经济管理应用数学基础

微积分

梁书鹏　余信武　编

中国展望出版社

经济管理应用数学基础

微积分

中国展望出版社出版发行

(北京西城区太平桥大街4号)

湖北省新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　32开本　印张9.125　字数200千字

1988年10月北京第1版　1988年10月第1次印刷

印数 1—3500

ISBN 7—5050—0375—5/G·50　定价：4.20元

序

电子计算机的发明对过去无法及时算出的数学问题提供了有效的工具，从而大大扩充了数学应用的领域；数学方法成为研究自然科学、社会科学及其应用的必不可少的手段。在数学应用中，微积分学是重要基础，它也是经济数学的基础。本书是为职工、函授、业余和夜大学中经济、管理、金融、财会等经济类专业编写的数学教材。

对于初等数学来说，在微积分学中所引入的极限等等，在概念上是一个飞跃，因此初学者，特别是长期从事实际工作的同志比较难于接受。本书编者多年从事函授和职工业余的数学教学，对于帮助学员解决学习中的困难，积累了丰富经验。本书初步总结了这些宝贵的经验。

在本书中，除了注意有关学科的科学性、系统性外，编者对教材内容作了适当安排；把重点放在讲述基本理论、基本方法和应用上，删掉了一些次要的繁难内容；对于分散和突出难点作了不少工作；许多重要概念的讲述都有独到之处；定理的证明力求简明，许多地方都附上了直观图示。例题和习题不但涉及有关学科的基本知识和技能，而且还包含了相当数量的联系专业实际的问题。为了便于读者参考，对于必要的初等数学知识编写了提纲式的小结。

本书具有不少特点和优点；我们相信，它的出版将可与从事经济数学基础教学工作的同志们交流教学经验，推进有关课程的教学工作，从而为培养我国管理工作干部和经济工作人

员，为推进我国的四个现代化作出贡献。

余家荣　孙道椿

1988年6月于武汉

目　录

第一章 函　　数

函数是数学的一个重要概念，也是微积分研究的主要对象和基本概念。本章是在初等数学中已有函数概念的基础上，从常量和变量出发讨论函数，给出一般定义，叙述常见的函数，并结合图形说明一些简单的性质，和几个经济管理中常用的函数。

§1·1 函数

（一）常量与变量

在现实中的量，按照它们在研究过程中的取值情况，可以分成两类：即常量和变量。在研究过程中可取不同值的量叫做变量，只取同一值的量叫做常量。

在生产过程中，产品的产量及原材料消耗量是变量，而在一定时期内，企业的厂房面积，机器台数，在编职工人数等一般是常量。常量和变量只是相对于某个问题、某一场合或某一过程来说的，并不是绝对的。

如：存款日利率 Z，利息 S，对于存款 C 元，n 天后的利息是 $S=CZn$。其中 Z、C 是常量，S、n 是变量。

（二）函数的概念

上例中的变量 S，n 的变化是相关联的。"函数"就是描述变量间的某种相互关系的概念。

存款利息 S 随着天数 n 的变化而变化，就是对于每一个

天数 n 都有一个确定的利息 S 和它对应。 这样两个变量的关系称为函数关系。

定义：设有 x 与 y 两个变量， 如果当变量 x 在实数某范围内任意取定一个数值时， 变量 y 按照一定的规则总有一个(或几个)确定的数值与它对应，则变量 y 称为变量 x 的函数，变量 x 称为自变量。有时也称 y 为因变量。

x、y 的这种相依关系——函数关系一般记作 $y=f(x)$

若对于取定的自变量的数值，函数只有唯一确定的数值与它对应，这样的函数称为单值函数。如果取定的自变量的数值所确定的函数值不只一个，而是多个，则称为多值函数。以后我们研究的主要是单值函数。对于多值函数也采用限制的办法使它成为单值函数。

如上例中的 S、n 的关系可写成 $S=f(n)$ 其中对应规则 f 就表示 S 是 n 的CZ 倍。

同样若 $y=2x+1$ 表示成 $y=f(x)$ 则 f 就表示 y 是 x 的 2 倍加 1 。即

$$y=f(\quad)=2(\quad)+1$$

以后凡是提到 $f(x)$ 就表示一个符合以上定义的 x 的函数。在同一研究过程中，为了避免混淆；对于不同的函数关系也可以表示成 $y=g(x)$， $y=u(x)$ 等等。

例 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2}$

求 $f[\varphi(x)]$ 及 $\varphi[f(x)]$

解 $f[\varphi(x)]=f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$\varphi[f(x)]=\varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2}}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{2}$$

自变量与自变量的函数不是绝对的，它决定于具体的研究过程．例如存款的天数定了利息也就确定了，S、n 的关系如上；S 是 n 的函数；反之若定下了利息(如须获利多少)也就确定了相应的存款天数；这个过程正好颠倒了 S、n 的关系，n 是 S 的函数，而利息 S 是自变量。

当自变量 x 确定为 x_0 时，对应的函数值可记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 如 $n=n_0$ 时 $S=f(n_0)$ 或 $S|_{n=n_0}$

当 $n=100$ 时 $S=f(100)$ 或 $S|_{n=100}$

例如：$y=2x+1$，当 x 为 0，1 时的函数值

$$f(0)=2\times0+1=1$$

$$f(1)=2\times1+1=3$$

定义中的 x 在某实数范围内的“实数范围”是函数的定义域。也就是自变量的变化范围。如计算利息的函数 $S=f(n)$ 的定义域是正整数。对于一般函数 $y=f(x)$，如果没有指明变量的具体意义。函数的定义域是使函数有意义的自变量的变化范围。如 $y=2x+1$ 的定义域是一切实数。

例如：设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 它的定义域是

$$\begin{cases}x+1\geqslant0\\x-1\neq0\end{cases}\text{的解，即}\begin{cases}x\geqslant-1\\x\neq1\end{cases}$$

$f(x)$ 的定义域是不小于 -1 且不等于 1 的一切实数。

函数定义域常用区间表示，区间有开区间 $(a,\ b)$，闭区间 $[a,\ b]$ 和半开区间 $[a,\ b)$ 或 $(a,\ b]$。

说 $f(x)$ 的定义域是开区间 $(a,\ b)$ 是指满足不等式 $a<x<b$ 的一切 x 的值，$f(x)$ 都有确定的数值，注意这时 x 的取值不

包含 a 和 b。闭区间$[a, b]$则包含 a, b 在内，即可以取 $x=a$, $x=b$; 半开区间$[a, b)$和$(a, b]$分别指不等式 $a\leqslant x<0$, $\dot{a}<x\leqslant 0$。

上例 $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 的定义域可表示成

$-1\leqslant x<1$ 或 $1<x$，也可表示成 x 属于$[-1, 1)$ 或 $(1, +\infty)$，$+\infty$念作正无穷大。

函数 y 的变化范围称为函数的值域，一般确定了函数定义域和对应规律后，函数值域也就确定了。

(三)经济活动中常用的函数关系

1. 正比关系

定义：如果一个变量增加(或减少)到若干倍，另外一个变量也增加(或减少)到同样倍数，则这两个量称为成正比的量。

企业的收益 R 与产量 x 的关系就是正比关系，$R=px$，p 是产品价格。

一般设变量 x 与 y 成正比，就是说 y 与 x 有函数关系 $y=kx$，其中常量 k 称为比例系数。

2. 线性关系

定义：如果两个变量 x 与 y 满足

$$y=kx+b$$

其中 k 与 b 是常量，则称 x 与 y 的关系为线性关系。(或 y 是 x 的一次函数)。

如企业总成本 C 有固定成本 M 和可变成本 V，若可变成本 V 与产量 x 有正比关系，则成本 $C=M+V=M+kx$，即 C 与 x 有线性关系。

3. 反比关系

定义：如果一个变量增加(或减少)到若干倍，另外一个变

量却减少(或增加)到同样倍数，则这两个量称为成反比的量。

一个长方形的长为 y 宽为 x，它的面积 S 是常量，那么 $y=\frac{S}{x}$，这时 x 与 y 是反比关系。

又如商场每年出售某种商品 a 件为常量，该种商品分 x 批进货，每批进货 y 件，则 x 与 y 有关系 $y=\frac{a}{x}$ 是成反比的量。

4. 二次函数

定义：如果变量 x 与 y 满足关系

$$y=ax^2+bx+c$$

其中 a、b、c 为常数且 $a\neq 0$，则称 y 是 x 的二次函数。

某些商品的供给量 x 与该商品的价格 p 的函数关系（即供给函数）呈 $x=ap^2+bp+c$

5. 指数函数

定义：如果变量 x 与 y 满足关系

$$y=a^x \qquad a>0 \text{ 且 } a\neq 1$$

则 y 是 x 的指数函数。a 是底数、x 是指数。

经济和人口的持续增长与时间的关系常是指数函数。

关于现值和贴现率

从经济学的角度出发， 现在收到 100 元钱和 10 年后收到 100 元钱的实际价值上是不同的。如果现在收到 100 元钱， 则可以把这笔钱存入银行，银行将支付利息，十年后的本利将超过 100 元钱，或者可以把这笔钱投资于再生产，则就将收到更多的利润。所以，在经济学中，资金的实际价值是随时间而变化的。如果资金的现在价值是 Q，在 n 年后它的值 P 将变成

$$P=Q(1+r)^n$$

其中 r 为年利率。 反之， n 年后的资金值 P 相当于现 在

的资金值 Q：

$$Q=P(1+r)^{-n}$$

称 Q 是将来的资金值 P 的现值。 在计算现值时，需要考虑今后若干年的利率 r，由于利率是经常改变的， 为了计算就必须假定今后若干年内的平均利率。这一假定的利率称为贴现率。

例 1 如贴现率为10%，10年后能收回的利润 1 亿元现值是多少？

解 $P=1$亿元 $r=10\%$ $n=10$

代入公式(2)得：

$$Q=1\times(1+10\%)^{-10}=1.1^{-10}=0.3855(\text{亿元})$$

即以贴现率10%计算，十年后的 1 亿元现值是3855万元。

例 2 某项建设国家投资 15 亿元，五年后回收资金 20 亿元，如考虑10%的贴现率，此企业的利润是多少？

解 五年后的20亿元的现值是

$$Q=20(1+10\%)^{-5}=12.42(\text{亿元})$$

现在投资15亿元，利润是

$$12.42-15=-2.58(\text{亿元})$$

即尚亏本 2.58 亿元

例 3 一幢房子如即售出可得10万元，或者可以用 5 年的时间进行装修然后以30万元的价格售出。装修需花费10万元，这笔费用可在第三年底支付。银行可以以12%的年复利借给这笔费用，而在卖出房子后收回本利，假设贴现率是10%，问房主选择哪一个方案有利？

解 第一方案收到的现值是10万元，第二方案五年后收到的30万元中，首先要扣除银行贷款本息：

$$10(1+12\%)^2=10\times1.12^2=12.544\ (\text{万元})$$

所以五年后的实际收入是

$$30-12.544=17.456\quad(\text{万元})$$

把这个值折合成现值：

$$17.456(1+10\%)^{-5}=10.8388(\text{万元})$$

即第二方案相当于现在立即收到10.8388（万元），比第一方案多收8388元，故第二方案较有利。

（四）函数表示法

函数关系是很广泛的，它可以由量的实际测量、数学方程式、计算机的输入输出或数值对应表，文字叙述等等给出，因而函数关系可以用各种方式表达。最常用的有图示法，表格法和解析（分析）法。它们各有优缺点，在实际工作中又常常把它们结合起来运用。

解析法：用数学方程式表示变量的函数关系。

如 $y=2x+1$，$c=2\pi r$，$s=\pi r^2$ 就是用解析法表示的自变量与函数的关系。

但不要以为 $y=f(x)$ 就是一个数学式子。如常见的 $y=|x|=\begin{cases}x & \text{当}x\geq0\\-x & \text{当}x<0\end{cases}$；$y=[x]$ 表示取 x 的整数部分，$[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$，$[\pi]=3$；还有符号函数

$$y=Sgnx=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\text{；等等。}\\-1 & x<0\end{cases}$$

都是符合函数定义的函数解析表达式。它对于每一确定的自变量能准确地计算出对应的函数值。表现形式简单；但也有计算繁难的缺点。

表格法：将一系列自变量值与对应的函数值列成表格；如对数表，三角函数表以及一些实测数据的罗列对照成表。表1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7

它的优点是使用方便；可是总要受篇幅限制，不可能那样全面。

图示法：在坐标系下用曲线表示函数关系，其优点是直观明显，易于研究函数的性质。缺点是不够准确。

一般来说已知函数的解析表达式，若要作出图形，须先列表，把点描在坐标系上，再连接成平滑的曲线。

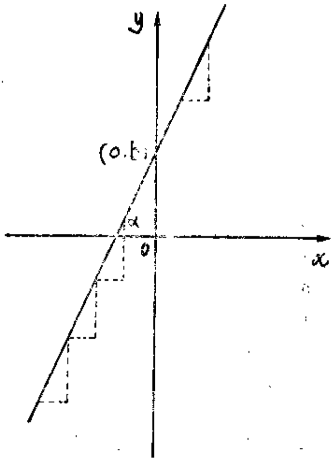

图 1·1

如一次函数 $y=kx+b$，当 x 增加一个单位时 y 增加 k 个单位，它的图形（图 1.1）总是一条直线，其中 k 为直线的斜率，$k=\mathrm{tg}\alpha$，α 是直线与 x 轴正向的夹角。

当 $k=2$，$b=1$ 时，将表 1 所列的点连结起来就是直线 $y=2x+1$。

当 $b=0$ 时，一次函数为 $y=kx$，就是正比例函数；表示正

比例函数的直线经过原点。

如 $y=x$，$y=3x$，$y=-2x$ 的图形。图1.2

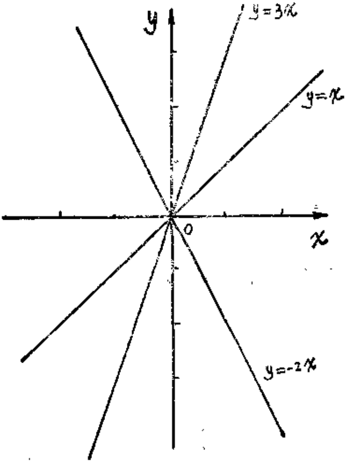

图 1·2

反比例函数，$y=\frac{k}{x}$它的图形是双曲线。　图 1.3

二次函数当 $a=1$，$b=c=0$ 时为 $y=x^2$，列表

x	…	-2	-1.5	-1	0	$+1$	1.5	2	…
y	…	4	2.25	1	0	1	2.25	4	…

描点、作用：

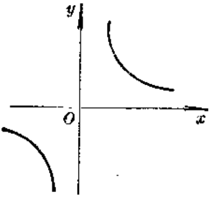

图 1·3

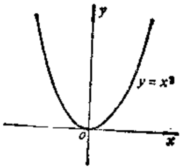

图 1·4

它的图形是抛物线很,明显它的变化比起线性函数要复杂一些。

当 b，c 不为零时，图形如下。

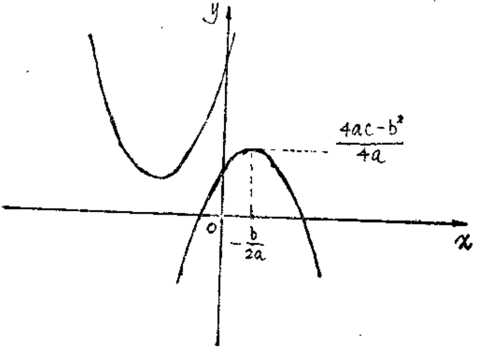

图 1·5