高等师范专科学校试用教材

电工学

熊年科　李谟清　陶颐德　编

华中理工大学出版社

电 工 学

熊年科　李谟清　陶颐德　编
责任编辑　刘继宁

*

华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米　1/16　印张：14.75　插页．1　字数：352 000
1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷
印数：1—11 000
ISBN 7-5609-0123-X/TM
定价：3.40元

前　言

对于师范专科学校物理专业，无论是三年制、还是两年制，电工学都是一门必修的技术基础课。

由于近代科学技术的发展，电工技术在国民经济各个部门以及日常生活中的应用极为广泛。作为一个中学物理教师不掌握一定的电工技术方面的基础理论和实际知识，则适应不了形势的发展、满足不了正在兴起的中学教育改革的要求。本着这种精神，我们编写了电工学一书。

此书是根据国家教委制定的《电工学教学大纲》的精神编写的，适用于三年制或二年制师专物理系的学生。全书共分三大部分：电路、电机和实验。主要内容有单相交流电路、复杂交流电路、变压器、异步电动机和实验指导。考虑到单相正弦交流电路的分析是整个电工学的基础，本课程对这部分内容的要求高于电磁学对这一内容的阐述，而且讲授方法和一些物理量的表示方法也有别于电磁学。因此，本书把它作为必不可少的内容。变压器、异步电动机是常用电工设备，而且掌握其原理、了解其性能也是学会使用其他电器的基础，因此这两章也占有一定的篇幅。考虑到物理教师（特别是农村中学、职业中学的教师）除了教好物理，还必须能兼搞一些电工方面的工作，因此书中除了各章讲清理论、联系应用外，在实验部分加强了电工技术训练方面的要求。

本书在出版以前，作为油印和铅印的讲义先后在全国师专物理教学研究会首届年会、全国高师《电工学》教学研究会上进行了介绍和交流，全国有30多所院校用作教科书或参考书。在使用和交流过程中得到了许多专家和同行的指导和帮助。中国武汉（中南八省）电工理论学会理事长、华中理工大学邹锐教授、北京师范学院电工无线电教研室主任惠士俊教授分别审阅了书稿，都作出了充分的肯定；华中理工大学李升浩教授为本书作序；华南师大郭木森教授、上海师大宋德辉教授、四川师大黄修志副教授对我们的工作均给予了大力支持。在此我们一并表示衷心的感谢。

本书的电路部分及书末附图由抚州师专熊年科编绘，电机部分和电工仪表由宜春师专李谟清编写，第九章和电工实验指导由九江师专陶颐德编写；陶颐德对本书的文稿和图稿做了大量的工作。

由于编者水平有限，错误疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

1987年8月

序

随着现代科学技术的发展，电工技术在国民经济各个领域得到了广泛的应用。四个现代化，在某种意义上说，就是实现电气化，而“电工学”是学习和应用电工技术的一门基础课，它在大专院校绝大多数非电专业教学计划中，列为一门必修的课程。由于各类专业的要求不同，对“电工学”课程的学习重点和方式，应有一定区别，因此，编写不同风格、适应不同要求的教材是有必要的。

目前国内尚没有适合师范专科物理专业的《电工学》教材，编者根据原教育部审订的二、三年制师专用《电工学与实验》教学大纲编写本书。鉴于师专物理专业的要求及先行基础课“电磁学”中的内容，学生已对电磁现象的基本规律、稳恒电流和电路、暂态过程以及磁介质等内容，进行了系统学习，对交流电路也有基本了解，因此，本书在内容取舍、叙述方法等方面，与传统的工科《电工学》教材有许多不同之处。例如，本书删去了普通电工学中的直流电路、暂态过程和磁路等几部分内容，增加了电工仪表、安全用电等基本知识；在叙述方法上，本书从正弦交流电路开始，对较复杂网路的分析，直接采用相量方法；对于磁路的性质，则结合电机、电器等有关内容适当介绍。另外，与本书内容密切配合的实验及实验室配电线路内容，亦编入书中。这样，本书在理论分析上有所提高，而对实际应用内容又有侧重，它既保持了本课程适当的科学体系，又充分体现了师专物理专业的培养要求。这些都是本书的主要特点，无疑，它对工科类非电专业电工学教材与教学方法的改革，也有一定的参考价值。

本书曾经编者们分别试用多遍，几次修改，并在全国30多所院校交流，1986年在全国高等师范院校电工学研讨会上获得好评，并推荐作为教材正式出版。

本书的出版，不仅是对全国师范专科学校的电工学教材作出了积极贡献，也为夜大、职大、函大等有同类要求的专业，提供一本有意义的参考书，一般工程技术人员亦可参考。

华中理工大学电工学教研室教授　李升浩

目　　录

第一篇　电　　路

第二篇　电　　机

第三篇 实验

第一篇　电　　路

电路是电流通过的途径，是由电工设备组成的总体。具体来说，电路一般由电源、负载及中间环节三部分组成。电源是供给电能的设备，如电池、发电机等，它们将其他形式的能量转换为电能。负载是消耗电能的设备，如电灯、电动机等，它们将电能转换为其他形式的能量。中间环节是传送、分配和控制电能的设备。简单的中间环节由较少的电路元、器件组成，较复杂的中间环节则由网络或系统组成。

电路，不仅能进行能量的转换、传输和分配，而且还能进行信号的处理，即通过电路把输入的信号(称为激励）变换或“加工”成为所需要的输出（称为响应）。例如，收音机或电视接收机在工作时，能将微弱的无线电信号放大，以满足我们的需要。

电路分为集中参数电路和分布参数电路两种类型。我们只研究集中参数电路。因为集中参数电路不仅较易理解和设计，而且还是分布参数电路的理论基础。

集中参数电路是由集中参数元件连结而成的。典型的集中参数元件有电阻、电容和电感等。凡由集中参数元件连结而成的电路，不管其连结方式如何，只要电路的尺寸远小于电路的最高频率所对应的波长，就称之为集中参数电路。

第一章　正弦交流电路

本章介绍正弦交流电的基本概念及其四种表示法：三角函数法、波形图示法、旋转矢量法和相量法，重点介绍相量法；串联谐振与并联谐振的特点以及提高功率因数的意义和方法。

§1-1　正弦交流电的基本概念

大小和方向都随时间作周期性变化的电动势、电压和电流，分别称为交变电动势、交变电压和交变电流，统称为交流电。按正弦规律变化的交流电称为正弦交流电。具有正弦电动势作用的电路，叫正弦交流电路。

正弦交流电不仅有很大的实用意义，而且与直流电相比具有突出的优点。因此，工业上普遍以正弦交流电为动力。正弦电动势、电压和电流的一般形式为：

$$e=E_m\sin(\omega t+\varphi_e)$$
$$u=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$$
$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)$$

一、正弦电动势的产生

正弦电动势是由交流发电机产生的。图 1-1 是一个简单交流发电机的结构示意图。磁极N、S固定不动，在两极之间放置圆柱形铁芯，铁芯上绕有线圈AX（A为线圈的始端，X为末端），铁芯和线圈合

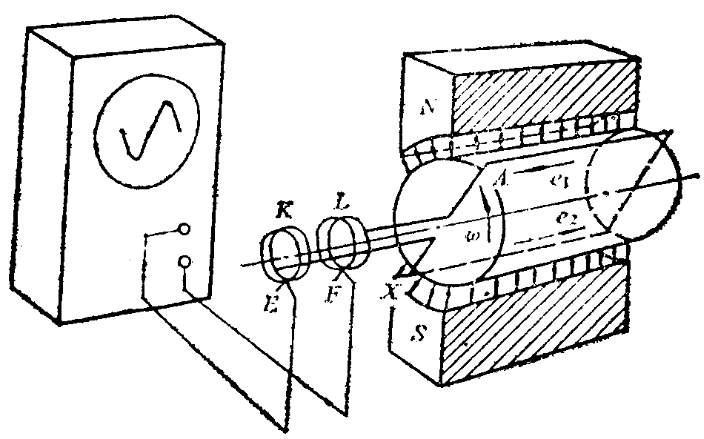

图　1-1

称为电枢，可绕轴旋转，线圈的两端分别接到两个相互绝缘的滑环K、L上，环上压接着与外电路相连的电刷E、F。若与示波器相连，可看到线圈的感应电动势是交变的。

图1-2是交流发电机的截面示意图。采用某种适当形状的磁极，可使气隙中磁感应强度B沿电枢表面按正弦规律变化，即

$$B = B_m \sin\alpha \tag{1-1}$$

式中，α角是线圈平面与中性面MM'的夹角。所谓中性面，就是通过转轴，且气隙中磁感应强度为零的平面。

若线圈AX以角速度ω逆时针旋转（如图1-1，图1-2），由于磁力线垂直于电枢表面，因此，单匝线圈每条有效边（切割磁力线部分）中产生的感应电动势e_1为

$$e_1 = BLV = B_m LV \sin\alpha$$

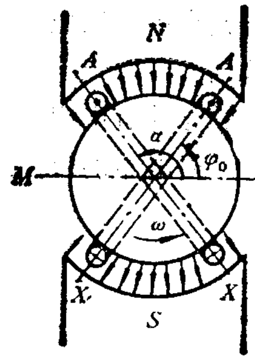

图 1-2

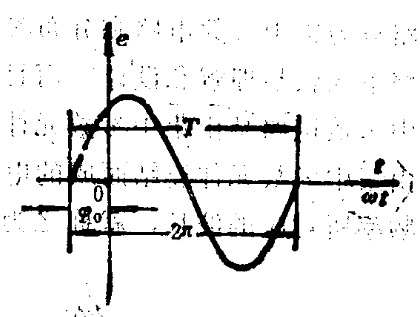

图 1-3

整个线圈的感应电动势为

$$e = e_1 + e_2 = 2e_1 = 2B_m LV \sin\alpha \tag{1-2}$$

式中，L为线圈有效边长。

设$t = 0$时（计时起点），线圈平面与中性面夹角为φ_0，经过t秒后，线圈平面与中性面的夹角将是$\alpha = \omega t + \varphi_0$，于是

$$e = 2B_m LV \sin(\omega t + \varphi_0)$$

若令$E_m = 2B_m LV$，E_m称为电动势的最大值（或幅值、振幅），则得

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{1-3}$$

由上式可见，电动势e随时间按正弦规律变化，在不同的时刻取不同的值，e称为电动势的瞬时值（即时值），以小写字母表示。正弦电动势除了用式(1-3)表示外，还可用波形图表示（见图1-3）。

在图1-2中，线圈在转动过程中所转过的角度称为空间角或机械角，以θ表示，而电动势（或其正弦量）在交变过程中所经历的角度称为电角度，用α表示，电动势变化一周，就是指电角度变化了2π弧度或$360°$。在仅有一对磁极的发电机中，线圈每转一圈，电动势就交变一周，此时电角度与机械角度相等，即

$$\alpha = \theta$$

如果发电机有两对磁极，如图1-4所示，线圈只转半圈($\theta = \pi$)，电动势就变化一周($\alpha = 2\pi$)；线圈转动一圈($\theta = 2\pi$)，电动势则变化两周($\alpha = 4\pi$)，这就是说电角度等于机械角度两倍（图1-5）即

$$\alpha = 2\theta$$

推广到一般情形，对于具有p对磁极的发电机，则有

$$\alpha = p\theta \tag{1-4}$$

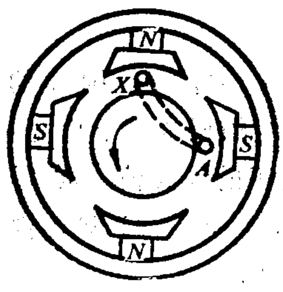

图 1-4

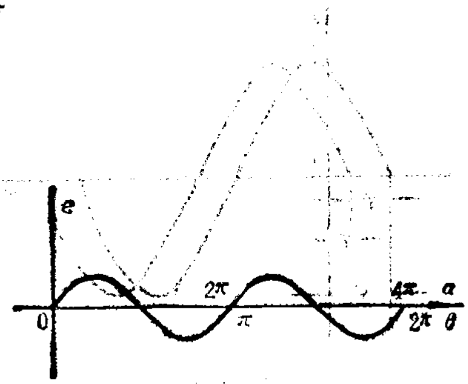

图 1-5

二、交流电的周期、频率和相位

1. 周期

在线圈转动一周的过程中，电动势要完成一次由“零→最大→零→反向最大→零”的变化。若再转第二周，则电动势按同样规律重演一次。这种周而复始的变化叫周期性变化。完成一次周期性变化（或循环）所需的时间叫周期，用T表示，单位是秒，用s表示。

2. 频率

电动势在单位时间内完成周期性变化的次数，叫频率，频率用f表示。单位是赫兹，用Hz表示。有时还用千赫(kHz)、兆赫(MHz)等表示。

若频率为fHz，则周期为$\frac{1}{f}$s，所以周期和频率互为倒数关系，即

$$T = \frac{1}{f} \tag{1-5}$$

由上式可看到，f愈大（或T愈小），交流电变化愈快，反之愈慢。除了用f或T表示正弦交流电变化的快慢外，还可用角频率来表示。单位时间内电角度的变化量称为角频率，以ω表示，单位是弧度/秒，用rad/s表示。因为一周期内交流电变化的电角度为2π弧度，所以有

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{1-6}$$

3. 相位、初相位和相位差

由式(1-3)可看出，电动势的瞬时值e是由振幅E_m和正弦函数$\sin(\omega t + \varphi_0)$共同决定的。式中的电角度$\alpha = \omega t + \varphi_0$称为正弦量的相位角，简称相位。相位是表示正弦交流电在某一时刻所处的状态的物理量，它不仅决定瞬时值的大小和方向，还能表示出正弦交流电变化的趋势。相位角随时间t而变化，当$t = 0$时，相位角$\alpha = \varphi_0$，称之为初相角（简称初相）。初相反映出正弦量的初始值。初相与所选定的计时起点有关。

振幅E_m、角频率ω（或频率f或周期T）和初相角φ_0是表示一个正弦交流电的三要素。振幅和频率与计时起点的选择无关。

设有两个同频率的正弦电动势e_1和e_2分别为

$$e_1 = E_{1m}\sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$e_2 = E_{2m}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

它们相位间的差称为相位差，用φ表示，即

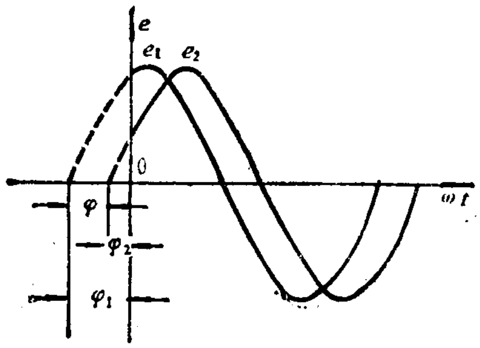

图 1-6

$$\varphi=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2 \quad (1\text{-}7)$$

可见，两同频率正弦量的相位差等于它们的初相差，相位差在任一瞬间都是一常数，如图1-6所示。

如果$\varphi=\varphi_1-\varphi_2>0$，则$e_1$的相位超前（或越前）于$e_2$的相位一个角度$\varphi$，也就是$e_1$比$e_2$先到达正的极大值（或零值）；反之，如果$\varphi=\varphi_1-\varphi_2<0$，则$e_1$滞后（或落后）$e_2$一个角度$\varphi$。

如果相位差为零($\varphi=0$)，则称为同相位（简称同相），这时两个正弦量同时达到正的极大值，也同时通过零值(图1-7(a))；如果它们之间的相位差为$\pi/2$，则称它们为相位正交(图1-7(b))；如果它们之间的相差为π则称它们为反相位(图1-7(c))。

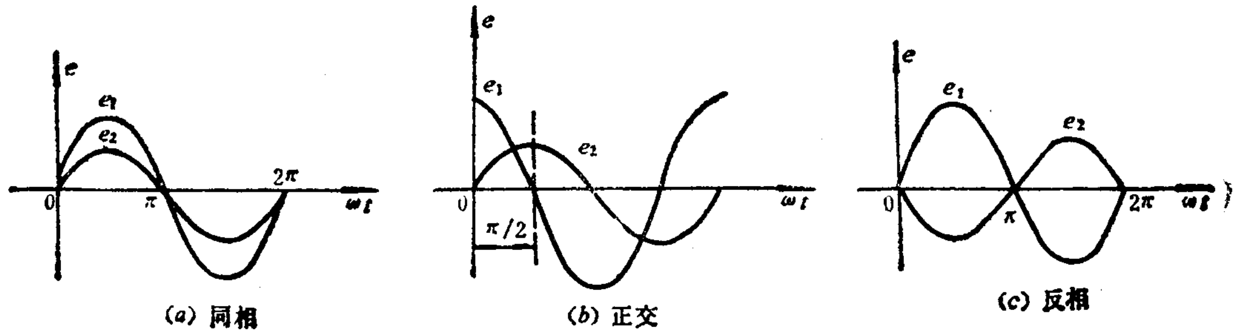

图 1-7

三、交流电的有效值

最大值虽然可以用来表征正弦量的大小，但是计算功率时不大方便，为了简化功率的计算公式，常引入有效值的概念。所谓交流电的有效值，是从交流电与直流电发热相当的观点得出的：如果一个交流电通过一个电阻，在一个周期的时间内所产生的热量和一直流电通过同一电阻在相同时间内所产生的热量相等，那么，该直流电流的值就叫做该交流电流的有效值。以电流的热效应为例进行推导。当周期电流i通过一电阻R时，该电阻在一周期内所产生的热量为

$$Q_1=\int_0^T i^2 R dt=R\int_0^T i^2 dt$$

设直流电I通过电阻R，在时间T内所产生的热量为

$$Q_2=I^2RT$$

当$Q_1=Q_2$时，则

$$I^2RT=R\int_0^T i^2 dt$$

所以

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \quad (1\text{-}8)$$

可见，交流电的有效值可表示为瞬时值的均方根值，有效值常用大写字母I表示。

把$i=I_m\sin\omega t$代入(1-8)式，可得出有效值与最大值的关系

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\sin^2\omega t dt}=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\int_0^T\sin^2\omega t dt}$$

因为
$$\int_0^T\sin^2\omega t dt=\int_0^T\frac{1-\cos 2\omega t}{2}dt=\frac{T}{2}$$

所以
$$I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m$$

或
$$I_m=\sqrt{2}I \tag{1-9}$$

可见正弦量的有效值等于最大值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍。

同理，正弦电压和正弦电动势的有效值分别为

$$U=\frac{U_m}{\sqrt{2}} \tag{1-10}$$

$$E=\frac{E_m}{\sqrt{2}} \tag{1-11}$$

注意，正弦量的有效值与角频率和初相无关。有效值比最大值要用得多，平常说到电流、电压和电动势等正弦量，若无特别说明，一律是指有效值。

四、交流电的参考方向

由于交流电的大小和方向均随时间作周期性变化。因此要确定交流电在某一瞬间的实际方向，必须引入参考方向的概念，所谓参考方向就是预先任意选定的方向，称为参考正方向（或简称正方向）。正方向必须满足下面的规定（以电动势为例）：当电动势e取正值时，其实际方向与正方向一致；当电动势e取负值时，其实际方向与正方向相反。电动势的参考方向不一定是它的实际方向，两者是有区别的，但是有了参考方向，又知其某时刻电动势的正负，便完全能确定此时的实际方向。

参考方向的任意选定并不影响实际方向的确定。当电动势的参考正方向规定为$X\to A$（用实心箭头表示，见图1-8(a)），且$e=E_m\sin\omega t$时，绘出波形图。由图和参考方向的意义可

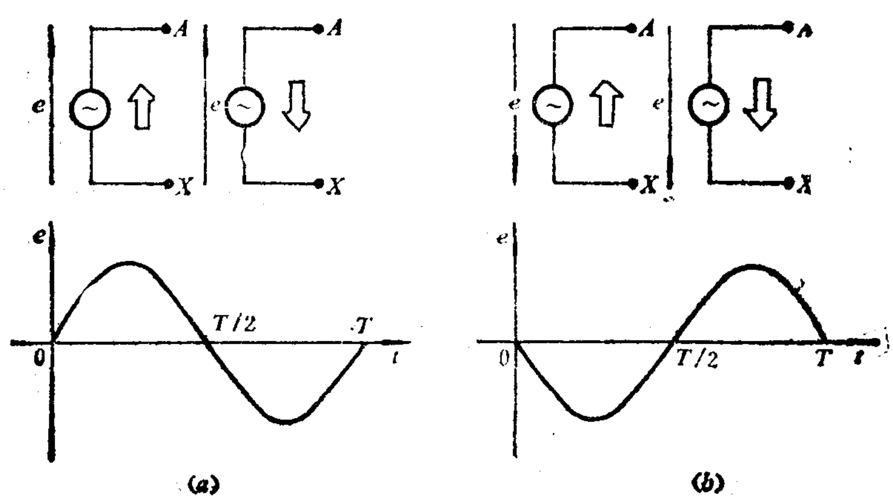

图 1-8

知，当t从$0\to\frac{T}{2}$时，$e>0$，此时e的实际方向与参考方向相同（空心箭头表示），也是由X指向A；当t从$\frac{T}{2}\to T$时，$e<0$，因而e的实际方向与参考方向相反，为A指向X。如果电动势的参考方向规定为$A\to X$（见图1-8(b)），则

$$e=-E_m\sin\omega t=E_m\sin(\omega t+\pi)$$

绘出波形图，可以得出，当t从$0\to\frac{T}{2}$时，$e<0$，e的实际方向与参考方向相反，即$X\to A$；当t从$T/2\to T$时，$e>0$，e的实际方向与参考方向相同，即$A\to X$。由此可知，对一个电动势或一个正弦量，参考方向的两种规定是等效的。

综上所述可知，要完整地表示一个正弦电动势的大小与方向，必须在给出其三角函数表达式的同时，选定一个正方向。如果把某一电源电动势e的正方向改为与原来相反的方向，则e的表达式中的初相位要相应改变一个π角度。

§1-2 正弦量的相量表示法

一、同频率正弦量的叠加

下面以两个同频率且同振幅的正弦电动势e_1和e_2为例来看看叠加以后的结果。

设
$$e_1=E_{0m}\sin(\omega t+\varphi_1)$$
$$e_2=E_{0m}\sin(\omega t+\varphi_2)$$

求e_1与e_2之和，即$e=e_1+e_2$

解
$$\begin{aligned}e=e_1+e_2&=E_{0m}\sin(\omega t+\varphi_1)+E_{0m}\sin(\omega t+\varphi_2)\\&=E_{0m}[\sin(\omega t+\varphi_1)+\sin(\omega t+\varphi_2)]\\&=2E_{0m}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\left(\omega t+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\\&=E_m\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned}$$

式中，$E_m=2E_{0m}\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$是合成电动势的最大值，$\varphi=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$是它的初相位。

由上例可知，同频率的正弦量叠加后仍为同频率的正弦量，只是最大值和初相有所不同，相位差对合成电动势的幅值有很大影响。

由此可见，两个同频率和同振幅的正弦电动势叠加时，其运算过程比较烦。显然，当两个同频率而不同振幅的正弦电动势（或正弦量）叠加时，其运算过程更烦（读者自证）。所以正弦交流电用三角函数式和波形图表示虽然比较直观，但不便于分析和运算。

二、正弦交流电的旋转矢量表示法

同频率正弦量的运算，对于简单电路可用三角函数法求解，对于复杂一些的电路就比较麻烦。前面指出，同频率正弦量相加、减时，其结果仍然是正弦量（频率不变）。根据这一结论，应用旋转矢量法，就能避免繁琐的三角运算。

什么是旋转矢量？如图1-9所示，从原点出发作一矢量$\overline{E_m}$（在字母上加一划表示旋转矢量），令它的长度等于正弦量的最大值E_m，与水平轴的夹角等于正弦量的初相角φ_0，并以等于正弦量角频率的角速度ω反时针旋转。在任一瞬间，该矢量在纵轴上的投影就等于该正

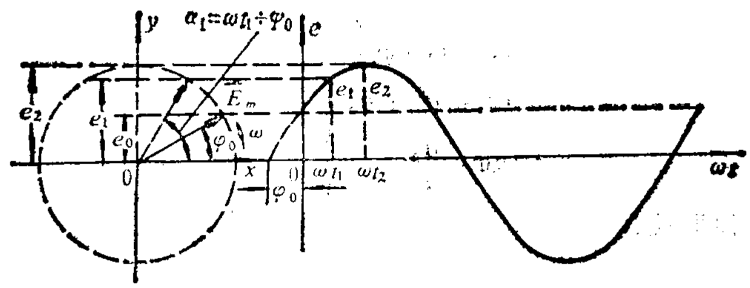

图 1-9

弦量的瞬时值$E_m\sin(\omega t+\varphi_0)$，这样的矢量就叫旋转矢量。这矢量可代替表示式

$$e=E_m\sin(\omega t+\varphi_0)$$

旋转矢量与空间矢量是不同的，空间矢量是在空间有一定方向的矢量（如力、电场强度等）。而旋转矢量只是表示正弦量的一种方法，通过矢量的旋转反映出随时间变化的正弦量，通过矢量在某一瞬时的空间位置，反映出正弦量的瞬时值（旋转矢量与ox轴的夹角表示正弦量的相位角，并不代表矢量的空间指向），因此可以说旋转矢量是时间矢量，它与空间矢量在本质上是不同的。此法对处理正弦量的加、减运算比三角函数法和波形图示法要方便得多，但不适宜作乘、除的运算。

三、正弦交流电的相量表示法（复数符号法）

正弦量除上述三种表示法外，最常用的是复数表示法，因为正弦量可用矢量（旋转矢量）表示，而矢量可用复数表示，因此正弦量也可以用复数表示。

1. 复数

（1）复数的表示。如图1-10(a)、(b)所示，在平面上作一直角坐标，其横轴表示复数的实部，称为实轴，纵轴表示复数的虚部，称为虚轴。平面叫复平面。平面上的每一个点都对应唯一的复数，而每一复数都有唯一的对应点。例如，复数$A=3+j4$，对应点即图1-1$_1$(a)中P_1，它的横坐标是$+3$单位，纵坐标为$+4$单位。P_2类推。复数除与点对应外，也与矢量（复矢量）对应。

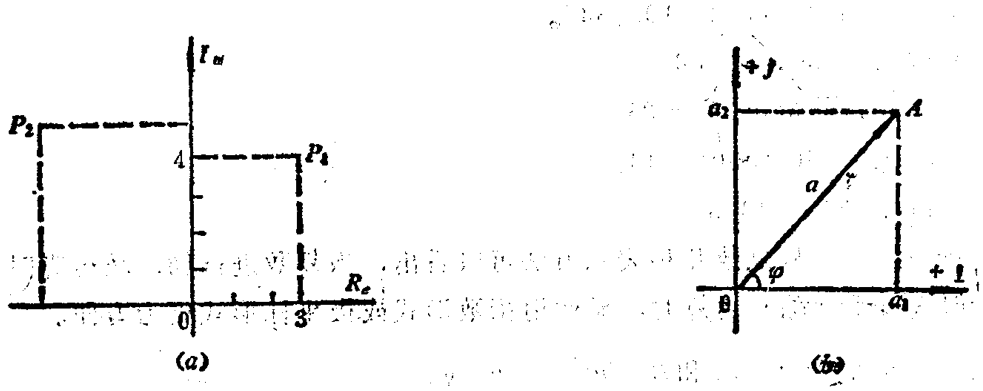

图 1-10

设任一复数$A=a_1+ja_2$，如图1-10(b)，它在平面上对应的点为A，则$\overline{OA}$表示A的矢量。矢量的长度a定义为复数A的绝对值，称为复数A的模（或幅值），模总是取正值。矢量$\overline{OA}$与实轴正方向的夹角φ称为复数A的幅角，它们有如下关系：

$$\left.\begin{array}{l}a_1 = a\cos\varphi \\ a_2 = a\sin\varphi\end{array}\right\} \tag{1-12}$$

$$\left.\begin{array}{l}a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{a_2}{a_1}\end{array}\right\} \tag{1-13}$$

（2）复数的几种形式。

三角函数形式：

$$A = a\cos\varphi + ja\sin\varphi = a(\cos\varphi + j\sin\varphi) \tag{1-14}$$

代数形式：$A = a_1 + ja_2$ (1-15)

指数形式：利用尤拉公式

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

式(1-14)可改写为

$$A = ae^{j\varphi} \tag{1-16}$$

极坐标形式：

$$A = a\angle\varphi \tag{1-17}$$

式中，a为复数A的模，φ为复数A的幅角。

显然，几种形式可以相互转换。顺便指出，用式(1-13)计算幅角φ时，应当注意φ角所在的象限是由a_1和a_2的正负号来决定的，而不是由a_2/a_1的正负号来决定。例如，把复数$C = 7.42 - j9.397$写成极坐标形式时，它的幅角$\mathrm{tg}\varphi = (-9.397)/7.42$，$\varphi = -51.7°$，这是正确的。如果含混地写成$\mathrm{tg}\varphi = -(9.397/7.42)$，则$\varphi$角有两个可能值，即128.3°和−51.7°。显然128.3°不是复数$C = 7.42 - j9.397$的幅角。

例 有两个复数：(1) $-5.7 + j16.9$；(2) $50\angle 60°$。

试将(1)化为极坐标形式；(2)化为代数形式。

解 (1) 因为$a_1 = -5.7$，$a_2 = 16.9$

则其模 $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(-5.7)^2 + (16.9)^2} = 17.8$

幅角 $\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{a_2}{a_1} = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{16.9}{-5.7} = 108.64°$

所以 $-5.7 + j16.9 = 17.8\angle 108.64°$。

(2) 因为$a = 50$，$\varphi = 60°$

则 $a_1 = a\cos\varphi = 50\cos 60° = 25$

$a_2 = a\sin\varphi = 50\sin 60° = 43.3$

所以 $50\angle 60° = 25 + j43.3$

（3）复数的运算。从复数几种表示方法可以看出，当复数进行加、减运算时，用代数形式较方便，但进行乘（除）运算时，显然用指数形式或极坐标形式更为方便。

设复数$A = ae^{j\varphi_a} = a\angle\varphi_a$和$B = be^{j\varphi_b} = b\angle\varphi_b$

相乘时用指数形式有 $A\cdot B = ae^{j\varphi_a}be^{j\varphi_b} = abe^{j(\varphi_a + \varphi_b)}$

用极坐标形式则 $A\cdot B = a\angle\varphi_a b\angle\varphi_b = ab\angle\underline{\varphi_a + \varphi_b}$

相除时用指数形式 $\dfrac{A}{B} = \dfrac{ae^{j\varphi_a}}{be^{j\varphi_b}} = \dfrac{a}{b}e^{j\varphi_a}e^{(-j\varphi_b)} = \dfrac{a}{b}e^{j(\varphi_a - \varphi_b)}$

用极坐标形式 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a\angle\varphi_a}{b\angle\varphi_b}=\dfrac{a}{b}\angle\varphi_a-\varphi_b$

(4) 旋转因子的概念。一个模等于1，幅角为φ的复数$e^{j\varphi}=1\angle\varphi$和任意复数$A=ae^{j\varphi_a}$相乘，得$ae^{j(\varphi_a+\varphi)}$，可见其乘积等于把复数$A$逆时针旋转一个角度$\varphi$，同时$A$的模保持不变，所以$e^{j\varphi}$称为旋转因子。

根据尤拉公式$e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi$，当$\varphi=\pi/2$时，$e^{j\frac{\pi}{2}}=j$；当$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$时，$e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$；当$\varphi=\pi$时，$e^{j\pi}=-1$，故$\pm j$和$-1$也可看作旋转因子。显然当复数$A$乘以$j$，即$jA$，相当于

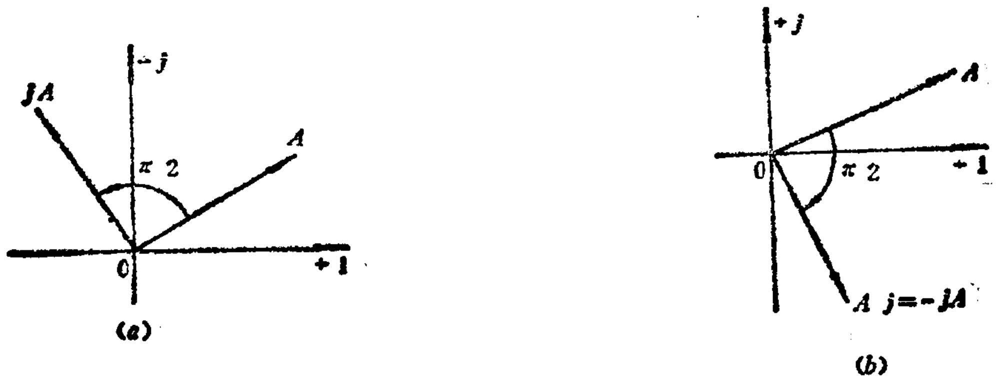

图 1-11

把A逆时针方向旋转$\pi/2(90°)$，如图1-11(a)。复数A除以j即A/j或$(-j)A$，相当于把A顺时针方向旋转$\pi/2$，如图1-11(b)。

2. 符号法(复数符号法)

符号法是用复数来表示正弦量的振幅（或有效值）和初相，使正弦量电路方程转化为复数形式的代数方程，在形式上与直流电路的方程类似，从而使正弦量电路的计算和分析大为简化。

(1) 正弦量可用相量表示。正弦量用相量表示，其几何意义相当于用旋转矢量来表示正弦时间函数。前面讲过旋转矢量的概念；现在在复数的基础上，再来看旋转矢量，即把实平面上用几何方式表示的旋转矢量放在复平面上来进行考虑。

a. 旋转矢量与复数的关系

设一复数$A=ae^{j\varphi_0}=a\angle\varphi_0$和另一复数$e^{j\omega t}=1\angle\omega t$（旋转因子）相乘，即

$$Ae^{j\omega t}=ae^{j\varphi_0}e^{j\omega t}=ae^{j(\omega t+\varphi_0)}=a\angle\omega t+\varphi_0 \tag{1-18}$$

从结果中可以看出，乘积仍为一个复数，模不变，幅角$(\omega t+\varphi_0)$随时间而变，相当于复数$A=ae^{j\varphi_0}$逆时针方向以角速度ω不断旋转。所以复数乘积$Ae^{j\omega t}$是一个旋转矢量。$A=ae^{j\varphi_0}$称为旋转矢量的复振幅。当$t=0$时，旋转矢量$Ae^{j\omega t}$在复平面上的位置对应于复振幅A（即$Ae^{j\omega\cdot 0}=A\cdot 1=A$），故任意复数$A$与旋转因子$e^{j\omega t}$的乘积就是旋转矢量。

b. 旋转矢量与正弦量的关系

旋转矢量$Ae^{j\omega t}=ae^{j\varphi_0}e^{j\omega t}=ae^{j(\omega t+\varphi_0)}$，如图1-12。在$t=0$时（即在计时开始时），旋转矢量和实轴的夹角$\varphi_0$在虚轴上的投影为$\overline{or}=a\sin\varphi_0$，其数值等于正弦量$a\sin(\omega t+\varphi_0)$在计时起点的值。在$t=t_1$时，矢量逆时针方向旋转了一个角度$\omega t_1$，它与实轴的夹角是$(\omega t_1+\varphi_0)$，在虚轴上的投影是$\overline{os}=a\sin(\omega t_1+\varphi_0)$，其数值等于$t_1$瞬间正弦量$a\sin(\omega t_1+\varphi_0)$的值，表明任一时刻正弦量的值等于旋转矢量在虚轴上的投影，所以旋转矢量是与一个

正弦时间函数相对应的。

若把式(1-18)写成三角函数形式，即

$$Ae^{j\omega t}=ae^{j(\omega t+\varphi_0)}=a\angle\underline{\omega t+\varphi_0}=a\cos(\omega t+\varphi_0)+ja\sin(\omega t+\varphi_0) \quad (1\text{-}19)$$

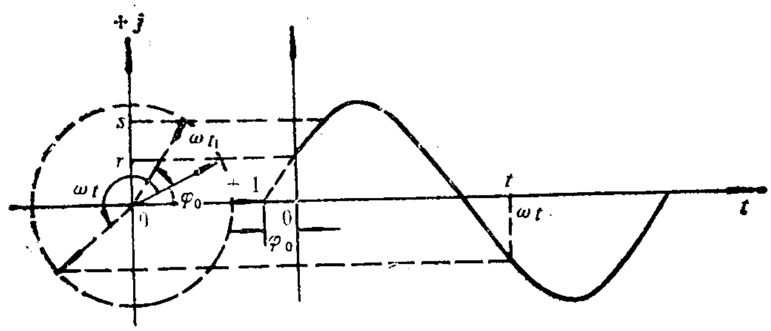

图 1-12

取旋转矢量$Ae^{j\omega t}$的虚部，就得一个正弦时间函数，故一个正弦时间函数可写成为

$$a\sin(\omega t+\varphi_0)=I_m[Ae^{j\omega t}] \quad (1\text{-}20)$$

式中，$I_m[\ ]$是表示“取复数的虚部”的意思。

式(1-20)表明，由复振幅$A=ae^{j\varphi_0}$可求它所表示的正弦时间函数，即将复振幅$A=ae^{j\varphi_0}$乘以旋转因子$e^{j\omega t}$得旋转矢量$Ae^{j\omega t}$，然后取旋转矢量的虚部即可。所以一个正弦时间函数可以用相应的复振幅来表示(但并不相等)。反之，已知复振幅，可写出与它相对应的正弦时间函数。

c. 相量

对应于某一正弦时间函数的复振幅A称为“相量”；记为“$\dot{A}$”，以与普通复数有所区别。相量在复平面上的几何表示，相应地称为相量图。相量是不旋转的。

按照上述方法，可以说：表示一个正弦量$I_m\sin(\omega t+\varphi_0)$的相量$\dot{I}_m$，其模是正弦量的振幅值$I_m$，其幅角是正弦量的初相角$\varphi_0$。反之，已知一个相量$\dot{I}_m=I_m\angle\varphi_0$，可直接写出它所表示的正弦量；正弦量的振幅值为相量$\dot{I}_m$的模，其初相角为相量的幅角（ω为已知）。

例 (a) 已知正弦电压$u_1=141\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$V，$u_2=70.5\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$V，求表示$u_1$和$u_2$的相量。

(b) 已知两个频率为50Hz的正弦电流，表示它们的相量分别为

$$\dot{I}_{1m}=10e^{j\pi/3}=10\angle\pi/3\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{2m}=3e^{-j\pi/6}=3\angle-\pi/6\ \text{A}$$

求电流的瞬时表达式。

解 (a) 表示u_1和u_2的相量分别为

$$\dot{U}_{1m}=141\angle\pi/3\quad \text{V}$$

$$\dot{U}_{2m}=70.5\angle-\pi/4\quad \text{V}$$

这些电压的相量如图1-13所示。u_1与u_2之间的相位差等于$\dot{U}_{1m}$和$\dot{U}_{2m}$的幅角差，即$\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7}{12}\pi$。相位差以及超前和滞后的关系，在相量图上容易看出。

(b) 由于$\dot{I}_{1m}=10e^{j\pi/3}$，则$i_1$的振幅是10，初相为$\pi/3$，角频率$\omega=2\pi f=2\times3.14\times50=314\text{rad/s}$。

因此 $$i_1=10\sin\left(314t+\frac{\pi}{3}\right)\ \text{A}$$

同理 $$i_2=3\sin\left(314t-\frac{\pi}{6}\right)\ \text{A}$$

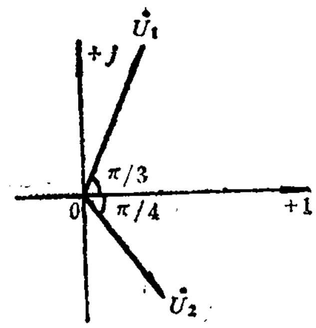

图 1-13

在实际工作中，我们通常用的是正弦量的有效值，而不是它的振幅。由于振幅与有效值之间有$\sqrt{2}$倍的关系，因此表示正弦量的相量可用有效值来定义，即用复数的模表示正弦量的有效值，用幅角表示正弦量的初位相就可。这种相量叫有效值相量。相对应前面所讲的振幅相量，如交流电流$i=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)$，其振幅相量为$\dot{I}_m=I_m\angle\varphi_i$；有效值相量为$\dot{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times I_m\angle\varphi_i=I\angle\varphi_i$。以后所讲相量非加说明则均为有效值相量。若已知$\dot{I}=I\angle\varphi_i$，欲求正弦电流的瞬时值，则只需把$\dot{I}$乘$\sqrt{2}$（变为幅值）再和时间因子$e^{j\omega t}$相乘即

$$\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}=\sqrt{2}I\angle\varphi_i e^{j\omega t}=I_m e^{j(\omega t+\varphi_i)}=I_m\underline{\angle\omega t+\varphi_i}$$
$$=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)+jI_m\sin(\omega t+\varphi_i) \qquad (1\text{-}21)$$

然后取上式的虚数部分即得正弦电流瞬时值。

例 有一正弦量$u_1=\sqrt{2}100\cos\omega t\text{V}$和一相量$\dot{U}_2=50\angle30°\text{V}$。试写出：(1) 正弦量$u_1$的相量；(2) 相量$\dot{U}_2$所表示的正弦量。

解 (1) 因为$u_1=\sqrt{2}\ 100\cos\omega t=\sqrt{2}\ 100\sin(\omega t+90°)$

故用相量表示为 $\dot{U}_1=100\angle90°\ \text{V}$

$$(2)\ \sqrt{2}\dot{U}_2e^{j\omega t}=\sqrt{2}\,50e^{j30°}e^{j\omega t}=\sqrt{2}\,50e^{j(\omega t+30°)}=\sqrt{2}\,50\cos(\omega t+30°)$$
$$+j\sqrt{2}\,50\sin(\omega t+30°)$$

取虚部，则 $u_2=\sqrt{2}\,50\sin(\omega t+30°)\text{V}$

这表明，相量可用来表示一个对应的正弦量。由于正弦量仅仅是所对应的相量与$\sqrt{2}e^{j\omega t}$乘积的虚部。所以用相量来表示正弦量时，正弦量可直接根据相量的幅值和幅角写出。

(2) 正弦量用相量表示后的运算

a. 正弦量相加（或相减）的运算

例 设有两个正弦电流

$$i_1=\sqrt{2}\,6\sin(\omega t+30°)\text{A}$$
$$i_2=\sqrt{2}\,4\sin(\omega t+60°)\text{A}$$

求它们的和 $$i=i_1+i_2$$

解 表示i_1和i_2的相量分别为

$$\dot{I}_1=6\angle30°\text{A}$$
$$\dot{I}_2=4\angle60°\text{A}$$

其和为 $$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=6\angle30°+4\angle60°=(5.19+j3)+(2+j3.46)$$
$$=7.19+j6.46=9.67\angle41.9°\ \text{A}$$