

# 直线电机

(美) S. A. 纳斯尔 著  
(罗马尼亚) I. 波尔达



4

科学出版社

## 内 容 简 介

直线电机是国外近年来发展起来的一种新型电机，与旋转电机相比，它不需要中间转换装置，能把电能直接转变为作直线运动的机械能。这种电机具有速度快、结构简单、效率高和成本低等优点，已在交通、运输和传送装置等方面得到了广泛的应用。

本书系统地介绍了各种类型直线电机的原理、结构和应用，重点讨论了具有超导体激磁绕组的直线同步电动机、直线磁阻电动机、直线悬浮电机、低速直线感应电动机、直线振荡电机以及其他类型的直线电机等。书中较详细地论述了上述电机在高速运行时的情况和某些重要应用。

本书可供高等院校电机专业的大学生、研究生阅读，也可供从事电机工程的科技人员参考。

S. A. Nasar, I. Boldea

### LINEAR MOTION ELECTRIC MACHINES

A Wiley-Interscience Publication

John Wiley & Sons, 1976

## 直 线 电 机

〔美〕S. A. 纳斯尔 〔罗马尼亚〕I. 波尔达 著

龙遐令 朱维衡 徐善纲 田立兴 译

责任编辑 范铁夫

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1982年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1982年2月第一次印刷 印张：10

印数：0001—7,600 字数：227,000

统一书号：15031·387

本社书号：2477·15—5

定 价：1.55 元

## 序 言

直线电机与旋转电机相比，算是一种较新颖的电机。主要由于直线电机没有齿轮传动或者从旋转到直线运动的变换装置，而使它迅速地得到应用。在大多数情况下，直线电机作为电动机使用，而且工作得十分可靠。鉴于它的用途日趋广泛以及某些令人感兴趣的独特的现象，促使我们编写了这本书。尽管直线电动机在某些方面的应用，仅仅还是设想（例如用在高速地面运输上），我们仍然认为，除了讨论已经使用的直线电动机外，还要对那些设想进行探讨。

作为先决条件，我们认为读者熟悉普通的旋转感应电机和同步电机。也认为他们熟悉麦克斯韦方程和电磁场的基本现象，并有一定的熟练水平。但在第一章和附录里，还是介绍了一些引导性的复习材料。

第二章不但从运行原理也从结构的观点上，对直线电机加以分类。在第三章里，讨论了直线电机的一些重要的应用。

由于直线感应电动机在高速和低速运行时，性能大不相同，为此，在第四章里专门讨论在高速运行时的情况。先定性分析由高速引起的各种现象，再介绍各种分析方法。看一下有关这个课题的文献就能表明，完全按真实情况来分析高速直线感应电动机是复杂的。我们已尽量使分析方法既简单又可行，而不作过多的不切实际的假设。

第五章介绍直线同步电动机。重点讨论具有超导体激磁绕组的直线同步电动机，并举出计算推力和垂直力的例子。

第六章论述直线磁阻电动机，它就是无激磁的直线同步

电动机。第七章讨论直线悬浮电机。最后，第八章和第九章分别简要地介绍低速直线电机、直线振荡电机以及某些前面没有提到的直线电机。附录提供了复习材料和主要符号一览表。每一章的后面，都附有参考文献。在附录 E 里，列出了相当全面并精选过的书刊目录。本书虽然得助于许多书刊，但是我们认为它仍包含了相当多的新内容。我们希望本书不仅能够对学习直线电机知识的大学生而且也能对从事实际工作的工程技术人员都有所帮助。

我们中的 S. A. 纳斯尔(Nasar) 感谢国家基金委员会，使他获得补助金，从而能相当深入地进行直线电机的研究工作。I. 波尔达(Boldea)对能参加富布莱特-赫斯(Fulbright-Hays)计划的研究项目，使他有到肯塔基(Kentucky)大学去，并能在直线电机方面从事工作表示感谢。E. R. 勒斯旺特(Laithwaite)教授和伦敦电机工程学会允许我们引用他们已发表的一些材料，在这里向他们致以谢意。我们还感谢美国交通部的小马特-伽里诺(Matthew Guarino)先生，直线电机有限公司的 A. W. 达卫(Davey)先生、电机工业研究协会的 T. R. 爱斯顿(Aston)先生及斯金纳-波勒罗德(Skinner Polynoid)公司的 W. J. 艾达姆斯(Adams)先生，他们为本书提供了若干例证。最后，作为本书著者之一的 S. A. 纳斯尔，对奥司汀(Austin)的泰克赛斯(Texas)大学的 H. H. 屋得森(Woodson)教授表示感谢，因为他对最后文稿的准备工作提供了方便。

勒克辛顿(Lexington)，肯塔基  
铁密索阿拉(Timisoara)，罗马尼亚

1976 年 5 月

S. A. 纳斯尔

I. 波尔达

# 目 录

第一章 主要方程的复习 .....	1
1.1 直线电机与旋转电机的基本区别 .....	2
1.2 主要方程的复习和一些简单的实例 .....	3
1.3 电流层的概念 .....	14
1.4 气隙磁场公式 .....	16
1.5 设计规范:品质因数 .....	18
参考文献 .....	19
第二章 直线电机的分类 .....	20
2.1 直线电动机和悬浮电机 .....	20
2.2 直线感应电动机 .....	21
2.3 直线同步电动机 .....	25
2.4 直流直线电机 .....	29
2.5 直线悬浮电机 .....	30
参考文献 .....	32
第三章 直线电机的某些应用 .....	33
3.1 高速方面的应用 .....	34
3.2 在低速与堵住方面的应用 .....	41
3.3 能量电机的应用 .....	49
参考文献 .....	53
第四章 高速直线感应电动机 .....	55
4.1 高速直线感应电动机可能的几种结构 .....	55
4.2 短初级直线感应电动机的某些现象 .....	57
4.3 端部效应的分析 .....	65
4.4 横向端部效应 .....	86

4.5	直线感应电动机的准确模型, 数值解法 .....	93
4.6	带有半填充端部槽的初级绕组 .....	111
4.7	短初级的单边直线感应电动机 .....	115
4.8	设计依据和端部效应的补偿 .....	128
4.9	端部效应试验研究的模拟 .....	133
	参考文献 .....	137
<b>第五章</b>	<b>直线同步电动机 .....</b>	<b>140</b>
5.1	具有实际意义的某些结构 .....	140
5.2	用于高速地面运输的直线同步电动机的理论 .....	143
5.3	超导磁体中的交流损耗 .....	163
5.4	起动与稳定性的研究 .....	165
	参考文献 .....	166
<b>第六章</b>	<b>直线磁阻电动机 .....</b>	<b>167</b>
6.1	近似理论 .....	168
6.2	电抗计算 .....	170
6.3	举例 .....	175
6.4	垂直力 .....	178
6.5	起动和稳定性的研究 .....	180
	参考文献 .....	180
<b>第七章</b>	<b>直线悬浮电机 .....</b>	<b>182</b>
7.1	一些实用的结构 .....	182
7.2	悬浮品质因数与悬浮刚度 .....	185
7.3	排斥型直线悬浮电机 .....	188
7.4	直流吸引型直线悬浮电机 .....	205
	参考文献 .....	213
<b>第八章</b>	<b>低速直线感应电动机 .....</b>	<b>215</b>
8.1	平板型直线感应电动机 .....	215
8.2	管型直线感应电动机 .....	226
8.3	举例 .....	229
	参考文献 .....	230

第九章	其他型式的直线电动机和振荡器 .....	231
9.1	横向磁通直线感应电动机 .....	231
9.2	直线同步单极电动机 .....	240
9.3	直线振荡电动机 .....	247
9.4	直流直线电动机 .....	257
9.5	直线步进电动机 .....	268
	参考文献 .....	274
附录A	电磁场理论的简单复习 .....	276
附录B	卡氏系数 .....	283
附录C	超导性的简短复习 .....	284
附录D	主要符号表 .....	289
附录E	参考书刊选录 .....	297
	中英名词对照索引 .....	307

## 第一章 主要方程的复习

自从发明了轮子，人们尝到了利用圆周运动的甜头，为此，大多数电机都作成旋转的。也可以用电磁力产生直线运动，从而出现了直线电机。原则上每种旋转电机就有与之相对应的一种直线电机。然而从能使用的角度看，只有分别与旋转感应电机和同步电机相对应的直线感应电机和直线同步电机才经济可行。而且至今，只有直线电动机（而不是发电机）得到了应用。为此，我们主要讨论直线感应电动机和直线同步电动机的各种运行方式。这些运行方式包括了定向直线运动、短行程运动和振荡运动。

当一种电机的结构发生了变化（象下一节讨论的从旋转电机演变为直线电机那样），它的运行条件和设计规范就要起很大的变化，这几乎是普通的道理。由于电机磁路结构的变化，出现了一些用常规理论不能完全解释的新现象。因此，需要修改旧有的分析方法，而且有时需要发展新的理论。在后面各章中，我们拟介绍适用于直线电机的一些分析方法和某些设计原则。

所谓直线运动，是指沿水平方向的运动。产生直线运动的力，叫作推力、推进力或牵引力。另外，与推力方向垂直的平面内的力，叫作垂直力。直线电机里有垂直力，显然这个特点是与旋转电机不同的（在旋转电机里，有垂直力认为是不正常的）。



## 1.1 直线电机与旋转电机的基本区别

为了找出直线电机与它对应的旋转电机之间的差别，我们研究一台多相旋转感应电动机。设想，如果把旋转感应电动机的定子沿径向切开并拉直，而且用一导电片(或平板)代替转子，如图 1.1 所示，这台电机就变成直线感应电动机了。我们把定子叫作初级；转子叫作次级。值得注意的是，初级(铁心和绕组)的长度是有限的，叫作直线感应电动机的实际长度，它有一个始端和一个终端。这两个端部的存在，引起了端部效应(边缘效应)，这种现象只在直线电机里才有，而在常规的旋转电机里根本不存在。以后会看到，端部效应的大小取决于直线电机的速度(这只是其中一个因素)。这种速度依赖关系，在相应的旋转电机里是没有的。

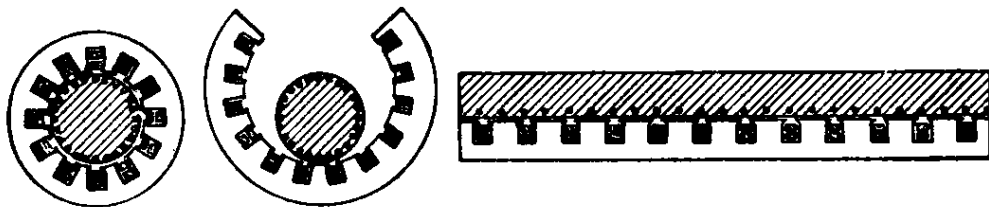


图 1.1 设想将一台常规电机展开以得到直线感应电动机的步骤

通常，我们评价一台旋转电机，只满足于它有高效率和高功率因数，当然还有别的依据来衡量这类电机。然而，由于有端部效应，不能再以同样方式把这些指标用来衡量直线电机了。正象 1.5 节中讨论的那样，端部效应的存在，使得直线电机的设计规范要作某些改变。不过我们得先简述它的分析方法。

## 1.2 主要方程的复习和一些简单的实例

在研究与直线电机有关的设计规范和其它细节之前，复习一下用来分析直线电机的方法是有好处的。首先，考虑的是一台理想化的直线电机，即忽略它的端部效应。因此，理想化的直线电机类似于理想化的旋转电机。我们要指出，这些主要方程同样可以用于实际的直线电机。讨论理想化的直线电机，仅是为了简练地说明某些细节。

习惯上，电机的分析方法有两种：(a) 集中参数的电路理论法；(b) 分布参数的电磁场理论法。对于某些类型的直线电机，已经证明，采用电磁场理论法更为方便。当我们在后面处理一些具体问题时，这个道理就更清楚了。目前，先扼要地叙述一下麦克斯韦方程和它的一些应用。有关简单的电磁场理论复习材料，放在附录A里。在本章中，通过复习，把麦克斯韦方程用到两个理想化的直线感应电机的模型上。其中一个模型，假设次级是无限厚；而在另一个模型里，才考虑次级的厚度是有限的。选择这两种模型，为了说明它们的边界条件是不同的。

### 1.2.1 次级为无限厚的理想直线感应电动机<sup>[4]</sup>

图 1.2 所示的直线感应电动机的模型是由以下三层组成的：

第一层：初级

第二层：气隙

第三层：次级

为了简化分析，作如下的假设：

1. 各层在 $\pm x$ 轴方向无限延伸。

2. 次级在  $y$  轴方向无限延伸。
3. 激磁绕组嵌在初级的槽里。为简便计,认为初级是光滑的,以使用只有宽度没有厚度的电流层表示电机的激磁。
4. 次级只在  $x$  方向运动。
5. 各层的物理常数是均质的,各向同性的,并且是线性的。
6. 铁磁材料没有饱和。
7. 忽略  $z$  轴方向的变化。
8. 各电流仅在  $z$  轴方向流动。
9. 初级是由钢片叠成,从而可以忽略  $z$  轴方向的导电率。
10. 时间量和空间量都是按正弦规律变化的。

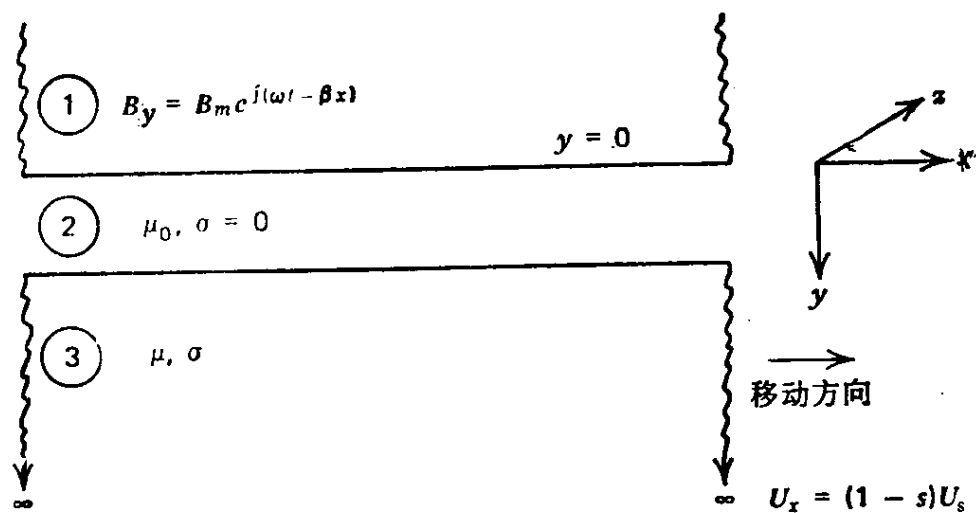


图 1.2 次级厚度为无限的理想直线感应电动机模型

依次对上述的假设加以说明。假设 1 和 2 是分析的出发点。假设 3 使模型适合于用数学分析。假设 4 是显而易见的,因为次级是由实心导体组成,它只能在一个方向上运动。根据前面的线性假设,假设 5 和 6 是能成立的。假设 7 和 8 是把问题简化为二维场的问题,叠片式的初级铁心证明假设 9

是正确的。假设 10 也是成立的,因为电源电压(或电流)随时间是按正弦变化的,以及由于初级绕组的理想分布,保证了磁场在空间的正弦分布。

根据上述假设,麦克斯韦方程(微分形式)为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

对于运动介质的欧姆定律为

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (1.4)$$

从这些方程,可以推出决定图 1.2 直线感应电动机模型中的电磁现象的主要方程。

因为位移电流密度  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  可以忽略(在工频时),所以(1.2)式变为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.5)$$

于是

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (1.6)$$

矢量磁位  $\mathbf{A}$  定义为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (1.7)$$

把(1.7)式代入(1.6)式得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (1.8)$$

把(1.8)式展开得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \sigma \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (1.9)$$

然而  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ (设无自由电荷);也可假设  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。因此

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu\sigma \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{U} \times \nabla \times \mathbf{A} \right] \quad (1.10)$$

当加上适当的激磁时，由初级在气隙里建立的在  $y$  方向的行波磁场为

$$B_y = B_m e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (1.11)$$

这个式子包含着  $\partial/\partial x = -j\beta$  和  $\partial/\partial t = j\omega$ 。

由于假设  $\mathbf{A}$  是在  $z$  方向上并且不是  $z$  的函数，所以

$$\mathbf{A}(x, y, t) = A(y) e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{a}_z \quad (1.12)$$

其中  $\hat{a}_z$  是  $z$  方向的单位矢量。现在(1.10)式可以改写为

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = \mu\sigma \left( j\omega A_z + \frac{U_x \partial A_z}{\partial x} \right) \quad (1.13)$$

其中

$$A(y) e^{j(\omega t - \beta x)} = A_z \quad (1.14)$$

和

$$\mathbf{U} = U_x \hat{a}_x \quad (1.15)$$

方程(1.13)是基础性的主要方程。当给定了边界条件，就可求这个方程的解，从而得到这类电机中的电磁现象的定量数据。对于所研究的模型，由初级产生的气隙磁场，它以同步速  $U_s$  移动着。此同步速度与滑差率  $s$  以及次级速度  $U_x$  的关系为

$$U_x = (1-s)U_s \quad (1.16)$$

因为  $\partial^2 A_z / \partial x^2 = -\beta^2 A_z$ ，所以(1.13)式变为

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = A_z \beta^2 \left( 1 + \frac{j\mu\sigma s U_s}{\beta} \right) \quad (1.17)$$

若令

$$\beta^2 \left( 1 + \frac{j\mu\sigma s U_s}{\beta} \right) = \alpha^2 \quad (1.18)$$

对于区域 2(即气隙)，在那里  $\sigma = 0$ ，则(1.17)式简化为

• • •

$$\frac{d^2 A_z}{dy^2} - \beta^2 A_z = 0 \quad (1.19)$$

对于区域 3(即次级), (1.17)式变为

$$\frac{d^2 A_z}{dy^2} - \alpha^2 A_z = 0 \quad (1.20)$$

(1.19)和(1.20)两式的解为

$$A_{z2} = (C_3 e^{\beta y} + C_4 e^{-\beta y}) e^{j(\omega t - \beta x)}$$

和

$$A_{z3} = (C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}) e^{j(\omega t - \beta x)}$$

其中, 下标数字与所研究的区域是一致的.

为了确定常数, 用了以下的边界条件:

$$y=0, \quad B_y = B_m e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$y=g, \quad B_{y2} = B_{y3} \text{ 和 } H_{x2} = H_{x3}$$

$$y \rightarrow \infty, \quad A_{z3} = 0$$

结果为

$$C_2 e^{-\alpha g} = C_3 e^{\beta g} + C_4 e^{-\beta g} \quad (1.21)$$

$$C_3 e^{\beta g} - C_4 e^{-\beta g} = -\frac{\alpha \mu_0}{\beta \mu} C_2 e^{-\alpha g} \quad (1.22)$$

$$C_3 = \frac{B_m}{j\beta} - C_4 \quad (1.23)$$

和

$$C_1 = 0 \quad (1.24)$$

从(1.21)–(1.24)式得

$$C_2 = \frac{B_m e^{\alpha g}}{j\beta \Delta} \quad (1.25)$$

$$C_3 = B_m e^{-\beta g} \frac{1 - \alpha \mu_0 / \beta \mu}{2 j\beta \Delta} \quad (1.26)$$

和

$$C_4 = B_m e^{\beta g} \frac{1 + \alpha \mu_0 / \beta \mu}{2 j \beta \Delta} \quad (1.27)$$

其中

$$\Delta = \cosh \beta g + \frac{\alpha \mu_0}{\beta \mu} \sinh \beta g \quad (1.28)$$

### 1.2.2 单位波长产生的力

由罗仑兹力方程得出力密度  $\mathbf{F}$  为

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.29)$$

其中

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (1.30)$$

由于在区域 2 里  $\sigma = 0$ , 显然不会产生力。在区域 3 中得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 &= C_2 e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{\mathbf{a}}_z \\ \mathbf{B}_3 &= -\alpha C_2 e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{\mathbf{a}}_x + j\beta C_2 e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{\mathbf{a}}_y \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{E}_3 = -j\omega C_2 e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{\mathbf{a}}_z$$

又

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{J}_3 \times \mathbf{B}_3 \quad (1.32)$$

把(1.30)式代入(1.32)式得

$$\mathbf{F}_3 = \sigma (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{B}_3 + \mathbf{U} \times \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_3) \quad (1.33)$$

这里要注意,  $\mathbf{E}_3 = -j\omega \mathbf{A}_3$  和  $\mathbf{B}_3 = j\beta \mathbf{A}_3$ . 把它们代入 (1.33) 式得

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3 &= -\sigma (E_{z3} B_{y3} + U_x B_{y3} B_{y3}) \hat{\mathbf{a}}_x \\ &\quad + \sigma (E_{z3} B_{x3} + U_x B_{x3} B_{x3}) \hat{\mathbf{a}}_y \end{aligned} \quad (1.34)$$

因此

$$F_{x3} = -\sigma E_{z3} B_{y3} - \sigma U_x B_{y3} B_{y3}$$

于是, 在  $x$  方向上对时间平均的力密度为

$$\begin{aligned}
\langle F_{x3} \rangle &= \frac{-\sigma}{2} \operatorname{Re}[(-j\omega A_3)(-j\beta A_3^*)] \\
&\times \frac{-\sigma}{2} \operatorname{Re}[(1-s)U_s(j\beta A_3)(-j\beta A_3^*)] \\
&= \frac{(\sigma\beta^2 s U_s) \operatorname{Re}(A_3 A_3^*)}{2} \quad (1.35)
\end{aligned}$$

其中星号表示共轭复数。

从(1.25)和(1.31)式得

$$A_3 = \frac{B_m}{j\beta\Delta} e^{-\alpha(y-g)} e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{a}_z$$

和

$$\begin{aligned}
\langle F_{x3} \rangle &= \frac{\sigma B_m^2 s U_s}{2|\Delta|^2} \operatorname{Re}[e^{-\alpha(y-g)} e^{-\alpha^*(y-g)}] \\
&= \frac{\sigma B_m^2 s U_s}{2|\Delta|^2} [e^{-2(y-g)\operatorname{Re}(\alpha)}]
\end{aligned}$$

对次级板的总宽度为  $l$  和全部厚度上, 沿  $x$  方向单位波长的力, 用牛顿表示为

$$\begin{aligned}
\langle F_x \rangle &= \frac{\sigma B_m^2 s U_s}{2|\Delta|^2} \lambda \int_{-l/2}^{l/2} \int_g^\infty e^{-2(y-g)\operatorname{Re}(\alpha)} dy dz \\
&= \frac{\sigma B_m^2 s U_s \lambda l}{4|\Delta|^2 \operatorname{Re}(\alpha)} \quad (1.36)
\end{aligned}$$

### 1.2.3 次级厚度为有限的理想直线感应电动机

图 1.3 画的是一个次级为有限厚度  $h$  的模型。将坐标原点放在次级的表面上。在 1.2.1 节中列出的假设, 在这里也适用。此外, 假设气隙很小, 以致于气隙磁密  $B$  没有边缘效应或不衰减。下列各层表示在图 1.3 中:

- 第 1 层: 初级;
- 第 2 层: 气隙;
- 第 3 层: 次级;



第 4 层：次级下面的空间。

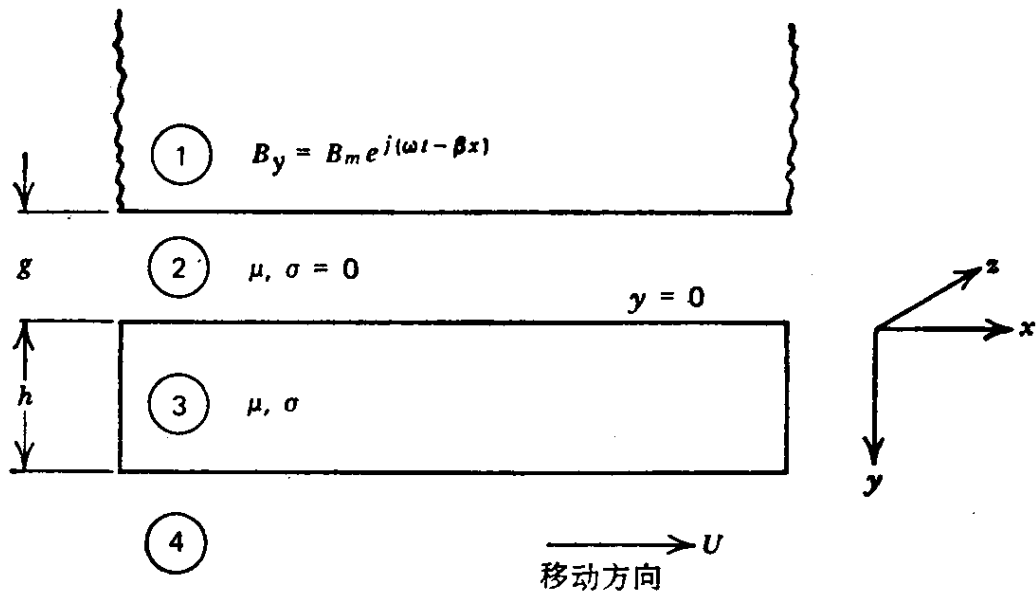


图 1.3 次级厚度为有限值的理想直线感应电动机模型

和前一节一样，对区域 3 有

$$\frac{d^2 A_z}{dy^2} - \alpha^2 A_z = 0$$

对区域 4 有

$$\beta = \alpha$$

于是，对区域 3，可假设它的解为

$$A_{z3} = (C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}) e^{j(\omega t - \beta x)}$$

对区域 4，有

$$A_{z4} = (C_3 e^{\beta y} + C_4 e^{-\beta y}) e^{j(\omega t - \beta x)}$$

把定义矢量磁位  $\mathbf{A}$  的公式

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

应用到区域 3 和区域 4，分别得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3 &= \alpha (C_1 e^{\alpha y} - C_2 e^{-\alpha y}) e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{a}_x \\ &\quad + j\beta (C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}) e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{a}_y \\ \mathbf{B}_4 &= \beta (C_3 e^{\beta y} - C_4 e^{-\beta y}) e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{a}_x \end{aligned}$$