数，则在这级数均匀收敛时，它正好是 $f(x)$ 的 Fourier 级数，就是：$a_n=c_n$。

因为这时 $f(x)$ 的连续性与级数的逐项可积性都可以由级数的均匀收敛性推出。这个定理的意思是说：由连续函数所组成的正交函数系构成的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n$ 如果均匀收敛，则它一定是其和函数的 Fourier 级数（参考这个函数系）。

下面我们来举几个正交函数系的例子：

例1．设〔a, b〕是任一个长度为 2π 的区间，如〔$-\pi$, π〕或〔0, 2π〕以至一般的〔a, $a+2\pi$〕，则函数系

$$1、\cos x、\sin x、\cos 2x、\sin 2x、\cdots、\cos nx、\sin nx、\cdots$$

是在这种区间上正交的。如果 $f(x)$ 在这种区间上可积分，则有

$$f x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin_n nx);$$

如果取区间为〔$-\pi$, π〕，则上式在 $-\pi<x<\pi$ 中成立，而 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $(n=0、1、2、\cdots\cdots)$，$bn=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$。

例如 $|x|\sim\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ $(-\pi<x<\pi)$ 时，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right\}=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nx\,dx=0,$$

从而有

$$|x|\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x\quad(-\pi<x<\pi).$$

例2. 设〔a，b〕是长度$2l$的任一区间，如〔0，$2l$〕、〔$-l$，l〕或〔a，$a+2l$〕，l 是任一给定正数，函数系

$$1、\cos\frac{\pi}{l}x、\sin\frac{\pi}{l}x、\cos\frac{2\pi}{l}x、\sin\frac{2\pi}{l}x、\cdots、$$

$$\cos\frac{n\pi}{l}x、\sin\frac{n\pi}{l}x、\cdots$$

在这种区间上是正交函数系。函数 $f(x)$ 参考这个正交函数系的 Fourier 级数是

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x;$$

例如取区间〔0，$2l$〕时，上式在 $0<x<2l$ 中成立，而 Fourier 系数列公式是

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\quad(n=0、1、2、\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\quad(n=1、2、3、\cdots).$$

例如 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{\alpha}x & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\alpha}{2}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{\alpha}{2}\leqslant x\leqslant\alpha\right)\end{cases}$，就有，

$$a_0=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha/2}\cos\frac{2x}{\alpha}\,dx=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(x)\cos\frac{2n\pi}{\alpha}x\,dx=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha/2}\cos\frac{\pi x}{\alpha}\cos\frac{2n\pi x}{\alpha}\,dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha/2}\left[\cos\frac{(2n+1)\pi x}{\alpha}+\cos\frac{(2n-1)\pi x}{\alpha}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha}{(2n+1)\pi}\sin\frac{2n+1}{2}\pi+\frac{\alpha}{(2n-1)\pi}\sin\frac{2n-1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right]=\frac{(-1)^n}{\pi}\ \frac{-2}{4n^2-1},$$

$$b_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\alpha}\,dx=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha/2}\cos\frac{\pi x}{\alpha}\sin\frac{2n\pi x}{\alpha}\,dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha/2}\left[\sin\frac{(2n+1)\pi}{\alpha}x+\sin\frac{(2n-1)\pi}{\alpha}x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha}{(2n+1)\pi}+\frac{\alpha}{(2n-1)\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\ \frac{2n}{4n^2-1},$$

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{\alpha}x}{4n^2-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\frac{2n\pi}{\alpha}x\right]$$

$$\left(0<x<\frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha}{2}<x<\alpha\right).$$

例3. 在区间〔0, π〕或任一长度为 π 的区间上，函数系

$$1、\cos x、\cos 2x、\cdots、\cos nx、\cdots$$

与函数系

$$\sin x、\sin 2x、\cdots、\sin nx、\cdots$$

都是正交的。对于区间〔0, π〕来说，有

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$$

$$(0<x<\pi),$$

而系数 $$a_0=\frac{\int_0^\pi f(x)dx}{\int_0^\pi \frac{1}{2}dx}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx,$$

$$a_n=\int_0^\pi f(x)\cos nx dx\Big/\int_0^\pi \cos^2 nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx\quad (n=1、2、\cdots).$$

也有

$$f(x)\sim b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots\quad (0<x<\pi),$$

$$b_n=\int_0^\pi f(x)\sin nx dx\Big/\int_0^\pi \sin^2 nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$(n=1、2、\cdots).$$

练　　习

1．证明函数系 $\sin x$、$\sin 3x$、$\sin 5x$、…、$\sin(2n+1)x$……在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上正交，并写出函数 $f(x)$ 参考这个正交函数系的 Fourier 系数列与 Fourier 级数。

2．把函数 $|x|$ 在区间 $(0,\ 2\pi)$ 中展开成为参考例 1 中正交函数系的 Fourier 级数。

3．ξ_1、ξ_2、…、ξ_n、…是方程 $\mathrm{tg}\xi=c\xi$（c：常数）的正根，证明 $\sin\frac{\xi_1 x}{l}$、$\sin\frac{\xi_2 x}{l}$、…、$\sin\frac{\xi_n x}{l}$、…是区间 $[0,\ l]$ 上的正交函数系，又 tg、sin 分别改为 ctg、cos 时，相应的结论如何？

4．（Gram-Schmidt 正交化过程），设函数系

$$\{\psi_n\}:\ \psi_1(x)、\psi_2(x)、\cdots、\psi_n(x)、\cdots$$

是区间 $[a,\ b]$ 上的线性无关函数序列，就是说，其中每个函数不能由系中任何个其他函数的线性组合表示出来。又设每个函数 $\psi_n(x)$ 都存在$\int_a^b \psi_n^2(x)dx$。这时，可以找出常数

$$\lambda_{ik}\ (i=2、3、4、\cdots;\ k=1、2、3、\cdots i-1),$$

使得函数列

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x),$$

$$\varphi_2(x)=\lambda_{21}\varphi_1(x)+\psi_2(x),$$

$$\varphi_3(x)=\lambda_{31}\varphi_1(x)+\lambda_{32}\varphi_2(x)+\psi_3(x),$$

………………………………………………………

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda_{n+1,1}\varphi_1(x)+\lambda_{n+1,2}\varphi_2(x)+\cdots\cdots+\lambda_{n+1,n}\varphi_n(x)+\psi_{n+1}(x),$$

………………………………………………………

在 $[a,\ b]$ 上是正交函数系。证明所找得的 λ_{ik} 是

$$\lambda_{n+1,k} = -\int_a^b \varphi_k(x)\psi_{n+1}(x)\,dx \Big/ \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx$$

$(n=1、2、\cdots,\ k=1、2、\cdots、n)$.

5．设 $(0,\ 1)$ 上的 $\psi_n(t)=t^n$ $(n=0、1、2、\cdots)$，用题4的正交化过程求 $(0,\ 1)$ 上的正交多项式系 $\{\varphi_n(t)\}$，其中 $\varphi_n(t)$ 是 n 次多项式。

$n^\circ 1\cdot 2$ 平方可积函数

例如函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $[0,\ 1]$ 上可积，但其平方 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x}$ 却在 $[0,\ 1]$ 上不可积。如果函数 $f(x)$ 的平方在区间 $[a,\ b]$ 上可积，就是 $\int_a^b f^2(x)dx$ 存在，则说函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上平方可积。对于平方可积的任两函数 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，有如下的 Schwarz 不等式：

$$\left(\int_a^b \varphi\psi dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2 dx \cdot \int_a^b \psi^2 dx. \tag{5}$$

其证明可以从 $0<\int_a^b (\varphi+\lambda\psi)^2 dx = \int_a^b \varphi^2 dx + 2\lambda\int_a^b \varphi\psi dx + \int_a^b \psi^2 dx$ 的右边是 λ 的正定二次三项式而推出。

定理2．设有在 $[a,\ b]$ 上平方可积的函数 $f(x)$，如果想要由正交函数系（1）所构成的一个多项式

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \varphi_k(x)$$

跟 $f(x)$ 之间的平方偏差

$$\delta_n = \int_a^b [f(x)-S_n(x)]^2 dx \tag{6}$$

最小，则 γ_k 一定要是 $f(x)$ 参考数函数系（1）的Fourier系数：

$$\gamma_k=c_k(k=0、1、2、\cdots、n)。$$

证明：$\delta_n=\int_a^b f^2dx-2\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\int_a^b f\varphi_k dx+\int_a^b S_n^2dx$，并且 $\int_a^b f\varphi_k dx=c_k\|\varphi_k\|^2$ $(k=0、1、2、\cdots、n)$ 与 $\int_a^b S_n^2dx$ $=\int_a^b\Big(\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2\varphi_k^2+2\sum_{k\neq m}^{1-n}\gamma_k\gamma_m\varphi_k\varphi_m\Big)dx=\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2\|\varphi_k\|^2$，所以

$$\delta_n=\int_a^b f^2dx-2\sum_{k=0}^{n}\gamma_k c_k\|\varphi_k\|^2+\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2\|\varphi_k\|^2$$

$$=\int_a^b f^2dx+\sum_{k=0}^{n}(c_k-\gamma_k)^2\|\varphi_k\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2\|\varphi_k\|^2.$$

从此可见，要 δ_n 最小，必须 $\sum_{k=0}^{n}(c_k-\gamma_k)^2\|\varphi_k\|^2=0$，也就是 $\gamma_k=c_k$ $(k=0、1、2、\cdots、n)$。定理证明完毕。

把 δ_n 的最小值记作 Δ_n，则

$$\Delta_n=\int_a^b f^2dx-\sum_{k=0}^{n}c_k^2\|\varphi_k\|^2.$$

由于 $\Delta_n\geqslant 0$，所以从上式就有

$$\int_a^b f^2dx\geqslant\sum_{k=0}^{n}c_k^2\|\varphi_k\|^2$$

对任何 n 成立。右边随 n 而常增，所以 $n\to\infty$ 时的极限存在。于是得到：

推论 1.

$$\int_a^b f^2(x)dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \tag{7}$$

这个不等式叫做 $f(x)$ 的 Fourier 级数上的 Bessel 不等式。特别在 $\{\varphi_k\}$ 是就范正交系时，$\|\varphi_k\|=1$，（7）成为

$$\int_a^b f^2(x)dx \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

从而可见以 c_k^2 为项的级数是收敛的，所以有

推论 2． $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$。

这就是说，平方可积函数的 Fourier 系数在 $n\to\infty$ 时趋于零。

正交函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 如果对任何平方可积函数 $f(x)$ 都使 Bessel 不等式中的等号成立：

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \tag{8}$$

则这个函数系叫做是封闭的*。这时，等式（8）叫做 Parseval 等式，是正交函数系的封闭性条件。

平方可积函数 $f(x)$ 参考一个封闭正交函数系所得的 Fourier 级数还是不一定能收敛到 $f(x)$ 自身，就是，在普通意义下的 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$ 不一定能在〔a，b〕上成立，不过可以从上面的推导过程推出一种重要结论。首先，我们可以有

推论 3． 正交函数系（1）封闭的充要条件是：对任何平方可积函数 $f(x)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n=0$，就是

---

*） 也有把这一性质叫做完备性，而把下面练习题 2 中的性质叫做封闭性的。