线性代数

● 主　编:聂高辉
● 副主编:邹尚荣　邹玉仁　傅会平

江西科学技术出版社

线 性 代 数

聂高辉等编

江西科学技术出版社出版发行

（南昌市新魏路）

各地新华书店经销　南昌市红十字会印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 8.375　字数 23 万

1995 年 9 月第 1 版　1995 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2，

ISBN7－5390－0935－7/G・117　定价：8.80 元

（江西科技版图书凡属印刷、装订错误，请随时向承印厂调换）

前　言

本书是按照国家教委颁布的高等财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲、根据函授专科升本科的学习特点，集作者们多年函授和本科教学的经验和体会编写而成的。本书的特点是通俗易懂、难点浅说、重点突出，在不失线性代数理论体系的前提下，充分考虑经济管理后续课程的必需，加入了经济类应用性例题和习题，以便读者理解和运用。

本书注重“三基”训练，为使读者更好地理解和掌握书中的基本原理和方法，每章备有练习、习题和自测题，书后附有练习、习题和自测题的答案或提示，书中带“*”号的内容为选讲内容。

本书第一章由邹玉仁编写，第二章由邹尚荣编写，第三章由傅会平编写，第四、五章由聂高辉编写。聂高辉任主编，邹尚荣、邹玉仁、傅会平任副主编。

本书的完成得到余仲弓副教授以及江西财经学院信息系领导和同仁们的大力支持和帮助，谨致衷心感谢。

编　者

1994 年 2 月

目　录

第一章　行列式

行列式是线性代数的重要组成部分，是解线性方程组的基本工具，掌握了用 n 阶行列式解线性方程组的克莱姆法则，就能更好地理解第四章中解一般线性方程组的初等变换法。

§1.1　排列与逆序

为了介绍 n 阶行列式定义，先学习排列与逆序的知识。

定义 1.1　用自然数 $1,2,\cdots n$ 共 n 个数组成的任一无重复有序数组，称为一个 n 级排列。记：$i_1i_2\cdots i_n$ 或 $j_1j_2\cdots j_n$

例如　123，231，为两个三级排列，42513 为五级排列，5713426 为七级排列。

根据中学学过的排列知识有由 $1,2,\cdots,n$ 组成的全部不同的 n 级排列共有 $C_n^1C_{n-1}^1\cdots C_1^1=n!$ 个。

例如　全部不同的的三级排列有 $3!=6$ 个，它们是

123，132，213，231，312，321

在这六个排列中只有 123 是按从小到大的自然顺序排列成的。

称 n 级排列 $123\cdots n$ 为自然排列，而其余 n 级排列中，如果有一个较大的数排在一个较小的数前面，这两个数就构成了一个逆序。

定义 1.2　在某一 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若有一较大的数排在一较小的数前面，就称这两个数构成一个逆序。n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总个数，称为这个 n 级排列的逆序数。记 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$

例如　2413 为一个四级排列，从个位看起，

3前面比3大的数只有4，产生一个逆序；

拾位数1前面比1大的数有4，2，产生2个逆序；

百位数4前面没有比4大的数，不产生逆序；

2排在首位，不产生逆序。

所以 $$\tau(2413)=1+2+0+0=3$$

仿此方法，可计算任一排列的逆序数。

例如

$\tau(51423)=2+2+1+1+0=6$

$\tau(136425)=1+3+1=5$

定义 1.3 若 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数，则称 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列。若 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数，则称 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列。

51423 为偶排列，136425 为奇排列。

定义 1.4 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，仅交换两个数 i_t 与 i_s 后得到另一 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 这种变换称为对换。

例如 51423 对换 1，4 得 54123 且 $\tau(54123)=7$，偶排列变成了奇排列。

136425 对换 3，5 得 156423 且 $\tau(156423)=8$ 奇排列变成了偶排列。

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性

证明分两步完成：

a)假设只对换相邻两数，设排列为

$$\cdots jk\cdots \tag{1}$$

对换 j,k 两数，排列变成了

$$\cdots kj\cdots \tag{2}$$

这里"…"表示排列中位置未改变的数，显然数 k,j 与其它数构成的逆序不变，不同的是 j 与 k 的逆序。不妨假设 $j>k$，经过对换，逆序减少一个，这样排列的逆序数的奇偶性就改变了。

b)对换排列中任意两个数。不妨设排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \tag{3}$$

对换 j,k 两数后排列变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \tag{4}$$

对换 j,k 两数，可看成把排列(3)中的 k 逐次与 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 对换，经过 s 次相邻对换得排列

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots \tag{5}$$

再把排列(5)中的数 j 逐次与 $k,i_s,\cdots,i_1$ 对换，经过 $s+1$ 次相邻对换得排列(4)，所以对换 j,k 两数可以通过 $2s+1$ 次相邻对换来实现，$2s+1$ 为奇数，奇数次相邻对换改变排列的奇偶性。即对换 j,k 两数改变了排列的奇偶性。

综合 a)，b)知，定理成立。　　证毕

定理 1.2　当 $n\geqslant 2$ 时，所有的 n 级排列中奇偶排列各占一半，都是$\frac{n!}{2}$个。

证　设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列共有 P 个，偶排列共有 Q 个。

对这 P 个奇排列施以一次对换，就得到 P 个偶排列，由于偶排列共有 Q 个，所以 $P\leqslant Q$。同理 $Q\leqslant P$。所以 $Q=P$，而 $P+Q=n!$

推得　$P=Q=\frac{n!}{2}$　　证毕

例如　三级排列共有 6 个，其中 123，231，312 是偶排列，132，213，321 是奇排列。

练习 1.1

1. 求下列排列的逆序数

(1)365412

(2)518324967

(3)$12\cdots n$

(4) $n(n-1)\cdots 1$

2. 求 i,j 使①$25i4j1$ 为奇排列;②$8i351j27$ 为偶排列

3. 若 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 K,则排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数为多少?

§1.2 二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法求解,方程(1)×a_{22}—方程(2)×a_{12}得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

方程(2)×a_{11}—方程(1)×a_{21}得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

所以　当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 方程组(1.1)的解为:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

这就是二元线性方程组(1.1)的求解公式,记忆很不方便。为解决这一问题我们引入二阶行列式。令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式，a_{11}，a_{12}构成第一行，a_{21}，a_{22}构成第二行，字母下标的第一个数表示行标，第二个数表示列标。$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为二阶行列式的展开式，其实质是一个数。展开式中的两项可用“对角线法则”来记忆(如图 1－1)。实线连结的两个元素的乘积取正号，虚线连结的两个元素的乘积取负号。

$$\overset{+}{}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1－1

这样，当 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解记为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

其中 D 称为方程组(1.1)的系数行列式。而 D_1，D_2 分别为：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

D_1 是用方程组(1.1)中的常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}而得，用方程组(1.1)中的常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}就得到了 D_2。

【例 1】　解线性方程组

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 2x-y=5 \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\times(-1)-2\times 2=-5\neq 0$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}10 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}=10\times(-1)-2\times 5=-20$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 10\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\times 5-2\times 10=-15$$

所以方程组的解为：$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=4 \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=3 \end{cases}$

二、三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

用消元法求解可得：

当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}$$

上式就是三元线性方程组的求解公式，为方便记忆，引入下列符号。

令 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式。其值为一个数。它的展开式 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$ 中的 6 项可按“对角线法则”来记忆。(如图 1—2) 实线上三个元素相乘取正号，虚线上的三个元素相乘取负号。

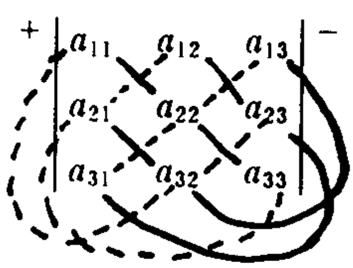

图 1—2

所以 当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.2)的解可记为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1.2)的系数行列式。它是由方程组(1.2)未知数的系

数按原来位置排成的。且

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

D_1,D_2,D_3 是用方程组(1.2)中的常数项 b_1,b_2,b_3 分别代替 D 中 x_1，x_2,x_3 的系数所构成的行列式。

【例 2】 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\times1\times1+(-4)\times5\times1+1\times(-3)\times(-1)-1\times1\times1-(-4)\times(-3)\times1-2\times5\times(-1)=-18\neq0$$

而 $$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-36$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-18$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-18$$

所以方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=2 \\ x_2\ \dfrac{D_2}{D}=1 \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=1 \end{cases}$$

通过解二元、三元线性方程组，我们知道了行列式的来源。二阶三阶行列式都可用对角线法则来展开。利用二阶、三阶行列式解线性方程组(1.1)(1.2)是很方便的，并且有它们的公式解。

练习 1.2

计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 17 & 51 \\ 24 & 72 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ c & a & b \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

§1.3 n阶行列式

上一节通过解二元，三元线性方程组引入了二阶，三阶行列式。本节主要是定义 n 阶行列式。为此，我们分析三阶行列式展开式的结构。

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

其展开式有如下规律：

a)展开式中每一项都是来自不同行不同列的三个元素的乘积，每一项的行标都按自然顺序 123 排列，列标取全部三级排列中的一个，三级排列共 6 种，所以展开式中共有 $3!=6$ 项。

b)当行标按自然顺序排列时，每一项的符号由列标排列的奇偶性来决定，偶排列为正，奇排列为负。展开式中的一般项可表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1j_2j_3$ 是三级排列中的一个。当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为偶数对应的项取正号，$\tau(j_1j_2j_3)$ 为奇数对应的项取负号，且正负项各占一半。

所以

$$D=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$\sum$ 表示对所有三级排列求和。

读者可验证，二阶行列式也有上述规律。把三阶行列式加以推广，我们就可以定义 n 阶行列式。

定义 1.5 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。它表示一个数。把横排称为行，纵排称为列，a_{ij}是位于第 i 行第 j 列上的元素，它的展开式为

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

通常用记号 D，D_n 或 $|a_{ij}|$ 表示 n 阶行列式。

即 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

n 阶行列式展开规律为

a)$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$为来自不同行不同列的 n 个元素的乘积，行标按自然顺序排列时，列标取任一 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$。展开式为 $n!$ 项之和。

b)展开式中正负项各为一半，每一项的符号由 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$来决定。当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为偶数时对应的项取正号，当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为奇数时对应的项取负号。

特殊地，一阶行列式 $|a_n|=a_n$

由定义知，若行列式 D 中有一行(列)元素全为零，则 $D=0$

【例 1】 计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ii}\neq 0 \quad i=1,2\cdots n)$$

元素 a_{11}，$a_{22}\cdots a_{nn}$所在的对角线称为主对角线，我们称 D 这样的行