

## 内 容 简 介

本书对几何绕射理论的基本概念，边缘绕射和曲面绕射的基本理论和计算方法作了系统和深入的论述，并有各种类型的辐射和散射问题的计算实例。它是关于几何绕射理论的一本专著。全书共九章，分别介绍了几何光学和几何绕射理论的基本概念，场积分的渐近计算，劈的散射，边缘的几何绕射理论，几何光学射线场的曲率矩阵表示式，几何光学场和边缘绕射场的高阶项，圆柱的散射，曲面的几何绕射理论和几何绕射理论的工程应用。

本书可以用作高等院校电磁场与微波技术、无线电技术和无线电物理等专业的研究生和高年级本科生的教材或教学参考书，也可供在天线、电磁场、通信、雷达、导航等领域工作的工程技术人员和高等院校教师参考。

高等学校教材

## 几 何 绕 射 理 论

汪茂光 编著

---

西北电讯工程学院出版社出版

兵器工业部 204 所印刷厂印刷

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

开本 787×1092<sub>1</sub>/16 印张 14 印刷字数 334 千字  
1985年6月第一版 1985年6月第一次印刷 印数 1-3,000

---

统一书号：15322·23

定价：2.90元

## 出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材159种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二~一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共217种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

## 前 言

在电磁散射和绕射问题中,只有极少数问题可以求得严格的解析解。这些能求得严格解的问题所涉及的物体,其几何形状一般是比较简单的,而且物体的表面和正交曲线坐标的曲面相重合。即使是这一类问题,如果所求得解是本征函数的无穷级数形式,则这种级数往往收敛得很慢,因而只对其尺寸远大于波长的那些物体才有实际意义。随着计算机技术的发展,虽然对任意形状的物体可以用数值积分方法求得积分方程的数值,但当物体的电尺寸很大时,由于计算机容量的限制也难以求得数值解,因而仍不得不求助于近似解法。

长期以来广泛应用的经典高频近似方法有几何光学法、口径场积分法和物理光学近似法。例如,对抛物反射面天线往往先用几何光学方法求得其口径场,然后用克希荷夫积分公式求其辐射场,或应用物理光学近似求得反射器照明面上的面电流分布(同时忽略阴影面上的电流),再通过对面电流元的远场积分而求得总辐射场。这两种方法都有很大的局限性。首先是因为绕射积分通常都很复杂,在许多场合往往很难计算,其次是其结果在辐射方向图的主瓣和近副瓣范围内比较精确而在远副瓣和后向辐射范围内则相当粗略。至于那些散射体尺寸很大形状又很复杂的问题,例如求装在飞行器上或舰艇上的天线的辐射方向图,则应用上述两种方法就更难求得精确的结果。

为寻求一种既简单易算,又能应用计算机求得电磁散射和绕射问题精确解的方法,自本世纪五十年代以来逐步形成和发展了一些新的渐近计算和数值计算方法。几何绕射理论是其中重要的一种,它是五十年代初凯勒(J·B·Keller)<sup>[1,2]</sup>在几何光学的基础上建立的。几何光学是一种经典的射线方法。它具有物理概念清楚,简单易算的特点,但它不能计算绕射问题。凯勒利用了几何光学的射线方法,引入了附加的绕射射线以描述绕射现象,从而发展了射线光学方法。几何绕射理论的解是以一些已知的几何形状简单的问题的严格解为基础的。这些几何形状简单的原始问题称为典型问题(Canonical Problems)。比较典型问题的严格解和由几何光学得到的近似解可以导出一些普遍规律,从而找到对近似结果进行修正的基本方法。因为形状复杂的物体可以看成是许多简单的几何构形的复合体,我们可以对一个复杂物体的各个局部分别应用已知的典型问题的解,然后把各个局部对场的贡献叠加起来以求得复杂物体的近似的高频辐射和散射特性。这种处理方法是以高频绕射问题的局部性原理为基础的。所谓局部性原理就是说:在高频时,绕射现象和反射现象一样只取决于物体在绕射点附近的几何形状和入射场性质,而和距绕射点较远的物体的几何形状无关。

几何绕射理论所能解决的问题的范围决定于已知的典型问题解的数量。到目前为止,几何绕射理论仅仅以两个典型问题为基础。其一是平面波在理想导电劈(半平面是劈角等于零时的特例)上的绕射,其二是平面波在理想导电圆柱体上的散射。至于其它问题,例如锥尖和其它形状更复杂的几何构形上电磁波的绕射则迄今还没有现成的严格解可资应用。这是几何绕射理论的应用范围尚属有限的一个重要原因。

凯勒最初导出的几何绕射理论的基本算式,即所谓绕射系数,在光学边界附近的过渡区中是失效的。因此,在这个意义上说,凯勒的解是非一致性的。不过,这一问题已在七十年代解决。孔杰荣和帕萨克(Kouyoumjian and Pathak)<sup>[3]</sup>以及刘易斯和博埃兹马(Lewis

and Boersma)<sup>[4]</sup>已先后求得了适用于过渡区的关于边缘绕射和光滑凸面绕射的一致性绕射系数。

几何绕射理论的另一困难是它的算式不能用于计算焦散区的场。这是射线光学的固有缺点。在某些场合,边缘绕射在焦散区的场可以用密勒(Millar)提出的等效边缘电流或磁流来计算,但有时也不得不用口径场积分法来计算。

尽管几何绕射理论目前还不十分完善,由于它具有物理概念清晰、简单易算的突出优点,近二十年来已广泛用于求解许多天线的辐射场和许多形状复杂的物体的散射场。例如,它不仅已用于计算扇形、角锥形和圆锥形喇叭天线、波纹喇叭、正焦或偏焦馈电的抛物面天线和双反射面天线,还广泛用于计算各种目标的雷达散射截面。近年来还和矩量法结合起来用以计算飞行器(飞机、导弹和人造地球卫星)和舰艇上天线的辐射场。

到目前为止,已发表了许多篇关于几何绕射理论及其应用的论文,但系统地阐述几何绕射理论的书籍则很少。国外已出版的少量书籍有的偏重理论很少涉及具体的工程应用;有的涉及面很广,但每一具体问题的阐述却又过于简略,不便于自学。国内则至今还没有一本系统阐述几何绕射理论及其工程应用的书籍。有关高等学校、研究所和工厂中从事天线的教学和研究设计的科技工作者都希望有一本通过短期学习即能掌握几何绕射理论的基本概念和方法,并能用以进行工程计算的适当参考书。

为了在我国介绍与推广几何绕射理论,自1978年以来,王尔杰、汪茂光、林炽森和马澄波等同志曾应邀先后在西安、上海、成都、北京、石家庄和扬州等地为有关高等院校的教师和研究生以及研究所和工厂的科技工作者讲授几何绕射理论十余次。为此,曾在1979年由王尔杰同志编写了一本《几何绕射理论讲授提纲》。为了给西北电讯工程学院电磁场与微波技术的研究生开设“几何绕射理论”课,1982年本书编者在林炽森和魏文元两同志协助下在《讲授提纲》的基础上编写出了《几何绕射理论》教材。此教材曾在1983~1984年作为两届研究生的教学参考书。1984年本书编者又根据各方面的意见对它进行了全面的修改与补充。此修改稿曾由王尔杰教授审阅,并经电磁场与微波技术教材编审委员会天线与电波教材编审组审定。在本书编写过程中,编者曾得到了不少同志的支持与帮助:林炽森和魏文元曾分别为原来的油印本编写了八、九两章;马澄波同志提出了修改意见和建议;宫德明同志作为责任编辑,对本书原稿进行了细致的编辑和加工。编者特向他们致谢。

如上所述,本书是在讲授几何绕射理论的教学实践中逐步形成和充实的。在编写此书时,编者力图使本书与高等院校电磁场与微波技术专业本科课程的内容相衔接,既注意了理论的系统性与完整性,也注意了实际工程应用。编者还考虑了教学法的要求,尽量写得由浅入深,深入浅出,以便于自学。本书既可用作大学有关专业研究生和高年级本科生的教材,也可供高等院校、研究所和工厂中从事天线研究设计的科技工作者作为学习几何绕射理论的参考书。本书的编写在国内还是一种尝试,限于编者的水平,谬误和不当之处在所难免。请有关单位的专家、学者和科技工作者予以批评指正。

# 目 录

## 前 言

## 第一章 几何光学和几何绕射理论的基本概念

|       |                 |        |
|-------|-----------------|--------|
| § 1.1 | 各向同性不均匀媒质中的电磁波  | ( 1 )  |
| § 1.2 | 高频的几何光学近似       | ( 1 )  |
| § 1.3 | 几何光学的强度定律       | ( 3 )  |
| § 1.4 | 均匀媒质中射线场的基本表示式  | ( 4 )  |
| § 1.5 | 费马原理            | ( 6 )  |
| § 1.6 | 几何绕射理论的基本概念     | ( 9 )  |
| § 1.7 | 绕射射线上场的基本表示式    | ( 11 ) |
| § 1.8 | 关于几何绕射理论的应用及其评价 | ( 13 ) |

## 第二章 场积分的渐近计算

|       |                    |        |
|-------|--------------------|--------|
| § 2.1 | 驻定相位法              | ( 15 ) |
| 2.1.1 | 驻定相位法的基本概念         | ( 15 ) |
| 2.1.2 | 驻相点远离积分端点的情况       | ( 16 ) |
| 2.1.3 | 一阶驻相点靠近积分端点的情况     | ( 19 ) |
| 2.1.4 | 关于驻相点和端点对积分贡献的量级   | ( 22 ) |
| § 2.2 | 最陡下降法              | ( 23 ) |
| 2.2.1 | 鞍 点                | ( 24 ) |
| 2.2.2 | 复函数 $g(z)$ 在解析区的性质 | ( 24 ) |
| 2.2.3 | 最陡下降路程             | ( 25 ) |
| 2.2.4 | 最陡下降法              | ( 26 ) |
| 2.2.5 | 变形最陡下降法            | ( 28 ) |

## 第三章 理想导电劈

|       |                 |        |
|-------|-----------------|--------|
| § 3.1 | 理想导电劈的本征函数解     | ( 32 ) |
| 3.1.1 | 柱面波入射时导电劈的本征函数解 | ( 32 ) |
| 3.1.2 | 平面波入射时导电劈的本征函数解 | ( 35 ) |
| § 3.2 | 绕射场的分离          | ( 36 ) |
| 3.2.1 | 把本征函数的级数化为路积分   | ( 36 ) |
| 3.2.2 | 绕射项与几何光学项的分离    | ( 38 ) |
| § 3.3 | 入射场、反射场和绕射场     | ( 41 ) |
| § 3.4 | 绕射场的近似式         | ( 42 ) |
| § 3.5 | 理想导电半平面的解       | ( 44 ) |

|       |                   |        |
|-------|-------------------|--------|
| 3.5.1 | 理想导电半平面的几何光学场和绕射场 | ( 44 ) |
| 3.5.2 | 几何光学区域及场的连续过渡     | ( 45 ) |
| 3.5.3 | 不靠近边界的远区绕射场       | ( 47 ) |
| 3.5.4 | 绕射场的过渡区           | ( 47 ) |
| 3.5.5 | 半平面绕射场的一般表示式      | ( 48 ) |
| § 3.6 | 射线基坐标系            | ( 48 ) |
| § 3.7 | 平面直劈绕射场的分析        | ( 51 ) |
| 3.7.1 | 绕射场公式中 $N$ 的选取    | ( 51 ) |
| 3.7.2 | 过渡区外的远区绕射场        | ( 53 ) |
| § 3.8 | 平面波对导电劈的斜入射       | ( 54 ) |
| 3.8.1 | 斜入射平面波的表示式        | ( 54 ) |
| 3.8.2 | 平面波斜入射时的绕射场       | ( 55 ) |
| 3.8.3 | 平面波斜入射时绕射电磁场的表示式  | ( 56 ) |
| § 3.9 | 反射射线上场的计算式        | ( 57 ) |

#### 第四章 边缘的几何绕射理论

|       |                      |        |
|-------|----------------------|--------|
| § 4.1 | 关于微分几何的一些基本概念        | ( 60 ) |
| § 4.2 | 弯曲边缘的绕射              | ( 62 ) |
| § 4.3 | 边缘绕射场的表示式            | ( 62 ) |
| § 4.4 | 边缘绕射射线波面的主曲率半径的计算    | ( 64 ) |
| § 4.5 | 象散波斜入射时绕射场的一致性解      | ( 66 ) |
| § 4.6 | 边缘绕射场的另一种表示式         | ( 70 ) |
| § 4.7 | 有限尺寸矩形地面上缝隙和单极子的辐射   | ( 74 ) |
| § 4.8 | 焦散区绕射场的计算——等效边缘电、磁流法 | ( 79 ) |

#### 第五章 几何光学射线场的曲率矩阵表示式

|       |                      |        |
|-------|----------------------|--------|
| § 5.1 | 曲面上的曲率矩阵             | ( 83 ) |
| § 5.2 | 波面和物体表面的曲率矩阵         | ( 88 ) |
| § 5.3 | 反射波面曲率矩阵与入射波面曲率矩阵的关系 | ( 90 ) |
| 5.3.1 | 入射波面与反射面的关系          | ( 90 ) |
| 5.3.2 | 反射波面与反射面的关系          | ( 91 ) |

#### 第六章 几何光学场和边缘绕射场的高阶项

|       |            |         |
|-------|------------|---------|
| § 6.1 | 几何光学场的高阶项  | ( 94 )  |
| § 6.2 | 半平面绕射场的高阶项 | ( 97 )  |
| § 6.3 | 斜率绕射系数     | ( 98 )  |
| § 6.4 | 一致性斜率绕射系数  | ( 100 ) |
| § 6.5 | 掠入射时的绕射场   | ( 105 ) |

## 第七章 理想导电圆柱的绕射

|                     |       |
|---------------------|-------|
| § 7.1 电极化平面波向圆柱垂直入射 | (108) |
| 7.1.1 阴影区的场         | (108) |
| 7.1.2 照明区的场         | (115) |
| § 7.2 磁极化平面波向圆柱垂直入射 | (119) |
| § 7.3 过渡区的场         | (123) |
| 7.3.1 电极化情况         | (123) |
| 7.3.2 磁极化情况         | (131) |
| § 7.4 圆柱面上源的绕射      | (133) |

## 第八章 曲面的几何绕射理论

|                   |       |
|-------------------|-------|
| § 8.1 阴影区场的计算     | (138) |
| 8.1.1 源在曲面外时阴影区的场 | (138) |
| 8.1.2 源在曲面上时阴影区的场 | (142) |
| § 8.2 照明区的场       | (146) |
| § 8.3 二维情况的曲面绕射场  | (147) |
| § 8.4 曲面绕射场的诸参数   | (148) |
| § 8.5 过渡区的场       | (154) |

## 第九章 几何绕射理论的工程应用

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| § 9.1 平行板波导开口端的辐射       | (156) |
| § 9.2 有限长圆锥体的轴向雷达散射截面   | (160) |
| § 9.3 喇叭天线              | (165) |
| 9.3.1 角锥喇叭的E面方向图        | (165) |
| 9.3.2 角锥喇叭的H面方向图        | (169) |
| 9.3.3 用等效电、磁流计算喇叭的H面方向图 | (171) |
| § 9.4 抛物柱面天线            | (175) |
| § 9.5 旋转抛物面天线           | (177) |
| 9.5.1 远副瓣辐射区            | (178) |
| 9.5.2 后轴向区的辐射场          | (186) |
| 9.5.3 前轴向区的辐射场          | (189) |
| § 9.6 导电圆柱体上单极子的滚动面方向图  | (192) |
| 结束语                     | (195) |
| 附录 I 并矢及并矢式             | (198) |
| 附录 II 某些特殊函数            | (199) |
| II.1 费涅尔积分              | (199) |
| II.2 艾里函数               | (201) |
| II.3 福克函数               | (203) |

|                              |         |
|------------------------------|---------|
| II.4 汉克尔函数.....              | ( 204 ) |
| 附录III $\delta$ 函数的傅立叶展式..... | ( 207 ) |
| 附录IV (3-19)式的证明.....         | ( 208 ) |
| 附录V 渐近展开式.....               | ( 208 ) |
| 参考资料.....                    | ( 211 ) |



# 第一章 几何光学和几何绕射理论的基本概念〔5, 6〕

## §1.1 各向同性不均匀媒质中的电磁波

当媒质是各向同性而不均匀时,要准确地描述电磁场的性态是很困难的。对于随时间变化的关系为 $e^{j\omega t}$ 的正弦电磁场,已知无源区的马克斯韦尔方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0 \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = 0 \quad (1-4)$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别为电场强度和磁场强度矢量, $\varepsilon$ 和 $\mu$ 分别为媒质的介电常数和导磁率。设媒质是不导电的,利用矢量的微分关系由以上式子中消去 $\mathbf{H}$ 或 $\mathbf{E}$ ,可得下列两个分别为 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 所满足的微分方程:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \quad (1-5)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} \right) = \omega^2 \mu \mathbf{H} \quad (1-6)$$

对于一般的非铁磁介质,可设 $\mu = \text{常数}$ ,则由(1-5)式可得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} \quad (1-7)$$

由于

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

和

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = 0$$

(1-7)式变为

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} = -\nabla \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon \right)$$

此方程中右方一项是求解的一大障碍。即使右方一项不存在,此方程也不容易求解,因为 $\varepsilon$ 是空间位置的函数。实际上此方程常用一些近似方法求解,其中应用得最广泛的是高频情况下的几何光学近似。

## §1.2 高频的几何光学近似

当电磁波的波长很短,媒质在空间的变化又在比波长大得多的尺度上才能显示出来时,我们就可以假定:在局部区域中电磁波场的性质就和它在均匀媒质中的性质一样。这样我们就可以在局部上把电磁波的波阵面(简称波面)看成和平面波的波面一样。因此,在高频条件下可以假设

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jk_0 \phi}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-jk_0 \phi} \quad (1-8)$$

式中 $\phi = \phi(x, y, z)$ 是空间位置的实函数; $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ 是真空中传播常数; $\lambda_0$ 是真空中波长; $c$ 是真空中光速。 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(x, y, z)$ 和 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(x, y, z)$ 也是空间位置的函数。

数。它们可能是复数，但其相位应与位置无关。函数 $\phi$ 是一个确定等相位面的特征函数。

把(1-8)式代入无源区的马克斯威尔方程可得

$$\nabla\phi \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon \mathbf{E}_0 = \frac{1}{jk_0} (\nabla \times \mathbf{H}_0) \quad (1-9)$$

$$\nabla\phi \times \mathbf{E}_0 - c\mu \mathbf{H}_0 = \frac{1}{jk_0} (\nabla \times \mathbf{E}_0) \quad (1-10)$$

$$\mathbf{E}_0 \cdot \nabla\phi = -\frac{1}{jk_0} \left( \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 + \nabla \cdot \mathbf{E}_0 \right) \quad (1-11)$$

$$\mathbf{H}_0 \cdot \nabla\phi = \frac{1}{jk_0} \left( \frac{\nabla\mu}{\mu} \cdot \mathbf{H}_0 + \nabla \cdot \mathbf{H}_0 \right) \quad (1-12)$$

如果以 $\lambda_0 \rightarrow 0$ ,  $k_0 \rightarrow \infty$ 作为几何光学的条件，则以上四式的右方均为零。另一方面，如果我们认为 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 在空间中变化很慢，则 $\nabla \times \mathbf{E}_0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{E}_0$ ,  $\nabla \times \mathbf{H}_0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{H}_0$ 均为有限值，再加上媒质参数 $\varepsilon$ 和 $\mu$ 在一个波长范围内变化很小，即

$$\frac{1}{\varepsilon} |\nabla\varepsilon| \lambda_0 \ll 1, \quad \frac{1}{\mu} |\nabla\mu| \lambda_0 \ll 1$$

于是我们得到了在几何光学近似条件下的场方程

$$\nabla\phi \times \mathbf{H}_0 + c\varepsilon \mathbf{E}_0 = 0 \quad (1-13)$$

$$\nabla\phi \times \mathbf{E}_0 - c\mu \mathbf{H}_0 = 0 \quad (1-14)$$

$$\mathbf{E}_0 \cdot \nabla\phi = 0 \quad (1-15)$$

$$\mathbf{H}_0 \cdot \nabla\phi = 0 \quad (1-16)$$

通常，实际上遇到的多半是非铁磁介质，此时 $\mu$ 是常数，且 $\mu = \mu_0$  ( $\mu_0$ 是真空磁导率)。于是(1-13)和(1-14)式可写为

$$\mathbf{E}_0 = Z_0 \mathbf{H}_0 \times \frac{\nabla\phi}{n} \quad (1-17)$$

$$Z_0 \mathbf{H}_0 = \frac{\nabla\phi}{n} \times \mathbf{E}_0 \quad (1-18)$$

式中  $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$  是媒质的折射率， $Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  是媒质的特性阻抗。(1-17)和(1-18)式说明 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$ 和 $\nabla\phi$ 是互相正交的矢量，所以几何光学场在局部上是平面波。由(1-14)式解出 $\mathbf{H}_0$ 再代入(1-13)式，得

$$\nabla\phi \times (\nabla\phi \times \mathbf{E}_0) + n^2 \mathbf{E}_0 = 0$$

因为

$$\nabla\phi \times (\nabla\phi \times \mathbf{E}_0) = (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla\phi) \nabla\phi - (\nabla\phi)^2 \mathbf{E}_0$$

再计及(1-15)式即得

$$[n^2 - (\Delta\phi)^2] \mathbf{E}_0 = 0$$

为使 $\mathbf{E}_0$ 有非零解，必须有

$$(\nabla\phi)^2 = n^2 \quad (1-19)$$

或写为

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (1-20)$$

$\phi$ 称为程函，即包含媒质电参数的变化在内的波程函数。(1-19)和(1-20)式称为程函方程。由此方程可以求出程函或相位函数 $\phi(x, y, z)$ ，所以它是几何光学中的一个基础方程。

### § 1.3 几何光学的强度定律

首先计算电磁场的平均能量密度。已知在一个周期内电场与磁场的平均能量密度分别为

$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \epsilon \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \quad (1-21)$$

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{4} \mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* \quad (1-22)$$

式中  $W_e$  和  $W_m$  分别为电场和磁场的瞬时能量密度，方括弧  $\langle \rangle$  表示在一个周期内的平均值， $\mathbf{E}_0^*$  和  $\mathbf{H}_0^*$  分别为  $\mathbf{E}_0$  和  $\mathbf{H}_0$  的复数共轭值。把 (1-13) 和 (1-14) 式的  $\mathbf{E}_0$  和  $\mathbf{H}_0$  分别代入 (1-21) 和 (1-22) 式即可证明

$$\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle = \frac{1}{4c} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* \times \nabla \phi) \quad (1-23)$$

因而总的电磁场能量密度的平均值为

$$\langle W \rangle = 2 \langle W_e \rangle = 2 \langle W_m \rangle \quad (1-24)$$

其次计算能流矢量的平均值。已知

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)$$

把由 (1-14) 式得到的  $\mathbf{H}_0^*$  代入上式，再利用 (1-15) 式可得

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2c\mu} \text{Re} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \nabla \phi$$

把 (1-21) 式代入上式，得

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2}{c\epsilon\mu} \langle W_e \rangle \nabla \phi = \frac{c}{n^2} \langle W \rangle \nabla \phi \quad (1-25)$$

若令  $\hat{\mathbf{t}}$  表示  $\nabla \phi$  的单位矢，再计及 (1-19) 式，则

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{\nabla \phi}{n} \quad (1-26)$$

把 (1-26) 代入 (1-25) 式即得

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n} \langle W \rangle \hat{\mathbf{t}} = v \langle W \rangle \hat{\mathbf{t}} \quad (1-27)$$

式中  $v = c/n$  是媒质中的波速，即波面沿垂直于波面方向的运动速度。(1-27) 式说明能量是沿射线方向流动的。

由以上分析可以看出，在几何光学近似的条件下电磁场量、波速和能流之间的关系都和均匀媒质中的平面波 (TEM 波) 相似。能量传播的速度  $v$  相当于相速，能量传播的方向  $\hat{\mathbf{t}}$  是和  $\phi(x, y, z) = \text{常数}$  的等相位面垂直的。因此，可以认为，在所给定的条件下几何光学近似中各点的波场是局部的平面电磁波。当 (1-9) ~ (1-12) 式右方各项不能略去时，(1-13) ~ (1-16) 式就不成立，几何光学近似自然也不能成立。例如，在射线的焦散线附近，程函  $\phi$  的变化剧烈， $\nabla \phi$  取很大的值；在几何阴影边界附近， $\mathbf{E}_0$  和  $\mathbf{H}_0$  变化剧烈，(1-13) ~ (1-16) 式都不成立，因此在这两个区域中几何光学近似不成立。

根据波印廷定理，在非导电媒质和无机械功的区域内，在每一点上

$$-\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

其中  $W = W_e + W_m$  是空间中该点的电磁能量密度。对于随时间作正弦变化的场，在一个周期内平均后上式成为

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = 0$$

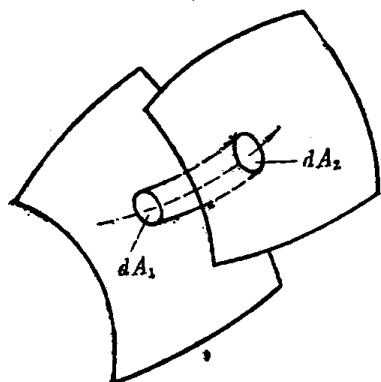


图1-1 射线管

如果有一个由射线围成的射线管，如图1-1所示，则上式说明穿过射线管的任一与射线垂直的横截面的能量是常数。因为能量是沿射线流动的，所以没有能量穿过射线管的侧壁。由此可得

$$\langle \mathbf{S} \rangle_1 \cdot d\mathbf{A}_1 = \langle \mathbf{S} \rangle_2 \cdot d\mathbf{A}_2 \quad (1-28)$$

$\langle \mathbf{S} \rangle$  的矢量线所围成的射束就是几何光学的射线管。

(1-28) 式就是几何光学的强度定律。

## § 1.4 均匀媒质中射线场的基本表示式

如果媒质是均匀的，则射线是直线。由(1-28)式的强度定律可以求得传播路径上场强振幅的相对关系。参看图1-2，令通过波面  $\phi_1$  上A点的射线与z轴重合，并选择包含波面在A点的主曲率半径<sup>⊖</sup>  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的两平面为  $xz$  平面和  $yz$  平面。在  $xz$  平面内穿过波面  $\phi_1$  上与A点相邻的B点的射线交z轴于  $O_1$  点， $O_1$  点与A的距离为  $\rho_1$ 。在  $yz$  平面内穿过波面  $\phi_1$  上与A点相邻的

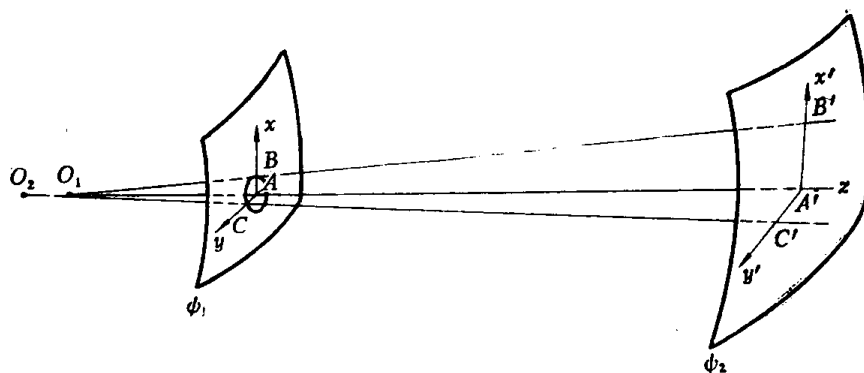


图1-2 均匀媒质中的射线管

C点的射线交z轴于  $O_2$  点， $O_2$  与A点的距离为  $\rho_2$ 。若如图1-2所示曲率中心在负z轴上，则曲率半径为正。在波面  $\phi_2$  上的  $A'$ 、 $B'$  和  $C'$  点是通过波面  $\phi_1$  上A、B和C点各条射线与  $\phi_2$  的交点。这些射线是和波面  $\phi_2$  正交的，所以  $A'$  和  $B'$  点的法线相交于  $O_1$  点，亦即  $x'z'$  平面含有一个主曲率半径。此曲率半径必为  $\rho_1 + s$ ，这里  $s$  是被波面  $\phi_1$  和  $\phi_2$  所截取的射线长度。同理， $y'z'$  平面含有另一个主曲率半径  $\rho_2 + s$ 。

设  $dA_1$  是A点的面元，则通过  $dA_1$  的诸射线将在  $\phi_2$  上截出面元  $dA_2$ 。在这两个面元上对应点的坐标关系为

<sup>⊖</sup>主曲率半径的定义见 § 4.1。

因此

$$x' = \left| \frac{\rho_1 + s}{\rho_1} \right| x, \quad y' = \left| \frac{\rho_2 + s}{\rho_2} \right| y$$

$$dA_2 = \left| \frac{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}{\rho_1 \rho_2} \right| dA_1$$

由(1-28)式并计及 $\langle S \rangle$ 与 $|E|^2$ 成比例即得

$$|E_2| = |E_1| \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} \quad (1-29)$$

式中 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 是任意正规曲面的两个主曲率半径，它们的计算将在第五章中介绍。

由(1-29)式可以看出，当 $s = -\rho_1$ 或 $s = -\rho_2$ 时，几何光学射线场的振幅变为无穷大，但实际上场是有限值。这是由于在 $s = -\rho_1$ 和 $s = -\rho_2$ 之处射线管的横截面趋于零而造成的。凡射线管的截面变为零之点的轨迹称为焦散。焦散可以是一个点、一条线或一个面。例如，对于从点源发出的四条射线构成的射线管，如图1-3所示，可以写出

$$\frac{dA_1}{\rho^2} = \frac{dA_2}{(\rho + s)^2}$$

由此得

$$|E_2| = |E_1| \frac{\rho}{\rho + s} \quad (1-30)$$

此时焦散是一个点，即源所在之点。显然，此时波面是球面。

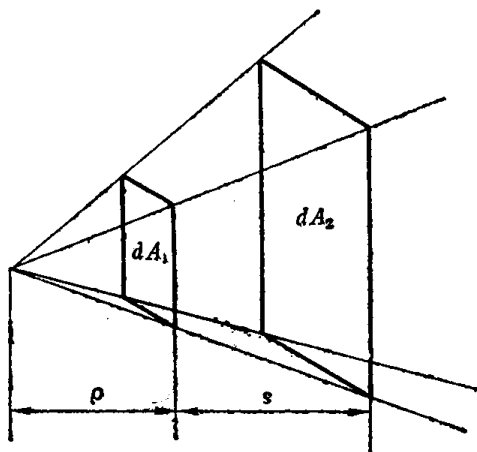


图1-3 从点源发出的射线管

在(1-29)和(1-30)式中，当 $s$ 很大时，场与距离将成反比关系，这也就是一般三维场问题中远区场与距离的关系。在二维场问题中，波面的一个主曲率半径 $\rho_2$ （或 $\rho_1$ ）变为无穷大，此时

$$|E_2| = |E_1| \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_1 + s}} \quad (1-31)$$

在这种情况下，等相位面为圆柱面。当 $s$ 很大时，场将与距离的平方根成反比。显然，如 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 都是无穷大，则等相位面为平面。此时，场是不随距离而变的常数。在一般情况下， $\rho_1 \neq \rho_2$ 且均为有限值，此时沿射线传播的波称为象散波。

在电磁场问题中还必须计及射线上各点场强的相位关系。为此，取振幅参考面为相位参考面，则由波面面元 $dA_1$ 到面元 $dA_2$ 的相位移为 $e^{-jks}$ 。于是均匀媒质中几何光学射线管中场的表示式为

$$E_2 = E_1 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-jks} \quad (1-32)$$

式中 $E_1$ 是 $s = 0$ 处的场强振幅， $e^{-jks}$ 则是空间相位的延迟因子。

(1-32) 式可以用来在已知射线上一点的场强时求射线上另一点的场强。严格地说, 所得结果是近似的, 但当几何光学近似的条件成立时, 几何光学射线场的表示式对工程应用来说是相当精确的。但(1-32)式不能用以计算焦散面(线或点)上的场, 这是几何光学射线方法的主要缺点。

(1-32) 式是以面元  $dA_1$  作为相位的参考点的, 所以在图1-2中  $O_1$  的左边  $s > -\rho_1$  时,  $\rho_1/(\rho_1 + s) > 0$ , 在越过  $O_1$  处焦散线之后,  $s < -\rho_1$ ,  $\rho_1/(\rho_1 + s) < 0$ , 因而射线场将产生  $\pi/2$  的附加相移。

(1-32) 式是几何光学射线场的基本表示式, 它适用于在自由空间传播的射线, 也适用于经过物体反射后的射线。根据凯勒的假设, (1-32) 式也适用于由绕射点发出的绕射射线。

## § 1.5 费马原理

先引入光程长度或光程的概念。所谓光程就是沿曲线  $c$  从  $P_0$  到  $P$  点之间的积分  $\int_c n ds$ 。这里  $n = n(x, y, z)$  是媒质的折射率。光程一般与所选的路程  $c$  有关。如  $c$  是一条射线, 由于  $n = |\nabla\phi|$ , 故此时

$$\int_c n ds = \phi(P) - \phi(P_0)$$

因而在两个波面之间沿任何一条射线的光程都是相等的。

费马原理指出:  $P_0$  与  $P$  两点间射线的实际轨迹就是对于微小的光程变化取驻定值的曲线。或者说, 两点间的射线就是使光程  $\int_c n ds$  取极值的曲线。所谓取极值, 一般是取极小值, 但有时也可能取极大值。

在均匀媒质中光程是和几何路程成正比的, 而在两点之间直线是最短路程, 故光程必定由直线组成。

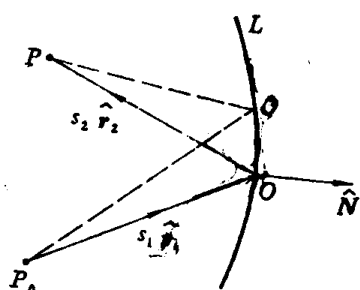


图1-4 用费马原理求反射定律

利用费马原理可以得到两种媒质界面上光线的反射和折射定律。先研究反射问题。图1-4是两种不同的均匀媒质的界面  $L$ 。设在  $L$  上有一点  $O$  使从  $P_0$  到  $O$  再到  $P$  点的光程取极值。由于媒质是均匀的, 光程必定由两段直线  $P_0O$  和  $OP$  所组成。根据假设, 对于到  $L$  面上的邻近点  $O'$  的直线路程而言, 上面的光程长度取极值。令  $O'$  相对于  $O$  点的位置矢为  $\hat{t} \delta l$ , 这里  $\hat{t}$  是在  $O$  点的切平面上的切向单位矢。令  $\hat{N}$  为  $O$  点的法向单位矢, 再令  $\hat{r}_1$  和  $\hat{r}_2$  分别代

表沿  $P_0O$  和沿  $OP$  的单位矢, 则  $P_0O$  和  $OP$  的矢量可写为  $s_1 \hat{r}_1$  和  $s_2 \hat{r}_2$ 。如果  $P_0O'$  和  $O'P$  的长度分别为  $s_1 \delta s_1$  和  $s_2 \delta s_2$ , 则通过  $O'$  和  $O$  的光程长度的变化为  $n(\delta s_1 + \delta s_2)$ , 它按我们的假设应当等于零。又设  $\hat{r}_1 + \delta \hat{r}_1$  和  $\hat{r}_2 + \delta \hat{r}_2$  分别为沿  $P_0O'$  和沿  $O'P$  的单位矢, 则

$$(s_1 + \delta s_1)(\hat{r}_1 + \delta \hat{r}_1) = s_1 \hat{r}_1 + \hat{t} \delta l$$

略去二阶小量后得

$$s_1 \delta \hat{r}_1 + \delta s_1 \hat{r}_1 = \hat{t} \delta l$$

同理有

$$s_2 \delta \hat{r}_2 + \delta s_2 \hat{r}_2 = -\hat{t} \delta l$$

由于  $\hat{r} \cdot \delta \hat{r} = 0$ , 故分别用  $\hat{r}_1$  和  $\hat{r}_2$  点乘上两式即得

$$\left. \begin{aligned} \delta s_1 &= \hat{t} \cdot \hat{r}_1 \delta l \\ \delta s_2 &= -\hat{t} \cdot \hat{r}_2 \delta l \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

由费马原理

$$n(\delta s_1 + \delta s_2) = 0$$

故得

$$(\hat{r}_1 - \hat{r}_2) \cdot \hat{t} = 0 \quad (1-34)$$

此式对任意的  $\hat{t}$  均成立, 因此由  $\hat{r}_1$  和  $\hat{r}_2$  确定的平面与切平面垂直, 即入射线、反射线和面法线在同一平面内, 且入射线与反射线和法线之间的夹角相等, 这就是反射定律。

折射定律也可用类似的方法导出。

参看图 1-5, 此时  $P$  和  $P_0$  点分别位于界面两侧不同的介质中。在这种情况下由  $P_0$  点到界面上  $O$  点和  $O'$  点以及由  $O$  和  $O'$  点到  $P$  点这两段光程长度的变化仍可用 (1-33) 式表示。但是, 由于界面两侧媒质的折射率不同, 由  $P_0$  经  $O$  和  $O'$  到  $P$  点的总光程长度的变化应为

$$n_1 \delta s_1 + n_2 \delta s_2 = (n_1 \hat{r}_1 - n_2 \hat{r}_2) \cdot \hat{t} \delta l$$

根据费马原理可得

$$(n_1 \hat{r}_1 - n_2 \hat{r}_2) \cdot \hat{t} = 0$$

此式对任意  $\hat{t}$  都成立, 所以入射线、折射线和面法线都在同一平面内, 且

$$n_1 \cos(\hat{r}_1, \hat{t}) = n_2 \cos(\hat{r}_2, \hat{t})$$

即

$$n_1 \sin(\hat{N}, \hat{r}_1) = n_2 \sin(\hat{N}, \hat{r}_2) \quad (1-35)$$

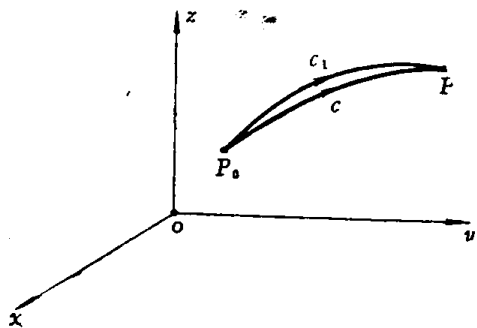
电磁波的反射和折射定律可以在平面波向平面边界入射的情况下由边界条件严格地导出。在高频时只要界面的曲率半径远大于波长, 就可以把任意界面视为局部的平面边界。同时由于射线上电磁场的运动规律和局部的平面波一样, 所以用几何光学的射线概念可以得到同样的结果。

由于界面两侧媒质的电参数突变, 几何光学中关于场的媒质参数是缓慢变化的假设不再成立, 所以上面的结果只说明到达与离开界面的射线方向的规律, 它并不象严格解那样是研究界面邻近的场而得出的结果, 所以不能用来说明界面附近的场。

费马原理还可以用来求出射线的微分方程。费马原理在数学上可以表述为光程的变分为

零, 即

$$\delta \int_c n ds = 0$$



参看图 1-6, 设在  $P_0$  和  $P$  点之间的射线  $c$  的参量方程为

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s) \quad (1-36)$$

式中  $s$  是沿射线的弧长, 它在  $P_0$  和  $P$  点分别等于  $0$  和  $l$ 。设在  $P_0$  和  $P$  点间  $c$  的邻近还有一条路径  $c_1$ , 它的参量方程为

$$x = f(s) + \epsilon f_1(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s) \quad (1-37)$$

其中  $\epsilon$  是一个任意小量, 同时

$$f_1(0) = f_1(l) = 0 \quad (1-38)$$

图1-6 用费马原理求射线的微分方程

$c_1$  的圆弧长为

$$(ds_1)^2 = [(f' + \epsilon f_1')^2 + g'^2 + h'^2](ds)^2$$

式中

$$f' = df/ds, \quad g' = dg/ds, \quad h' = dh/ds, \quad f_1' = df_1/ds$$

已知

$$f'^2 + g'^2 + h'^2 = 1$$

又因为  $\epsilon^2 f_1'^2$  是二阶小量, 可以忽略不计, 则

$$ds_1 \approx [1 + 2\epsilon f_1' f']^{1/2} ds \approx [1 + \epsilon f_1' f'] ds$$

于是光程长度的变化为

$$\begin{aligned} & \int_0^l [n(f + \epsilon f_1, g, h)(1 + \epsilon f_1' f') - n(f, g, h)] ds \\ &= \int_0^l [n(f + \epsilon f_1, g, h) + \epsilon f_1' f' n(f + \epsilon f_1, g, h) - n(f, g, h)] ds \end{aligned}$$

因为  $\epsilon$  是任意小量, 所以

$$\epsilon f_1' f' n(f + \epsilon f_1, g, h) \approx \epsilon f_1' f' n(f, g, h)$$

而

$$n(f + \epsilon f_1, g, h) - n(f, g, h) = \epsilon f_1 \frac{\partial n}{\partial x}$$

用分部积分法可得

$$\int_0^l \epsilon f_1' f' n ds = - \int_0^l \epsilon f_1 \frac{d}{ds} [f' n] ds$$

根据费马原理

$$\delta \int_0^l n ds = \int_0^l \epsilon f_1 \left[ -\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d}{ds} (f' n) \right] ds = 0$$

由于  $\epsilon f_1$  是任意的, 故得

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{df}{ds} \right) = -\frac{\partial n}{\partial x} \quad (1-39)$$



把 $df/ds$ 改写为 $dx/ds$ ，并对 $y$ 和 $z$ 也采取同样步骤推导，即得下列微分方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) &= \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) &= \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) &= \frac{\partial n}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-40)$$

在均匀媒质情况下， $n = \text{常数}$ ，这三个方程即简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

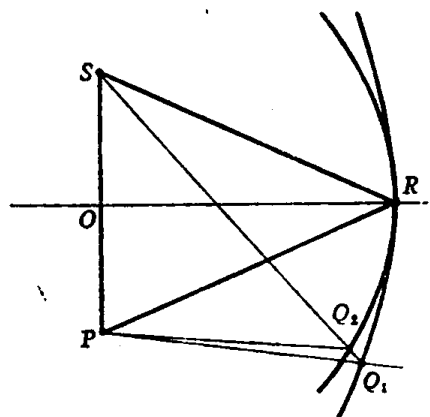
其解为

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{a}s + \mathbf{b} \quad (1-42)$$

其中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是任意常矢量。由此可见，在均匀媒质中射线是直线。

前面已提到过，光程积分的极值一般是极小值，但有时也可能取极大值。例如当反射体是凹曲面时就是如此。这可以用球面镜的反射为例来说明。

参看图1-7，图中 $S$ 是源点， $P$ 是场点，这两点都位于通过球面镜中心 $O$ 的直线上。球



面上 $R$ 点的法线是和 $SP$ 垂直的。现在过 $R$ 点作一个以 $S$ 和 $P$ 为两焦点的椭圆。如 $Q_1$ 是椭圆上一点，则距离 $SQ_1 + Q_1P$ 是一个常数。显然

$$SR + RP = SQ_1 + Q_1P \geq SQ_2 + Q_2P$$

其中 $Q_2$ 是 $SQ_1$ 与球面的交点。上式说明：当反射点位于 $R$ 时，从 $S$ 经过圆上一点到 $P$ 的路程取极大值。

图1-7 球面镜的反射

## § 1.6 几何绕射理论的基本概念

几何光学只研究直射、反射和折射问题，它不能解释绕射和散射等现象。当几何光学射线遇到物体的不连续性，例如边缘、尖顶和其它不连续点时，将产生它所不能进入的阴影区。按几何光学理论，阴影区的场应等于零，但实际上阴影区的场并不等于零，这是由绕射现象造成的，而几何光学却不能解释这一现象。凯勒在1957年提出了一种近似计算高频电磁场