格论

（格的代数理论）

〔日〕中山 正 著

〔附：代数系的理论——正田建次郎著〕

董克誠 譯

上海科学技术出版社

格　　论

（格的代数理论）

〔日〕中山　正　著

〔附：代数系的理论——正田建次郎著〕

董克誠　譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

日本岩波书店出版的“現代数学丛书”中有《格論》I,II 两册,本书是《格論》I 的中譯本. 闡述了格論的基本內容. 全书計有半序集,格;模格;有补模格;分配格;Boole 格;格群等六章及附录——代数系的理論. 叙述全面、簡练、扼要,适宜于高等院校数学系学生作为学习格論入門的书籍,或供教师参考.

東　　論

(東ノ代數的理論)

中山　正　著

〔附: 代數系ノ理論——正田建次郎著〕

格　　论

(格的代数理论)

〔附: 代数系的理论〕

董克誠 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海大东集成联合印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 4 24/32　排版字数 115,000

1964 年 11 月第 1 版　1964 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—5,500

統一书号 13119·614　定价 (科六) 0.75 元

譯 者 序

日本岩波书店出版的"現代数学丛书"中有《格論》I, II 两册，本书是中山(Nakayama) 正(T.)教授撰写的《格論》I. 著者是日本目前有名的代数学者.

格論来源于数論、代数学、几何、邏輯等領域，并逐步发展为一門独立的代数理論. 近代的格論大体形成于 1935 年左右. 其应用之广，影响之深，虽不似群論，但它在代数学、賦值論、近代解析几何、半序空間等方面，均已起着重要的作用，已成为值得重視的一个代数分支. 近代有关格論方面的文献不少，但如本书以較少的篇幅，作这样全面、扼要、簡练的叙述，还属少見.

1951 年，譯者在业师楊宗磐教授指导下学习时就想把本书譯出，直至 1962 年为了河北大学几位同志的学习才完成翻譯工作. 在后来的修訂过程中，又添加了一些注解. 为了不影响讀者的独立思考，仅擇对初学者較感困难的內容作些提示，供讀者参考. 原书注号用阴文(如 ❶)，注釋文字就排在該頁末. 譯者注号用阳文(如 ①)，注釋文字列在每章之后. 对本书的翻譯、注解工作，虽一再斟酌修訂，但限于譯者水平，錯誤之处一定不少，希望讀者不吝指正.

摯友張庆芳副教授早于十年前即关怀譯者学习此书. 譯文脫稿后，河北大学張源、魏鴻敏两同志又提出了不少宝貴意見，业师楊宗磐教授校閱，譯者在此一并致謝.

董克誠 識

一九六三年夏

序

这本小册子概述了一些格論的代数事項．虽然仅是格論的初等部分，但希望可用作格論的入門书，或作为閱讀《格論》II* 的准备．叙述时一般遵照已有的方法，只不过試作了一些簡明化．第六章的一部分及其他一些地方談到了最近的某些成果，此外，某些地方多少也花了一些心思．这些如能得到讀者指正，則感幸甚．

格对于数学其他分支的联系及应用是非常重要的，这一点从格的概念出現于数学各个方面可以看得很清楚，“格以及格运算”的意义，不引証个别的例，一般也是可以理解的．因此，笔者认为，可以与群、环等代数系一样，不妨以格本身作为研究对象，而实际上格論也成长到足以当作研究对象的程度了．按这个想法，本书中不拟多談应用，当然，絲毫沒有輕視格与其他分支联系的意思．

在代数学，特别是在对代数系的应用方面，与其对个别的代数系，不如論述对于一般代数系的意义；这也正如业师正田 (Shoda) 教授近来采取的一般代数系时所考慮的观点．正田教授答应了笔者的請求，讲解了先生最近在这方面工作的一部分，这是笔者最感荣幸的，特此对正田教授致以深厚謝意．畏友岩村 (Iwamura) 联 (T.) 氏，閱讀了校样，提供了許多有益的注意，謹此致謝．

从脫稿到出版，花費了很长的时間，自己感觉不滿意的地方越来越多．另一方面，这一段时間里的一些新結果有的未能討論到，

* 原书是日本岩波书店出版的“現代数学丛书”的一种，該丛书中尙有小笠原 (Oyasawara) 藤次郎 (T.) 著的《格論》II．——譯者注

只能添些脚注，权当补充，这一切都希望讀者見諒.

中山 正

1944 年 2 月

对格論的一般参考书有以下几种：

G. Köthe, Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie, Jahr. D. M.-V., 47 (1937);

H. Hermes-G. Köthe, Theorie der Verbände, Enzykl. d. Math. Wiss. I_1, 13 (1939);

G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloquim Publ. Vol. 25 (1940);

彌永(Iyanaga)昌吉(S.)，束ノ理論，科學 11 (昭和 16 年).

写这本小册子的时候，参考了以上这些书，特别是参考 Birkhoff 一书的地方較多. 这些书籍，尤其是第二第三两本，文献甚詳，可資檢索，故本书不予再录. 在这些参考书之后的文献，只能限于在手边的，所以仅引用了我国人最近著作的一部分.

目　录

第一章 半序集，格

§1. 半序集，格

在某个集 X 的两元之間，定义了一个关系，不妨以符号 $\geqslant$ 表示，若滿足条件

(1.α)　　对于 X 的所有元 a，皆 $a\geqslant a$（自反律）；

(1.β)　　若 $a\geqslant b$ 且 $b\geqslant a$，則 $a=b$（反对称律）；

(1.γ)　　若 $a\geqslant b$ 且 $b\geqslant c$，則 $a\geqslant c$（傳递律），

則称此关系 $\geqslant$ 为**(半)序**，X 为定义了(半)序的集，或簡称**(半)序集**. $a\geqslant b$ 又可写成 $b\leqslant a$，而 $a\geqslant b$ 且 $a\neq b$ 时，写成 $a>b$（或 $b<a$）. 这个关系，是把数学各分支里那些用“大小”或“包含”等語言表示的关系公理化而得到的. 于是，凭借这种語言，$a\geqslant b$，$a>b$ 可称为 a 包含 b，a 比 b 大. 但迄今并未要求对于任意的两元 a，b，总是 $a\geqslant b$，$b\geqslant a$ 中至少有一成立[1]. 特别，若此条件成立，則称此(半)序为**全序**[2].

滿足上述三条件中第二个以外的条件(1.α)，(1.γ)的关系 $\geqslant$ 称为**拟序**. 在有拟序的集里，若考虑两元間这样的关系：$a\geqslant b$ 且 $b\geqslant a$，則給出一个等价关系[3]. 当 $a\geqslant b$ 时，定义(a 的类) $\geqslant$ (b 的类)，則在由此等价关系作成的类的集里，得到一个半序，称此为“从拟序集按等价而得的半序集”.

---

[1] 按此意义定义了的序，多称为子序或半序等.

[2] 也叫作綫性次序. 也有象上注那样，把所述之序，叫作子(或半)序，而把这里的全序簡称为序.

[3] 自反律，对称律，傳递律.

与两元 a, b 間的上述关系 $a\geqslant b$ 同时，a 与 b 間的关系 $a\leqslant b$ 也满足上述三条件，因之也是一个半序．称此为第一个半序的**对偶的半序**．于是，一般地，关于半序的概念里，将所有的 $\geqslant$ 都换成 $\leqslant$ 而得的概念称为前者的**对偶**．

半序集的子集对于原来的半序是半序集．

設 Y 为半序集 X 的子集（包括空集），a 为 X 的元，当 $y\in Y$ 时总有 $y\leqslant a$，則称 a 为 Y 的**上界**．X 本身若有上界，則只有一个，叫作 X 的**最大元**．适合 $a<x$ 的 $x\in X$ 不存在时，称 X 的元 a 为 X 的**极大元**❶．下界，最小元，极小元乃是这些概念的对偶概念．子集 Y 的上界的集若有最小元，則称之为 Y 的**上确界**．下确界为它的对偶概念．Y 的上确界，下确界（若存在）以 $\sup Y$, $\inf Y$ 表之．設 Y 为 X 的一些子集 Y_σ 的并集，若对于所有的 σ, $\sup Y_\sigma$ 存在，且 $\sup\{\sup Y_\sigma\}$ 存在，則后者就是 $\sup Y$①．关于下确界也是同样的：

$$\sup\{\sup Y_\sigma\}=\sup Y,\ \inf\{\inf Y_\sigma\}=\inf Y\ \text{（結合律）}.$$

至少对于 Y 的一个元 y，适合 $y\leqslant x$ 的、X 之元 x 的全体，称为 Y 的**上閉包**．与自己的上閉包一致的子集称为**閉于上**．集 Y 的上閉包为含 Y 的、最小閉于上的集②．下閉包，閉于下的子集可以对偶地定义．Y 閉于上与其补集 $X-Y$ 閉于下等价③．

对于半序集 L 的任两元，恒存在上确界及下确界时，称 L 为**格**．a, b 的上确界，下确界分別以 $a\cup b$, $a\cap b$ 表之，依次叫作 a, b 的**并**及**交**．

格可以不用半序而直接用两元間代数运算的交及并来定义．即对于一个集 L 的两元 a, b，若在 L 中总有用 $a\cup b$, $a\cap b$ 表示的、适合条件

(2.α) $a\cup b=b\cup a,\quad a\cap b=b\cap a$ （可换律）;

(2.β) $a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c,\ a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c$ （結合律）;

❶ 这个“极大”又多称为“最大”，然而为了区别清楚，使用“极大”这个名称較好．

$$(2.\gamma)\qquad a\cup(a\cap b)=a,\quad a\cap(a\cup b)=a \qquad \text{(吸收律)}$$

的元存在，则称 L 为格❶❷. 在 $(2.\gamma)$ 的第一式里，若把 b 换成 $a\cup b$ 并参照第二式(再取它的对偶)，则得到下述关系：

$$(2.\delta)\qquad a\cup a=a,\quad a\cap a=a \qquad \text{(幂等律)}.$$

起初定义的格，显然也适合这个定义中的条件. 反之，設 L 为第二种定义的格，当 $a\cup b=a$ (从 α), γ) 知道这与 $a\cap b=b$ 等价) 时，定义 $a\geqslant b$，于是得到一个半序，实际上，$\cup$，$\cap$ 关于此半序就表示上、下确界④.

从定义可知，格的对偶仍然是格，即格的概念是自对偶的. 一般地，若某一个关于自对偶概念的命题成立，则把它的 $\geqslant$ 都换成 $\leqslant$ 时命题也成立. 特别地，关于格是如此(格論里的对偶性). 再者，格里的对偶說成可以互换 $\cup$，$\cap$ 也行.

格的极大(小)元，总是它的最大(小)元⑤. 格里若有这样的最大(小)元，则称它为这个格的**单位**(**零**)，通常以 $\mathrm{I}(0)$ 表之.

§2. 备　格

格的两元，因之它的非空有穷子集，总有上确界及下确界. 若不限于有穷子集，而其任意非空子集总有上确界及下确界的，则称此半序集为**备格**. 于是，如果某半序集 L 的任意子集总有上确界，则 L 是备格❸. 盖下界的集的上确界乃是原集的下确界⑥.

备格的重要的例子，有所謂閉集的集.

設关于某一集 S，它的子集 X 总有第二个子集 $\bar{X}$ 与之对应，而且条件

---

❶ 从結合律知道，可以不限于两个，一般地，称有穷个元的并(交)，写成 $a_1\cup a_2\cup\cdots\cup a_n$ $(a_1\cap a_2\cap\cdots\cap a_n)$.

❷ 或者，假定 α), β)，并把 γ) 代以稍弱的条件"γ') 若 $a\cup b=b$，则 $a\cap b=a$ 及其对偶"更假定 δ) 的一半也行. 參看 F. Klein, Math. Ann. 105, 106 及小林(Kobayasi)，學士院紀事. 第19卷.

❸ 特别地，作为空集的上确界，L 有最小元，当然也有最大元.

(3.α) $\overline{X}\supseteqq X$;

(3.β) $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$;

(3.γ) 若 $X\supseteqq Y$，则 $\overline{X}\supseteqq\overline{Y}$

成立，则称这个对应 $X\to\overline{X}$ 給出了一个**閉运算**[1]．特别地，适合 $\overline{X}=X$ 的 X，称为关于这个閉运算的**閉集**．S 本身是閉集，任意个（有穷或无穷的）閉集之交集仍然是閉集[7]．因之，由前述定理（之对偶）知道，閉集之全体以集的包含关系为半序（以交集为下确界）[2]而构成备格[3][8]．

特别地，任給两集 S，S'，考虑定义在 S 的元与 S' 的元之間的某个关系 ρ．S，S' 的元 x，y 有关系 ρ 时，以 $x(\rho)y$ 表之．今考虑 S 的子集 X．对于 X 的所有元 x，滿足 $x(\rho)y$ 的、S' 的元全体，以 X' 表之；再者，对于 S' 的子集 Y，同样地使 S 的子集 Y^* 与之对应．于是

(4.α) 若 S 的两个子集 X，X_1 滿足 $X\supseteqq X_1$，則在 S' 里有 $X'\subseteqq X_1'$．

(4.β) 对于 S 的任意子集 X，$X\subseteqq(X')^*$ 成立，因之还有

(4.γ) $((X')^*)'=X'$

成立（对于 S' 的子集，把“′”与“＊”互换也同样成立[9]）．特别地，

$$(((X')^*)')^*=(X')^*.$$

若把 $(X')^*$ 以 $\overline{X}$ 表之，則在 S 里給出了滿足上述条件 (3.α, β, γ) 的一个閉运算．故在 S 里，滿足

$$\overline{X}(=(X')^*)=X$$

的子集的全体构成备格．同样地，S' 的閉子集，即适合 $(Y^*)'=Y$ 的 Y 的全体，构成备格．并且根据一一对应 $X\to X'$，$Y\to Y^*$，相对应之元的半序在两备格里反向（即在后面叙述的意义下，两格互为对偶同构）．

設 L 为任意的半序集．令上述的 S，S' 同时为 L，且把 $x\leqslant y$ 取为上述的 $x(\rho)y$，則对于 L 的子集 X，集 X'，X^* 分別是它的上界的集及下界的集．于是，这种情形下的閉集，即适合

$$(X')^*=X$$

[1] 例如，拓扑空間里的閉包．

[2] 当然，上确界与并集一般不一致．

[3] 近时把这样的閉运算也抽象化，有离开集而考虑备格之間的对应的傾向．例如，寺阪 (Terasaka), Die Theorie der topologischen Verbände, Fund, Math. 33. 关于这种傾向，在本丛书小松 (Komatu) 氏，《位相空間論》中有詳細叙述．

的子集，特别叫作分划❶⑩. 同样地，称适合

$$(X^*)'=X$$

的子集为对偶分划. 由上所述，分划之全体 $\mathfrak{L}$ 及对偶分划之全体 $\mathfrak{L}'$ 构成备格. 以下主要考虑前者. 对于 L 的元 a（将它看作 L 的子集），a' 为 a 的上閉包，从而

$$\bar{a}=(a')^*$$

为 a 的下閉包. 因之，令 a 对应它的下閉包所成之分划，L 可以被一一映象到 $\mathfrak{L}$ 中⑪. 于是，若 $a\geqslant b$，则它們的下閉包 A, B 在 $\mathfrak{L}$ 中有 $A\geqslant B$；且若 L 的子集 M 有下确界 $\inf M$，则 $\inf M$ 之下閉包就是 M 的各元之下閉包的（交集，即）在 $\mathfrak{L}$ 里的下确界⑫. 再者，为了明确在 L 的上确界（存在时）对应在 $\mathfrak{L}$ 的上确界（未必是并集），考虑与 L 里的半序成对偶的半序. 新半序的分划即关于原半序的对偶分划，并且 L 被这样的映象一一地，而且新半序之下确界对应 $\mathfrak{L}'$ 中的下确界一一映象到 $\mathfrak{L}'$ 中. 这里，新半序之下确界当然是原半序的上确界. 再者，在 $\mathfrak{L}$ 与 $\mathfrak{L}'$ 之間的前述 $X\to X'$ 所成之一一对应，上确界与下确界对应. 因之得到上述的断語. 于是，任意的半序集 L 可以被这样的映象一一的，而且半序，上下确界（存在时）相对应的一一映象到由它的分划构成的备格 $\mathfrak{L}$ 中. $\mathfrak{L}$ 的任意元是包含（含于）它的、那些 L 元的象之全体的下（上）确界. 这个最后的断語，可以从下列事实直接推知，分划 X 总等于 $(X')^*$，即 X' 各元的下閉包之交集，并且，它显然为 X 各元之下閉包之并集⑬.

§3. 作为代数系的格，合同，同态，合同的格

格多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是从 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 出发，用种种方式以記号 $\cup$，$\cap$ 連結两元而得到的❷. 例如，

$$x_1\cup x_2,\quad ((x_1\cup x_2)\cap x_3)\cup(x_3\cap x_1)$$

等都是. 将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代以某个格 L 的元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 而得的 L 的元，以 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示. 若 $a_i\geqslant b_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，則用归納法易証

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)\geqslant f(b_1, b_2, \cdots, b_n)⑭.$$

❶ 仿 Dedekind 分划. 再者，Artin-van der Waerden-Krull 所謂的 v-幻也是以“除尽”为（拟）半序的分划.

❷ 即格里的“語”.

由此易知，对于格 L 的任意元 a, b, c, d，适合

$$(5.\alpha)\qquad a\cap(b\cup c)\geqslant(a\cap b)\cup(a\cap c),$$
对偶地 $$a\cup(b\cap c)\leqslant(a\cup b)\cap(a\cup c),$$ （分配包含式）

$$(5.\beta)\quad (a\cup b)\cap(b\cup c)\cap(c\cup a)\geqslant(a\cap b)\cup(b\cap c)\cup(c\cap a),$$

$$(5.\gamma)\qquad (a\cup b)\cap(c\cup d)\geqslant(a\cap c)\cup(b\cap d).$$

更满足

$(5.\delta)$ 若 $a\geqslant c$，则 $a\cap(b\cup c)\geqslant(a\cap b)\cup c$ （模包含式），

换言之，对于任意的 a, b, c 有下式成立：

$(5.\delta')$ $a\cap(b\cup(a\cap c))\geqslant(a\cap b)\cup(a\cap c)$ （及其对偶），

此处 α)，β)，δ')（即 δ）里的等式恒成立的格都是很重要的，从下章起将詳細討論．α) 里的等号恒成立与 β) 里的等号恒成立等价⑮，这样的格叫作**分配格**．又 δ') 因之 δ) 里的等号恒成立的格叫作**模格**．

自由格可以仿照一般代数系里的自由系同样地定义❶．（同样地，可以定义自由模格，自由分配格等概念．）由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成的自由格是在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的格多項式全体里先規定相等定义如：以格的任意元代入 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时两多項式都表示相同元則不加区别；再形式地用运算 $\cup$，$\cap$ 将多項式結合起来的．关于它的"語的問題"已解决❷．

格的同构，同态，合同，子格等，象在一般的代数系一样．即有两格 L, L'，設 φ：$a\to a'$ 是从 L 到 L' 上的（单值的）映象，并且对于 L 的任意元 a, b

$$\varphi(a\cup b)=\varphi(a)\cup\varphi(b),\quad \varphi(a\cap b)=\varphi(a)\cap\varphi(b)$$

---

❶ 参看"附录"．

❷ P. M. Whitman, Free lattices, Ann. Math. 42．在由（有穷或无穷个）x_i 生成的自由格，对于它的两元 a, b 寻求有穷步驟以知 $a\leqslant b$ 成立或不成立，称为关于自由格的"語的問題"．其解答为：首先 $x_i\leqslant x_j$ 当且仅当 $i=j$．于是，依次对于长的語，有 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a=a'\cup a''$ $(a'\leqslant b,\ a''\leqslant b)$，或 $a=a'\cap a''$ $(a'\leqslant b,\ a''\leqslant b)$，或 $b=b'\cup b''$ $(a\leqslant b',\ a\leqslant b'')$，或 $b=b'\cap b''$ $(a\leqslant b',\ a\leqslant b'')$ 成立．

恒成立时，称 L' **同态**于 L[16]，φ 为同态映象，或簡称**同态**❶. 特别地，对应是一一时，称为**同构**❷.

在某一个格 L 里，若考虑与它的半序对偶的半序，则得到一个新的格，即对偶的格 L^*，与 L^* 同构的格称为与 L **对偶同构**.

其次，設格 L 的元間有一个等价关系，即分类"$\equiv(\theta)$". 若 $a\equiv a_1(\theta)$ 且 $b\equiv b_1(\theta)$ 时总有

$$a \between b\equiv a_1 \between b_1(\theta),$$

则称这个等价关系为**合同**. 設有从 L 到第二个格 L' 的同态映象 φ，若把 $\varphi(a)=\varphi(b)$ 表示为

$$a\equiv b(\theta),$$

就得到一个合同. 反之，有一个合同 θ 时，取它的类的集为 L'. 若把 L 的两元所属的类的幷，交取为两元幷，交的类，则 L' 构成一个格[17]，并且令 L 的元对应它所属的类，则得到一个从 L 到 L' 的同态. 一个格 L 的合同全体 $\Theta=\{\theta\}$ 构成一个半序集. 即，若 $a\equiv b(\theta_1)$，则总有 $a\equiv b(\theta_2)$ 时，定义

$$\theta_1 \geqslant \theta_2.$$

换言之，以"較精密"取作 $\geqslant$，那么 Θ 构成一个备格. 盖任給合同的某个集 Φ，若两元 a, b 对于 Φ 的每一个合同都合同时，定义 $a\equiv b(\theta)$，则 θ 是一个合同，并且是 Φ 的上确界[18]. 故所述命题由前节的定理直接可得. 又合同的集 Φ 的下确界可直接給出如下：对于 L 的两元 a, b，若当且仅当有适合

$$a\equiv c_1(\theta_1),\ c_1\equiv c_2(\theta_2),\ \cdots,\ c_{n-1}\equiv c_n(\theta_n),\ c_n\equiv b(\theta_{n+1})$$

的、L 的(有穷个)元 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 及属于 Φ 的合同 θ_1, $\theta_2,\cdots,\theta_{n+1}$ 存在时，就令 $a\equiv b(\theta')$，则 θ' 为 Φ 的下确界. 明确这一点，只要判

---

❶ 若不限定幷($\cup$)与交($\cap$)两者，而仅限定保持幷的映象，叫作**幷同态**(关于交同态同理). 本书中沒有很多地論述幷同态，在与拓扑密切相关的、小松著《位相空間論》之中，有关于它的种种有趣的叙述.

❷ 某个从格到格的(单值)映象，保存半序时，未必給出作为格的同态，但一一映象情形确实給出同构. 这件事由下列事实直接知道：格运算可由它的半序决定.

明 θ' 是合同就可以了．因为 θ' 显然是等价关系，故只要知道它保存运算 $\cup$，$\cap$ 就可以了，然而这是容易知道的❶❷⑲.

那末，格的合同的(备)格，总使(5.α)第二式的等号成立，因之，如第四章§1所述，它是分配格❸.

【証明】 格 L 的两元按某个合同是合同的充要条件为它們的并与交是合同的．因此一个合同完全由"对什么样的 $a>b$，两元才是合同的"决定⑳．今考虑 L 的任意三个合同 θ_1，θ_2，θ_3．从(5.α)知道

$$(\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3\leqslant(\theta_1\cup\theta_3)\cap(\theta_2\cup\theta_3).$$

为了証明反向包含关系，設两元 $a>b$ 滿足

(§) $$a\equiv b((\theta_1\cap\theta_2)\cup\theta_3),$$

那么，$a\equiv b(\theta_3)$，且有适合

(§§) $$a\equiv c_1(\theta_1),\ c_1\equiv c_2(\theta_2),\ c_2\equiv c_3(\theta_1),\ \cdots,\ c_{n-1}\equiv c_n(\theta_1),\ c_n\equiv b(\theta_2)$$

的 c_1，c_2，$\cdots$，c_n 存在．对应 $x\to x'=(x\cap a)\cup b$，使 L 的任意元 x 映象成适合 $a\geqslant x'\geqslant b$ 的 x'，且保存任意的合同关系．因之，在

❶ 从这件事及上述上确界的說明可知，Θ 乃是把 L 仅看作集时的分类作成的备格(仍然以"較精密"作为半序)的子格．

❷ 特别地，若 Φ 是 Θ 的全序子集，則其下确界 θ 作为对于 Θ 的至少一个合同成合同而得．

从这件事知道，有 I，0 的格(但假定 I≠0)总有不是零合同(Θ 的零，即 L 的任两元关于它都合同)的极小合同(即 Θ 之按次节叙述意义下的原子元)存在(这种情形下的合同类的格只有当然的合同，即用一般代数系的話来說是单純的)．蓋含于 Θ 而不包含零合同的全序子集之极大者至少有一个，这件事从 Zorn 引理(或超穷归納法)知显然．設此为 Φ，且 Φ 之关于 Θ 的下确界为 θ．这个 θ 不是零合同可从下列事实直接知道：Φ 中的任一元皆不使 I 与 0 合同．这个 θ 并且是非零合同的极小合同．蓋若不如此，則有适合 $\theta>\theta'$ 的非零合同 θ'，因之，将 Φ 与 θ' 合并之，則与 Φ 之极大性相違背．(Zorn 引理可以叙述成种种的形式，例如写成命題："任意的半序集里至少有一个极大的全序子集．"它与选擇公理，良序定理等是等价的．参看中山：Zorn ノ補題(位相數學，IV，1)．

❸ 船山(Funayama)-中山，On the distributivity of a lattice of lattice-congruences(學士院紀事，第18卷)．

(§§)中不妨設 $a \geqslant c_i \geqslant b$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 那么,按 θ_3, c_i 都与 a, b (因之, 互为) 合同. 因之, 在 (§§) 里把 θ_1, θ_2 分别换成 $\theta_1 \cup \theta_3$, $\theta_2 \cup \theta_3$ 也成立[21]. 即

$$a \equiv b((\theta_1 \cup \theta_3) \cap (\theta_2 \cup \theta_3)).$$

因为此式对于满足(§)的任何两元 $a > b$ 都成立,故

$$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \geqslant (\theta_1 \cup \theta_3) \cap (\theta_2 \cup \theta_3).$$

因之,等号成立.

若格 L 的子集 L_1 满足下述性质:

(6.α) 若 $a, b \in L_1$, 则 $a \cup b$, $a \cap b \in L_1$.

则 L_1 对于原来的 $\cup$, $\cap$ 运算构成一个格. 这样的 L_1 叫作 L 的**子格**. 特别地,子格 J 閉于下时,即适合

(6.β) 若 $a \in J$, 则对于任意的 $b \in L$, 有 $a \cap b \in J$

时,称为 L 的**幻**. 若把幻不依赖子格而直接定义,则可特征化为: L 的子集适合(6.α)关于并 $\cup$ 的部分以及下閉性,即(6.β). 幻的对偶叫作**对偶幻**.

异于 L 本身的、非空的幻 J, 特别适合

(6.γ) 若 $a \cap b \in J$ 且 $b \notin J$, 则 $a \in J$

时,叫作**素幻**. (6.γ)可以說是 J 的补集 $L-J$ 满足(6.α)中有关交 $\cap$ 的部分. 素幻的对偶叫作**对偶素幻**. 从这个注意以及§1里关于閉于上的子集及其补集的注意直接得到: 非空的异于 L 的幻是素的充要条件为补集 $L-J$ 是对偶幻,于是,L 的子集 J 是素幻的充要条件为 $L-J$ 是对偶素幻[22].

設有从格 L 到格 L' 的同态, 则 L 的子格及幻的象分别为 L' 的子格及幻, L' 的子格及幻的原象也分别是 L 的子格及幻. 那么,由两个元构成的格,可用单位 I 及 (异于 I 的) 零(0)构成的格 $B=\{\mathrm{I}, 0\}$ 单値地(同构的格不加以区别)决定. 特别地,設有从格 L 到二元格 B 的同态, 则 0 及 I 的原象分别为 L 的素幻和对偶素幻. 反之,若有素幻 J, 从而有对偶素幻 $L-J$, 则从 J 的元映象