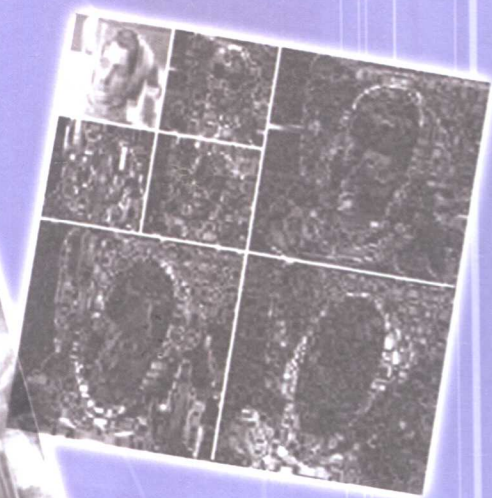




小波分析 及其 在图像处理中的应用

● 主编 陈武凡

科学出版社

小波分析及其在图像 处理中的应用

主 编 陈武凡
副主编 杨 丰 江贵平
编 委 冯前进 陈 明 刘哲星

科 学 出 版 社

2 0 0 2

内 容 简 介

本书主要介绍小波分析及其在图像处理中的应用。全书分成三部分:基础篇、应用篇和算法附录。在基础篇中,结合小波分析在图像处理中的应用,系统地论述了小波分析的基本思想、基本原理和基本方法;在应用篇中,着重针对图像处理中的实际问题,如图像编码、恢复和增强,图像分割,图像数据库检索,图像配准和重建等,详细地讨论了运用小波分析的具体思路、方法与过程;在算法附录中,给出一些常用算法的 C++ 语言程序。

本书的目的是让读者全面了解小波分析在图像处理中应用的前沿动态,以适应现代信号处理的发展。本书可作为电子信息类高年级本科生、研究生及教师的教材和参考书,也可供从事相关领域研究的科技人员、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

小波分析及其在图像处理中的应用/陈武凡等编著. —北京:科学出版社,2002

ISBN 7-03-010170-7

I .小… II .陈… III .小波分析-应用-图像处理 IV .TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 009167 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 4 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2002 年 4 月第一次印刷 印张: 16 1/2

印数: 1 — 3 000 字数: 306 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

小波变换理论与方法自问世迄今仅十多年时间,因其独特的时(空)-频多尺度分析技术,在信息处理领域中倍受青睐,因而得到广泛的应用与发展,并取得了极大的成功。如近些年来基于小波变换的图像压缩技术已被 JPEG 标准化,继而以硬件方式推向市场,就是有力的佐证。

在国内,作者属于早期从事小波理论探讨与应用的研究者之一,开始先以讲座的方式传授心得,继而为研究生专门讲课,且讲授内容随其研究成果的不断涌现而与日俱增。作者很早(1995 年)就想整理讲课手稿写一本书,且书名与各章节内容安排已就,一个暑期就完成了近一半的写作。南方炎天暑热,可谓辛苦。然而,一方面由于科研任务较重,无暇顾及,另一方面,当时已有多种同类书面市,扪心自问:本书特色何在? 于是搁笔数年之久。

所幸的是,由于杨丰副教授、江贵平副教授,我的学生冯前进博士、陈明博士和刘哲星博士的积极参与,广览文献,认真撰写,特别是杨丰副教授和冯前进博士辛勤努力,数易其稿,终成本书。其理论与方法能深入浅出,其应用技术能由广至专,全文融会贯通,资料新颖,正所谓特色已具,初衷已达,总算了却一桩心事。

本书分两篇,即理论篇与应用篇,共八章。理论篇由陈武凡、江贵平和杨丰执笔;应用篇由杨丰、冯前进、陈明、刘哲星执笔;后附的有关程序全部源于冯前进博士的研究工作。本书在内容上虽太多涉及作者的研究成果,但在写作上却不是以专著而是以教材形式编排的,目的是借此为工学硕士研究生或同类专业的博士研究生提供一本理论方法易懂、应用技术全面的教科书或参考书。

本书在计算机编排过程中得到林亚忠博士、冯锡刚博士等诸多帮助,全书由袁静老师仔细校对,作者在此深表感谢。

由于作者水平有限,不妥之处在所难免,如蒙读者批评指正,则个人幸甚,学术幸甚。

作者

2002 年 1 月 30 日

目 录

理论篇

第一章 概论	1
1.1 傅里叶变换与窗口傅里叶变换	1
1.2 小波变换的定义	4
1.3 对偶小波与小波分类	8
1.4 多分辨率分析	12
第二章 小波变换	16
2.1 基本小波的性质	16
2.2 二进小波与反演	22
2.3 小波标架	25
2.4 小波分解、重建、Mallat 算法	31
第三章 样条分析与样条小波	36
3.1 B 样条及基本性质	36
3.2 插入图形显示法与样条的 $\mathcal{B}$ 网表示	41
3.3 样条插值公式与样条小波	47
3.4 紧支撑样条小波及计算	53
第四章 尺度函数与小波	59
4.1 两尺度差分方程	59
4.2 小波及其对偶	64
4.3 线性相位问题	71
4.4 紧支撑小波	75
第五章 小波基的构造	79
5.1 紧支撑正交小波基	79
5.2 正交小波包与正交分解	87
5.3 半正交与双正交小波	93
5.4 双正交小波构造的提升方法	101
第六章 多维多分辨率分析	108
6.1 可分离的二维 MRA	108
6.2 不可分离的二维 MRA	113
6.3 三维 MRA 的实现	118

应用篇

第七章 小波在图像编码中的应用	121
7.1 图像编码概述	121
7.2 量化器与子带变换	123
7.3 小波编码的基本思想	126
7.4 零树编码	130
7.5 嵌入零树小波编码	132
7.6 S + P 算法	137
7.7 可逆嵌入小波压缩算法(CREW)	140
7.8 多小波及其在图像编码中的应用	142
第八章 小波与图像处理	152
8.1 小波与图像恢复(去噪)	152
8.2 小波与图像增强	166
8.3 小波与图像分割	175
8.4 小波与图像检索	194
8.5 小波与图像配准	206
8.6 小波与图像重建	209
程序附录	216
参考文献	251

理论篇

第一章 概 论

自 1986 年以来,关于小波分析的理论、方法与应用的研究一直为热门课题。作为一个数学工具,小波变换是对人们熟知的傅里叶变换与短时(窗口)傅里叶变换的一个重大突破,为信号分析、图像处理、量子物理及其他非线性科学的研究领域带来革命性的影响,是 20 世纪公认的最辉煌的科学成就之一。

本章将对傅里叶变换与窗口傅里叶变换作简单的回顾,介绍小波变换的定义与特性,并对小波的分类、二进小波变换及多分辨率分析作较为详尽的介绍。

1.1 傅里叶变换与窗口傅里叶变换

时域与频域是信号分析的两个领域,它们由傅里叶变换联系起来。傅里叶变换的本质在于,对于一个确定性信号 $f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$, 在整个区间是连续或分段连续,只要满足平方可积条件,即

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

就称 $f(x)$ 在空间 $L^2(0, 2\pi)$ 上可测,且 $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ 可以表示为一标准函数族 $\{e^{i\omega x} | \omega \in \mathbf{R}\}$ 的加权求和:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.1.1)$$

或

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x}$$

其中权函数

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.1.2)$$

便是原函数 $f(x)$ 的傅里叶正变换, 记作 $g(\omega) = F[f(x)]$; 而式(1.1.1)称为原函数 $f(x)$ 的反傅里叶变换, 记作:

$$f(x) = F^{-1}[g(\omega)]$$

显然傅里叶正反变换具有完美的对称性, 故称信号 $f(x)$ 与其权函数 $g(\omega)$ (又称频谱) 为一傅里叶变换对。特别地可以验证到函数族 $\{e^{i\omega x} | \omega \in \mathbf{R}\}$ 是 $L^2(0, 2\pi)$ 上的标准正交基, 于是我们可以得到傅里叶变换两个独特的性质:

- 1) $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ 可以分解成的无限多个分量 $g(\omega)$ 是两两正交的。
- 2) 正交函数族 $\{e^{i\omega x} | \omega \in \mathbf{R}\}$ 事实上是单个函数 $e^{i\omega x}$ 作整数“膨胀”生成的。

同样, 对于随机信号, 其自相关函数 $R_f(x)$ 与功率谱 $S_f(\omega)$ 也构成一傅里叶变换对:

$$S_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$R_f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

以上表明, 时频两域可以截然分开是以信号的频率特性时不变或统计特性平稳为前提条件的。实际上大多数信号, 特别是生物医学信号, 由于生理状况或当时环境的影响, 常呈非平稳状态。此种情况下, 时、频两域便不能截然分开; 而这种不完全可分性会使得傅里叶变换无能为力。退而言之, 即便信号 $f(x)$ 具有时(空)、频两域的可分性, 其傅里叶变换 $g(\omega)$ 在时(空)域中没有任何分辨, 即 $g(\omega)$ 在任何有限频段上的信息均不足以刻画任意小范围内的 $f(x)$, 可见经典的傅里叶分析法在理论与实践应用中也存在诸多的困难与不便。

为了尽可能反映频域特性随时(空)间的变化, 工程中常采用两种方法: 时窗法与频窗法。

(1) 时窗法

该法的要领是: 随着时间的进程, 把信号按时域加以分段(容许各段交叠); 每一时段上施行一傅里叶变换, 并取其幅频特性的平方作为该段的功率谱。例如医学上超声多谱勒血流分析就多采用这种方法(图 1.1.1)。

(2) 频窗法

该法步骤是: 用一组中心频率不同的带通滤波器对信号的谱结构从频域上加以分解, 同样允许各频带交叠; 将每一带通滤波器输出的包络取平方, 用来反映信号中属于该频率成分的功率时间变化的情况(图 1.1.2)。

工程上的这两种处理方法尽管带来了不少便利, 但只要稍加分析就会发

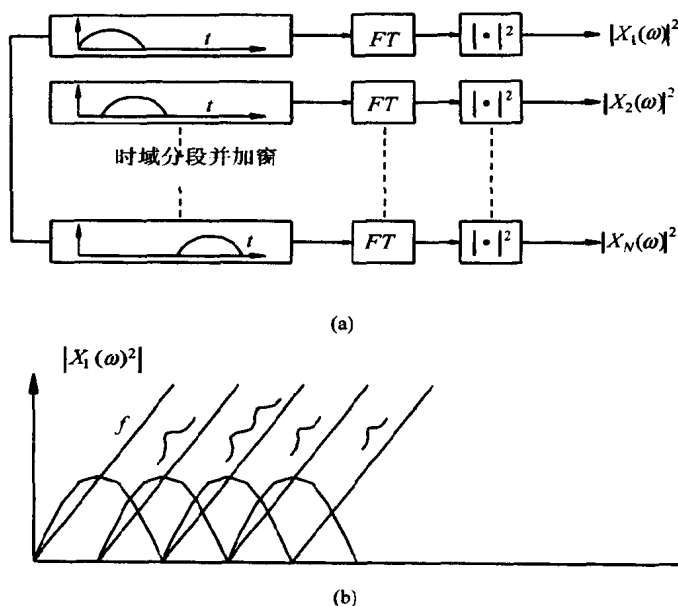


图 1.1.1 时域分段傅里叶变换模型(a)与功率谱(b)

现仍有许多局限性。对于时窗法,若要求时间上分辨得愈细致,则要求时窗愈窄;而时窗愈窄,其频域便变得愈宽,则频域的分辨便愈不细致。反之,对于频窗法,若要求频率上分辨得越细致,则带通滤波器的频带越要窄。由于窄带滤波器的过滤过程的持续时间很长,故某一时刻下滤波器的输出不只是反映该时刻下输入的作用,而且还反映该时刻以前全部历史上所有作用的总效果,从而可以断言,此时时域上的分辨更加模糊。这就是通常所说的时间与频率测量上的“不确定性原理”,或叫测不准原理。

自然,最佳方案是将时(空)、频两域结合起来对信号予以描述。为实现这一设想,Gabor 于 1964 年提出了窗口傅里叶变换,对信号 $f(x)$,其窗口傅里叶变换定义为

$$F_g f(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x - q) e^{-ipx} dx$$

其中函数 g 是给定的,称之为窗函数(例如可选 g 为 Gauss 窗),上式的逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} [F_g f(p, q)] g(x - q) e^{ipx} dp dq$$

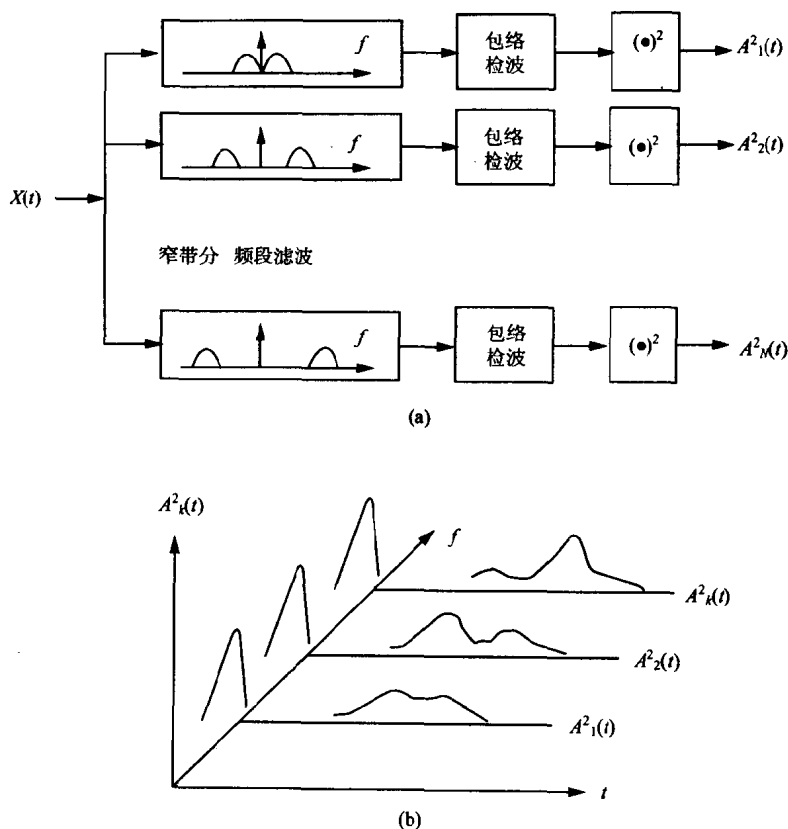


图 1.1.2 频窗分段滤波模式(a)与功率谱(b)

不难理解,窗口傅里叶变换实际上是窗口大小尺寸与形状均固定的时(空)、频局部化分析。但我们知道,频率与周期是成反比的,于是要获得信号高频成分的细致分辨,就需使用很窄的时(空)间窗,而要获取信号低频成分的粗疏分辨,必须用较宽的时(空)间窗。显然,窗口傅里叶变换是不能达到此目的的,因为窗函数本身不具备这种“弹性”。所以迫切需要在理论与方法上创建新的时(空)-频分析技术,以满足信息处理的发展。

1.2 小波变换的定义

窗口傅里叶变换属于时(空)间-频率分析法,本节要介绍一个新的时(空)-频分析法。所谓“新”是指:

1) 与传统傅里叶分析法不一样,本方法不考察“单频率”的波,而是考察

频率划分为连续“倍频程”(或频带)的波(下一节会谈到)。

2) 本方法是窗口大小不变但形状可变的时-频局部化分析技术,它能克服窗口傅里叶变换所存在的缺陷。本方法叫“时(空)间-尺度”法,即小波变换。下面给出有关定义。

定义 1.2.1 若函数 $\psi(x) \in L^1 \cap L^2$ 满足

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (1.2.1)$$

令

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (1.2.2)$$

则函数 $f(x) \in L^2$ 的小波变换定义为

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (1.2.3)$$

其相应的反变换公式为

$$f(x) = C_\psi^{-\frac{1}{2}} \iint_{\mathbb{R}^2} W_f(a,b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2} \quad (1.2.4)$$

式中, $\hat{\psi}(\omega)$ 为 $\psi(\omega)$ 的傅里叶变换。

在式(1.2.3)中,由于 x, b 是连续变量,故称之为连续小波变换(continuous wavelet transform, CWT)。与标准正交基函数族 $\{e^{i\omega x} | \omega \in \mathbb{R}\}$ 构造类似(即其他基函数均是由单函数 e^{ix} 膨胀生成的),函数 $\psi_{a,b}(x)$ 也是基本小波 $\psi(x)$ 作移位与伸缩之结果(下节会说明)。 $\psi(x)$ 之所以是“小”的,是因为规定 $\psi(x) \in L^1$, 知 $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx < \infty$, 即 $\psi(x)$ 具有衰减属性,特别地 $\psi(x)$ 是局部非零的紧支函数; $\psi(x)$ 之所以是“波”,是由式(1.2.1)的积分有界推知,当 $\omega = 0$ 时, $\psi(x)$ 的傅里叶变换必须为零,即

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

此即说明 $\psi(x)$ 具有波动性,所以称 $\psi(x)$ 为基本小波函数。

另作分析如下:

1) 用尺度因子 a 将基本小波 $\psi(x)$ 作伸缩处理。 a 愈大,则 $\psi(x/a)$ 愈宽,而 b 是将 $\psi(x)$ 作平行移动的量。对于一个持续时间有限小波, $\psi(x)$ 与 $\psi_{a,b}(x)$ 的关系如图 1.2.1 所示。它说明不同尺度下小波的持续时间会随 a 的增大而增宽,幅度则与 $\sqrt{a}$ 成反比地减少,窗函数 ψ 的波形形状也发生了变

化;另外,窗口面积的大小尽管没变,但随 a 的减小,窗口的宽度也减小,但高度增加(与高频成分对应);反之,窗的宽度增加而高度减小(与低频成分对应)。小波函数的这种伸缩与平移特性是窗口傅里叶分析无法比拟的,正是这种极敏感的“变焦”能力,使小波变换有数字显微镜之美誉。

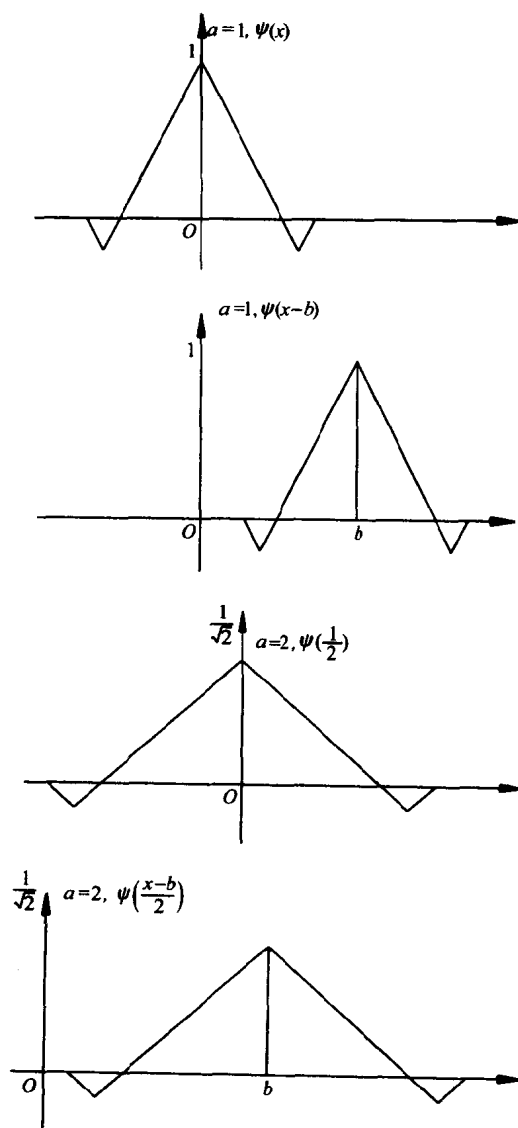


图 1.2.1 不同尺度因子与平移量下的小波

2) $\psi_{a,b}(x)$ 前乘因子 $1/\sqrt{a}$ 的好处是可保证不同 $\psi_{a,b}(x)$ 的能量都相等。如设 $\epsilon = \int |\psi(x)|^2 dx$ 是基本小波 $\psi(x)$ 的能量, 则 $\psi_{a,b}(x)$ 的能量应是

$$\begin{aligned}\epsilon' &= \int \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x}{a}\right) \right|^2 dx = \frac{1}{a} \int \left| \psi\left(\frac{x}{a}\right) \right|^2 dx \\ &= \frac{a}{a} \int |\psi(x')|^2 dx' \\ &= \epsilon \\ x' &= \frac{x}{a}\end{aligned}$$

应当说明, 小波变换的定义不是惟一的, 如 Mallat 在后期论文中曾定义的,

$$W_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

依上定义, 应有

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

它的优点是保持各 $\psi_{a,b}(x)$ 的幅频特性大小一致。

上述清楚地表明, 小波分析的思想源于伸缩与平移的方法, 而小波分析的成功是与工程技术的实际应用密切相关的。伸缩与平移的思想可以追溯到 1910 年 Harr 提出的小波规范正交基。1984 年法国地球物理学家 Morlet 在分析地震波的局部特性时, 成功地引入小波概念对信号进行分解。随后, 物理学家 Grossman 对 Morlet 的这种信号按一确定函数的伸缩、平移系:

$$\left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

予以展开并进行研究。但是真正的小波研究热始于 1986 年, 当时 Meyer 创造性地构造出了具有一定衰减属性的光滑函数 $\psi(x)$, 其二进伸缩与平移系

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (1.2.5)$$

构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 上的标准正交基, 其中 $\mathbb{Z}$ 表示整数集合。而在此之前, 人们认为这样的函数是不存在的。

1.3 对偶小波与小波分类

事实上,对基本小波 $\psi(x)$ 的伸缩、平移系

$$\left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \mid a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0 \right\}$$

若取 $a = 2^j$, $b = 2^j k$, $j, k \in \mathbf{Z}$, 所得到的就是二进小波基(式(1.2.5))。

定义 1.3.1 一个函数 $\psi \in L^2$ 称为正交小波, 如果式(1.2.2)所定义的函数系 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 L^2 上的标准正交基, 即

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, m, l \in \mathbf{Z} \quad (1.3.1)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示内积, δ 为 Kronecker 符号, 即

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

我们很容易验证, 二进小波系是 L^2 上的规范正交基, 故其基本小波 $\psi(x)$ 是正交函数。与傅里叶变换对应, $\forall f(x) \in L^2$, 都可以写成

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (1.3.2)$$

无庸置疑, 式(1.3.2)中的级数在 L^2 中是收敛的, 即

$$\lim_{m_1, n_1, m_2, n_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-m_2}^{n_2} \sum_{k=-m_1}^{n_1} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right\|_2 = 0$$

其中范数 $\|\cdot\|_2 = \langle \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$ 。正交小波的例子甚多, 当中最简单的是形为

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

的所谓 Harr 函数。Harr 小波是极其重要的正交函数, 本书的有关章节还会对其重点讨论研究。

式(1.3.2)中的小波系数 $c_{j,k}$ 由

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (1.3.4)$$

给出。根据小波变换定义 1.2.1, 小波系数可写成

$$c_{j,k} = W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) \quad (1.3.5)$$

我们知道, 在傅里叶变换中, 通常称函数 $e^{i\omega x}$ 为傅里叶积分变换的核; 同样地, 函数

$$|a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (1.3.6)$$

是小波变换的核, 它是复共轭的, 以保证小波积分变换式(1.2.3)与其逆变换式(1.2.4)的有效确定。因此, 常称 $\bar{\psi}$ 是基本小波 ψ 的一个“对偶”, 当然这个 ψ 的对偶 $\bar{\psi}$ 未必是惟一的。

例如, 若 $f(x) \in L^2$ 只有在正频率下才是有意义的, 那么它的逆变换公式(又称重构公式)的积分区间是 $(0, \infty)$, 而不是 $(-\infty, +\infty)$ 。为此, 必须考虑基本小波 ψ [式(1.3.6)] 的一个比较小的类, 即 ψ 满足

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} C_\psi < \infty \quad (1.3.7)$$

其中 C_ψ 已在式(1.2.1)中定义。相映 $f(x)$ 的重构公式为

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_f(a, b) \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right] \frac{da db}{a^2}$$

可见, 除一因子“2”以外, 此公式与重构公式(1.2.4)相同。我们仍然可以称 ψ 的复共轭 $\bar{\psi}$ 是本例中基本小波 ψ 的一个“对偶”。不过已清楚的表明, “对偶”不具惟一性。

在重构过程中, 只有 W_f 的部分信息是有用的, 因此为使重构公式有效, 基本小波 ψ 需要满足比式(1.2.1)更强的条件, 这个条件对二进小波来说就是所谓“稳定性条件”:

$$A \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B \quad (1.3.8)$$

式中, $0 < A \leq B < \infty$, A 和 B 是与 ω 无关的常数。我们说, 如果基本小波 ψ 的傅里叶变换 $\hat{\psi}$ 满足式(1.3.8), 那么它的对偶 $\bar{\psi}$ 的傅里叶变换为

$$\hat{\psi}^*(\omega) = \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega)}}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2} \quad (1.3.9)$$

使用这个对偶, 其重构公式可表示为

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}} W_f(2^{-j}, b) \cdot 2^{-j} \psi^*(2^{-j}(x-b)) db \quad (1.3.10)$$

下面为了便于说明,先阐述一下 Bahach 空间有关无条件基的概念。

我们知道, Bahach 空间是指: 若赋范线性空间 E 按距离 $d(x_m, x_l) = \|x_m - x_l\|$ 是完备的, 即 E 中序列 $\{x_n\}$ ——Cauchy 序列, 均有有限极限存在, 并仍属于该空间, 则 E 就称为 Bahach 空间。

对于任意的 $x \in B$, 存在惟一 a_j , 使 $x = \sum a_j x_j$, 且级数 $\sum a_j x_j$ 是无条件收敛 (即与项的排列次序无关), 就称 $\{x_n\}$ 是 B 的无条件基——Riesz 基。

实际上, 对于二进小波系:

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{1}{2}} \psi(2^{-j}x - k) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$$

一般来说不要求是 L^2 上的一个正交基, 但必须是一个“稳定”基, 所谓“稳定”是指:

定义 1.3.2 一个函数 $\psi \in L^2$ 被称为是一个 $\mathcal{B}$ 函数, 当它的伸缩平移系 $\{\psi_{j,k}\}$ 在由本身所构成的 L^2 中是稠密的, 并且存在正常数 $A, B, 0 < A \leq B < \infty$, 使得

$$A \|\{c_{j,k}\}\|_2^2 \leq \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2^2 \leq B \|\{c_{j,k}\}\|_2^2 \quad (1.3.11)$$

与

$$\|\{c_{j,k}\}\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{j,k}|^2 < \infty$$

成立, 并称 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 L^2 中的一个 Riesz 基。

设 ψ 是一个 $\mathcal{B}$ 函数, 则 L^2 中存在一个惟一的 Riesz 基 $\{\psi^{j,k}\}$, 它是满足下式:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi^{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, m, l \in \mathbb{Z} \quad (1.3.12)$$

条件时的系 $\{\psi_{j,k}\}$ 的对偶。自然地, 每个函数 $f \in L^2$ 可以惟一地表示为

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi^{j,k}(x) \quad (1.3.13)$$

应当注意的是, 式 (1.3.13) 中系数虽然是小波变换的值, 但级数公式未必是一个小波级数, 通常希望能找到某个函数 $\tilde{\psi} \in L^2$, 使得式 (1.3.13) 中的对偶基 $\{\psi^{j,k}\}$ 可通过 $\tilde{\psi}$ 得到, 即

$$\psi^{j,k}(x) = \tilde{\psi}_{j,k}(x) \quad (1.3.14)$$

一般情况下, $\tilde{\psi}$ 是不存在的, 但若 $\{\psi^{j,k}\}$ 是 L^2 的正交基, 则一定有 $\psi^{j,k} = \psi_{j,k}$ 或 $\tilde{\psi} = \psi$ 。更确切地, 式(1.3.13)应写成

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}(x) \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

上述充分说明:

1) 寻找基小波 $\psi(x)$ 的对偶是十分重要的, 因为可保证小波反变换——信号重建的正确性。

2) 尽可能地应用正交基小波 $\psi(x)$, 因为它的系 $\{\psi_{j,k}\} \in L^2$ 是一个正交基, 其对偶就是本身, 或说是自对偶的。

定义 1.3.3 一个 $\mathcal{R}$ 函数 $\psi \in L^2$ 被称之为 $\mathcal{R}$ 小波或小波, 如果存在一个函数 $\tilde{\psi} \in L^2$, 使得它们的系 $\{\psi_{j,k}\}$ 与 $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ 是 L^2 的对偶基。进一步, 若 ψ 是一个 $\mathcal{R}$ 小波, 则 $\tilde{\psi}$ 就称为与 ψ 对应的对偶小波。

应当强调, 任意的小波 ψ , 无论是否正交, 只要对偶存在, 就可生成任何 $f \in L^2$ 的一个“小波级数”表示, 即

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (1.3.16)$$

式中, 每个 $c_{j,k}$ 都是关于 ψ 的对偶 $\tilde{\psi}$ 的 f 的小波积分变换在时(空)间-尺度:

$$(a, b) = (2^j, 2^{-j}k)$$

上求得。

由于正交基小波 ψ 产生的伸缩平移系 $\{\psi_{j,k}(x) | j, k \in \mathbf{Z}\}$ 是一组正交基, 因此任一函数 $f(x) \in L^2$ 在此一组基上的分解形式(1.3.16)不仅是惟一的, 而且 f 的全体分量还是两两正交的。故我们说, 一个正交小波 ψ 可以产生 L^2 中的一种正交分解, 但实际应用上 $\{\psi_{j,k}\}$ 的正交性质没有得到充分利用, 这意味着只要放松正交性的严格要求, 就会有许多的小波可以用于生成 L^2 的正交分解(当然不是完全的), 从而导致我们可以灵活地去构造满足一定要求的小波, 例如紧支集小波、B 样条小波等。这些在以后的章节还会评述。

定义 1.3.4 基小波 $\psi \in L^2$ 称为一个半正交基小波, 如果它的系满足:

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0, \quad j \neq l; \quad j, k, m, l \in \mathbf{Z} \quad (1.3.17)$$

且是 L^2 上的 Riesz 基。

较式(1.3.1), 半正交小波[式(1.3.17)]的条件更为宽松, 它仅要求同一