计算数学丛书

索伯列夫空间引论

李立康　郭毓驹

计算数学丛书

索伯列夫空间引论

李立康　郭毓駒　编著

上海科学技术出版社

计算数学丛书
索伯列夫空间引论
李立康　郭锦驹　编著
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　上海市印刷十二厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 7.125　字数 157,000
1981年1月第1版　1984年6月第2次印刷
印数 5,301—9,500
书号：13119·876　定价：(科四) 0.68元

出 版 说 明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

《计算数学丛书》编辑委员会

主　　编

李　荣　华

编　　委

冯果忱　李岳生　李荣华　吴文达　何旭初

苏煜城　胡祖炽　曹维潞　雷晋干　蒋尔雄

目　　录

第 1 章

引　论

§1　说明和记号

Sobolev 空间是以苏联数学家 С. Л. Соболев 的姓来命名的一类函数空间，这是由于他对 Sobolev 空间的发展作出了重要的贡献. 这类函数空间为偏微分方程的理论研究提供了重要的工具. 自 30 年代开始进行研究以来，现在已有推广，推广的方式和使用的方面是多样的. 另外，还对这空间本身的性质进行了研究. 这些性质也已反映到推广了的 Sobolev 空间中去. 目前有关 Sobolev 空间的研究已有大量文献.

本书是计算数学丛书之一，自然没有必要对这类空间在广度和深度方面都作介绍. 我们将不讨论这类空间在偏微分方程理论研究中的应用，也不向读者介绍这类空间的各种形式的推广. 就是对 Sobolev 空间性质的讨论也只是选一些基本的内容.

本书选了三方面的内容:

1. 整数次 Sobolev 空间(第二章～第四章). 第二章主要讨论空间本身性质，如完备性、均匀凸性、某些函数空间在 Sobolev 空间中的稠密性等问题; 第三章讨论嵌入定理; 第四章讨论致密嵌入. 第三、四章定理的证明采用初等方法，但是比较长一些. 我们认为读者只要具备数学分析及 Lebesgue 积分理论等方面的知识，就可以无困难地阅读这些内容.

2. 分数次 Sobolev 空间(第六章). 这是对整数次 Sobolev

空间的推广．可以有多种方式去推广整数次 Sobolev 空间，所得的分数次 Sobolev 空间亦各不相同．我们采用通过 Fourier 变换方式，首先定义出全空间的非整数次 Sobolev 空间，然后利用它来导出有界区域(边界适当光滑，具体见第六章)上的非整数次 Sobolev 空间．为此需要缓增广义函数、Fourier 变换、延拓定理等方面的知识．我们把这些知识汇集在第六章开始几节中．迹定理是重要的，我们向读者作一初步介绍．为此还要向读者介绍 Bochner 积分的内容．所有这些预备知识，基本上都给以证明．

3．Sobolev 空间的插值理论(第五章)．这方面的内容与计算数学关系很密切．我们通过用 Riesz-Galerkin 方法求解二阶常微分方程边值问题所带来的误差估计来说明 Sobolev 空间插值理论的重要性．关于这理论在高维有限元素法中的应用可参看 [3]，[6]．

在对区域作了较多限制的条件下，第六章证明延拓算子的存在．至于对区域作较弱限制时延拓算子存在的证明则放在附录中．

本章所选内容都是为下面几章服务的．

阅读本书需要 Lebesgue 积分等一些基本概念和定理，其中个别内容将具体写出，但不给证明．

本书用 Ω 表示 Sobolev 空间中函数的定义域，它是实 N 维 Euclid 空间 R^N 中的开集．Sobolev 空间中的元素限于实值函数．Ω 所要满足的几何性质将在 § 8 中加以说明．用 Ω^c 表示区域 Ω 在 R^N 中的余集，即 $\Omega^c=R^N\setminus\Omega$．$\overline{\Omega}$ 表示 Ω 的闭包，Γ 表示 Ω 的边界，即 $\Gamma=\overline{\Omega}\cap\Omega^c$．

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ 是 R^N 中的两点，用

$$\operatorname{dist}(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

表示 x 和 y 之间的距离. 设 G 是 R^N 中的一个集合, 用 $\operatorname{dist}(x, G)$ 表示 x 到 G 的距离, 即

$$\operatorname{dist}(x, G)=\inf_{y\in G}\operatorname{dist}(x, y).$$

设 G, H 是 R^N 中的两个集合, 用 $\operatorname{dist}(G, H)$ 表示两个集合之间的距离, 即

$$\operatorname{dist}(G, H)=\inf_{x\in G}\operatorname{dist}(x, H).$$

设向量 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$. 如果每一分量都是非负整数, 就称 α 是 N 重指数, 并记 $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i$. 记 $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, 用 D^α 表示微分算子 $D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_N^{\alpha_N}$. 显然 $f=D^{(0,0,\cdots,0)}f$.

α 和 β 是两个 N 重指数. 如果 $\alpha_i\leqslant\beta_i(i=1, 2, \cdots, N)$, 称 $\alpha\leqslant\beta$, 此时 $\beta-\alpha$ 也是 N 重指数. 记

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_N!.$$

如果 $\alpha\leqslant\beta$, 则记

$$\binom{\beta}{\alpha}=\binom{\beta_1}{\alpha_1}\binom{\beta_2}{\alpha_2}\cdots\binom{\beta_N}{\alpha_N}.$$

设 G 是 R^N 中的一个子集, 如果 $\overline{G}$ 是有界闭集, 且 $\overline{G}\subset\Omega$, 就用记号 $G\subset\subset\Omega$ 来表示这一事实.

设 $u(x)$ 是定义在 $G\subset R^N$ 上的函数, 集合 $\{x\in G|u(x)\neq 0\}$ 的闭包, 即 $\overline{\{x\in G|u(x)\neq 0\}}$ 称为 u 的支集, 记为 $\operatorname{supp}u$.

§2 $L^p(\Omega)$ 的定义

设 Ω 是 R^N 中的可测集合, $f(x)$ 是定义在 Ω 上的可测函数, $0<p<\infty$, $L^p(\Omega)$ 是使积分

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \tag{2.1}$$

为有限值的函数 $f(x)$ 的全体. 把两个定义在 Ω 上的几乎处处相等的函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ (即在 Ω 中除去一个零集外, 成立 $f_1(x)=f_2(x)$) 称为等价的, 写成 $f_1(x)=f_2(x)$ (a. e.).

设 $f_1(x)$, $f_2(x)\in L^p(\Omega)$, 且等价, 则成立

$$\int_{\Omega} |f_1(x)|^p dx=\int_{\Omega} |f_2(x)|^p dx.$$

因而, 我们在 $L^p(\Omega)$ 中把等价的函数认为是同一个函数, 不加以区别. 于是, 可以认为 $L^p(\Omega)$ 的元素是使 (2.1) 为有限值的等价函数类.

用 $L^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中除去一个零集外是有界的可测函数 $f(x)$ 全体. 设 $f(x)\in L^\infty(\Omega)$, 那末存在一个常数 K (与 $f(x)$ 有关) 使不等式

$$|f(x)|\leqslant K$$

几乎处处成立, 这样的 K 显然有无穷多个, 其下确界记作 $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$, 称为 $f(x)$ 在 Ω 上的实质上界.

§ 3 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式

设 $1<p<\infty$, 由等式 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 确定的 p' 称为 p 的共轭指数. 显然, 这是一对相互共轭的指数, 且

$$p'=\frac{p}{p-1}, \quad p'-1=\frac{1}{p-1}.$$

从这组等式可以看出, 当 $p\in(1, 2]$ 时, $p'\in[2, \infty)$. 反之, 当 $p\in[2, \infty)$ 时 $p'\in(1, 2]$.

现在讨论定义在区间 $[0, \infty)$ 上的函数 $y=x^{p-1}$, 其图形

如图1所示(图1画了$p\geqslant 2$的情形). 反函数是

$$x=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{p'-1}.$$

在xy平面中的第一象限内任取一点$E(x_0, y_0)$, 过E点作EA, EB分别垂直x轴和y轴, EA, EB分别交曲线$y=x^{p-1}$于C点和D点. 不管E落在第一象限中哪一部位, 总成立

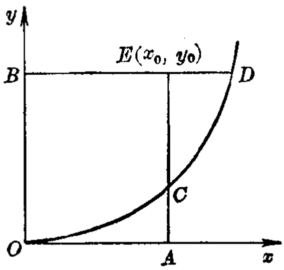

图 1

$$\text{面积}\,OAC+\text{面积}\,OCDB\geqslant\text{面积}\,OAEB, \tag{3.1}$$

即

$$\int_0^{x_0} x^{p-1}dx+\int_0^{y_0} y^{p'-1}dy\geqslant x_0y_0,$$

也就是

$$\frac{x_0^p}{p}+\frac{y_0^{p'}}{p'}\geqslant x_0y_0. \tag{3.2}$$

(3.1) 中等号成立的条件是E点落在曲线$y=x^{p-1}$上, 因而 (3.2) 中等号成立的条件是$x_0^p=y_0^{p'}$.

下面定理中出现的$P(x)$是在Ω上几乎处处大于零的可测函数, 且有上界.

定理3.1(带权 Hölder 不等式)　设$1<p<\infty$, p, p'是一对共轭指数. 如果

$$\int_\Omega |F(x)|^pP(x)dx<\infty,\quad \int_\Omega|G(x)|^{p'}P(x)dx<\infty, \tag{3.3}$$

则

$$\left|\int_\Omega F(x)G(x)P(x)dx\right|$$

$$\leqslant\left[\int_\Omega |F(x)|^pP(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega|G(x)|^{p'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.4}$$

证 当 $F(x)=0$ (a. e.) 或 $G(x)=0$ (a. e.) 时，不等式(3.4)总是成立的．不妨假定 $F(x)$ 和 $G(x)$ 不是几乎处处等于0．此时(3.3)中两个积分值是正的．作函数

$$f(x)=\frac{|F(x)|}{\left[\int_{\Omega}|F(x)|^{p}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}},$$

$$g(x)=\frac{|G(x)|}{\left[\int_{\Omega}|G(x)|^{p'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}},$$

用 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别代替 (3.2) 中 x_0 和 y_0，两边分别乘以 $P(x)$，然后在 Ω 上积分，得到

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|P(x)dx\leqslant 1.$$

把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式代入上式，经简化，得到

$$\int_{\Omega}|F(x)G(x)|P(x)dx$$

$$\leqslant\left[\int_{\Omega}|F(x)|^{p}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\Omega}|G(x)|^{p'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}},$$

对上式再利用不等式

$$\left|\int_{\Omega}F(x)G(x)P(x)dx\right|\leqslant\int_{\Omega}|F(x)G(x)|P(x)dx, \quad (3.5)$$

就得到不等式(3.4)．定理证毕．

根据不等式(3.2)中等号成立的条件和(3.5)等号成立的条件，推出(3.4)等号成立的条件是

$$|f(x)|^{p}=|g(x)|^{p'} \text{ (a. e.)}$$

和 $$\operatorname{sign} F(x)G(x)=\text{常数 (a. e.)},$$

即函数 $|F(x)|^{p}$ 和 $|G(x)|^{p'}$ 几乎处处成比例，且 $F(x)$ 和 $G(x)$ 几乎处处同号。

系 3.1 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n>0$, 且 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$. 如果有

$$\int_\Omega |F_i(x)|^{\frac{1}{p_i}} P(x)dx<\infty, \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

则

$$\left|\int_\Omega F_1F_2\cdots F_nP\,dx\right| \leqslant \left[\int_\Omega |F_1|^{\frac{1}{p_1}} P\,dx\right]^{p_1}$$
$$\times\left[\int_\Omega |F_2|^{\frac{1}{p_2}} P\,dx\right]^{p_2}\cdots\left[\int_\Omega |F_n|^{\frac{1}{p_n}} P\,dx\right]^{p_n}. \quad (3.6)$$

证 用归纳法. 已知 (3.6) 式当 $n=2$ 时成立. 假定 $n=m-1$ 时, (3.6) 成立. 现证 $n=m$ 时 (3.6) 式成立. 令 $p=\frac{1}{p_m}$, 则 $p'=\frac{1}{p_1+\cdots+p_{m-1}}$, 于是

$$\left|\int_\Omega F_1F_2\cdots F_mP\,dx\right|$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega |F_1\cdots F_{m-1}|^{p'} P\,dx\right]^{\frac{1}{p'}}\left[\int_\Omega |F_m|^{p} P\,dx\right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.7)$$

由归纳法假设, 成立

$$\int_\Omega |F_1\cdots F_{m-1}|^{p'} P\,dx=\int_\Omega |F_1|^{p'}\cdots|F_{m-1}|^{p'} P\,dx$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega (|F_1|^{p'})^{\frac{p_1+\cdots+p_{m-1}}{p_1}} P\,dx\right]^{\frac{p_1}{p_1+\cdots+p_{m-1}}}$$
$$\cdots\left[\int_\Omega (|F_{m-1}|^{p'})^{\frac{p_1+\cdots+p_{m-1}}{p_{m-1}}} P\,dx\right]^{\frac{p_{m-1}}{p_1+\cdots+p_{m-1}}}$$
$$=\left[\int_\Omega |F_1|^{\frac{1}{p_1}} P\,dx\right]^{\frac{p_1}{p_1+\cdots+p_{m-1}}}$$
$$\cdots\left[\int_\Omega |F_{m-1}|^{\frac{1}{p_{m-1}}} P\,dx\right]^{\frac{p_{m-1}}{p_1+\cdots+p_{m-1}}}. \quad (3.8)$$

将 (3.8) 代入 (3.7), 得到 $n=m$ 时的 (3.6) 式. 证毕.

(3.6) 式等号成立的条件是各个 $|F_i|^{\frac{1}{p_i}}(i=1, 2, \cdots, n)$ 之间差一个常数因子，即 $|F_i|^{\frac{1}{p_i}}=K_i\varphi$，且 $\operatorname{sign} F_1F_2\cdots F_n=$ 常数，这里 K_i 是常数.

注 当 $p=1$ 时，Hölder 不等式(3.4)应改为

$$\left|\int_\Omega F(x)G(x)P(x)dx\right|$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|G(x)|\int_\Omega |F(x)|P(x)dx.$$

定理 3.2 (带权 Minkowski 不等式) 设 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_\Omega |F(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left[\int_\Omega |G(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.9}$$

证 可以假定(3.9)式右端两个积分值都是有限的，且左边的积分值不为零，否则(3.9)式自然成立.

先证 $p=1$ 的情形. 由于

$$|F(x)+G(x)|\leqslant|F(x)|+|G(x)|,$$

上式两边乘以 $P(x)$，然后在 Ω 上积分，得到 $p=1$ 的不等式 (3.9).

现在证明 $1<p<\infty$ 的情形. 利用 Hölder 不等式得到

$$\int_\Omega |F(x)+G(x)|^p P(x)dx$$
$$=\int_\Omega |F(x)+G(x)|^{p-1}|F(x)|P(x)dx$$
$$+\int_\Omega |F(x)+G(x)|^{p-1}|G(x)|P(x)dx$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^{(p-1)p'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}$$
$$\times\left[\int_\Omega |F(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^{(p-1)p'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}\\
&\times\left[\int_\Omega |G(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
=&\left[\int_\Omega |F(x)+G(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}\\
&\times\left\{\left[\int_\Omega |F(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_\Omega |G(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.
\end{aligned}
$$

上式两边消去相同因子，得到(3.9).

系 3.2 设 $1\leqslant p<\infty$, 则成立

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega |F_1(x)+\cdots+F_n(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant\left[\int_\Omega |F_1(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}+\cdots\\
&\quad\quad+\left[\int_\Omega |F_n(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

证 用归纳法.

不等式 (3.10) 等号成立的条件是 $F_1(x)$, $\cdots$, $F_n(x)$ 只差一个常数因子.

定理 3.3 (带权 Hölder 逆不等式) 设 $0<p<1$, 因而 $p'=\dfrac{p}{p-1}<0$. 如果

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |F(x)|^p P(x)\,dx<\infty,\\
&0<\int_\Omega |G(x)|^{p'}P(x)dx<\infty,
\end{aligned}
\qquad (3.11)
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |F(x)G(x)|P(x)dx\\
&\quad\geqslant\left[\int_\Omega |F(x)|^p P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |G(x)|^{p'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p'}}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

证 可以假定 (3.12) 左端的积分值有限，否则不等式 (3.12) 自然满足. 作函数

$$g(x)=|G(x)|^{-p},\quad f(x)=|F(x)G(x)|^{p},$$

于是 $\quad f(x)g(x)=|F(x)|^{p},\quad (f(x))^{q}=|F(x)G(x)|,$

这里 $q=\frac{1}{p}$，显然 $q>1$. 如果用 q' 表示 q 的共轭指数，则 $p'=-pq'$，因而

$$\int_{\Omega}(f(x))^{q}P(x)dx=\int_{\Omega}|F(x)G(x)|P(x)dx<\infty,$$

$$\int_{\Omega}(g(x))^{q'}P(x)dx=\int_{\Omega}|G(x)|^{-pq'}P(x)dx$$

$$=\int_{\Omega}|G(x)|^{p'}P(x)dx<\infty.$$

一对函数 f 和 g 满足定理 3.1 的假设，得到

$$\int_{\Omega}|F(x)|^{p}P(x)dx=\int_{\Omega}f(x)g(x)P(x)dx$$

$$\leqslant\left[\int_{\Omega}(f(x))^{q}P(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_{\Omega}(g(x))^{q'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{q'}}$$

$$=\left[\int_{\Omega}|F(x)G(x)|P(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\int_{\Omega}|G(x)|^{p'}P(x)dx\right]^{\frac{1}{q'}},$$

两边除以 $\left[\int_{\Omega}|G(x)|^{p'}P(x)dx\right]$，然后开 $p=\frac{1}{q}$ 次方，得到不等式(3.12).

定理 3.4 (带权 Minkowski 逆不等式) 设 $0<p<1$，则

$$\left[\int_{\Omega}(|F(x)|+|G(x)|)^{p}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant\left[\int_{\Omega}|F(x)|^{p}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_{\Omega}|G(x)|^{p}P(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}.\quad(3.13)$$