

1985

# 机械类硕士研究生 试题汇解

《试题汇解》编写组编

熊大章 王价人 主审



吉林科学技术出版社

## 内 容 简 介

本书编辑了全国二十多所高等工科院、校、所,1985年硕士研究生的入学试题及其解答。试题范围包括:高等数学、理论力学、材料力学、机械原理、机械零件、金属切削原理及刀具、机械制造工艺学、金属切削机床、综合试题。

本书对准备报考研究生的读者,能起到辅导作用。对工科院校在校学生、电视大学学生及广大自修读者是一本适宜的参考书,也可供从事有关学科教学工作的教师参考。

1985年机械类硕士研究生

### 试 题 汇 解

《试题汇解》编写组编

熊大章 王价人 主审

\*

吉林科学技术出版社出版 吉林省新华书店 发行

吉林省科技情报所印刷厂印刷

\*

787×1092毫米16开本 26.625印张 643,000字

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷

印数: 1—10,000册

统一书号: 13376·33 定价: 5.60元

# 编写说明

为了满足广大读者，特别是准备报考工科研究生读者的迫切需要，我们收集编写了这本试题汇解。试题涉及的学科范围广，内容丰富，具有一定的深广度和难度，对准备报考研究生的读者是一本比较理想的参考书。对在校学生和从事有关学科教学工作的教师也是一本较好的参考书。

本书的编写工作由郭春生同志主持。高等数学部分由王喜臣同志编写，理论力学部分由孙凤亭同志编写，材料力学部分由陈文信同志编写，机械原理部分由贾贵奇同志编写，机械零件部分由张贵其同志编写，金属切削原理及刀具部分由谭云成同志编写，机械制造工艺学部分由陆博良同志编写，金属切削机床部分由王毅同志编写，综合试题部分由徐洪吉同志编写。

书中的试题，除个别院校外，均由编者解题。由于我们水平有限，时间仓促，书中有缺点错误之处，请广大读者批评指正。

本书由熊大章教授、王价人副教授主审。

在此，我们向提供试题的有关院校以及关心本书编写和出版工作的有关同志表示衷心的感谢。

长春光学精密机械学院

精密机械工程系

《试题汇解》编写组

一九八五年八月

# 目 录

## 高等数学

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| 吉林工业大学                          | 1  |
| 东北工学院                           | 5  |
| 清华大学 (I)                        | 8  |
| 清华大学 (II)                       | 16 |
| 北京工业大学                          | 18 |
| 北京工业学院                          | 22 |
| 北京钢铁学院                          | 29 |
| 中国科技大学                          | 32 |
| 郑州工学院                           | 36 |
| 西北工业大学                          | 40 |
| 西北电讯工程学院                        | 44 |
| 重庆大学                            | 49 |
| 湖南大学                            | 52 |
| 华东工学院                           | 56 |
| 上海交大 天津大学 哈尔滨工大 华中工学院<br>(I)    | 60 |
| 西安交大 浙江大学 南京工学院 华南工学院           |    |
| 上海交大等八院校 (II)                   | 64 |
| 上海交大等八院校 (III)                  | 66 |
| 同济大学 上海铁道学院 华东工学院 上海机械学院<br>(I) | 67 |
| 上海工大 上海海运学院 华东纺织工学院             |    |
| 同济大学等八院校 (II)                   | 72 |

## 理论力学

|            |    |
|------------|----|
| 吉林工业大学     | 75 |
| 长春光学精密机械学院 | 79 |
| 沈阳机电学院     | 85 |
| 大连工学院      | 88 |
| 清华大学       | 93 |
| 北京工业学院     | 97 |

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 西北电讯工程学院.....      | 101 |
| 西北工业大学.....        | 106 |
| 华东工学院.....         | 111 |
| 机械工业部上海内燃机研究所..... | 114 |

## 材料力学

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 吉林工业大学.....       | 117 |
| 长春光学精密机械学院.....   | 121 |
| 大连工学院.....        | 124 |
| 机械工业部北京机床研究所..... | 130 |
| 北京工业大学.....       | 133 |
| 北京钢铁学院.....       | 137 |
| 上海工业大学.....       | 143 |
| 西北电讯工程学院.....     | 148 |
| 西北工业大学.....       | 152 |

## 机械原理

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 哈尔滨工业大学.....      | 159 |
| 长春光学精密机械学院.....   | 162 |
| 大连工学院.....        | 165 |
| 北京工业学院.....       | 169 |
| 清华大学.....         | 173 |
| 机械工业部机械科学研究所..... | 180 |
| 西北工业大学.....       | 185 |
| 西北电讯工程学院.....     | 189 |
| 同济大学.....         | 193 |
| 上海工业大学.....       | 197 |

## 机械零件

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 哈尔滨工业大学.....    | 204 |
| 吉林工业大学.....     | 207 |
| 长春光学精密机械学院..... | 213 |
| 沈阳机电学院.....     | 216 |
| 大连工学院.....      | 223 |
| 北京工业大学.....     | 229 |
| 北京工业学院.....     | 233 |
| 上海工业大学.....     | 237 |
| 同济大学.....       | 242 |

## 金属切削原理及刀具

|                  |     |
|------------------|-----|
| 哈尔滨工业大学.....     | 249 |
| 吉林工业大学.....      | 252 |
| 长春光学精密机械学院.....  | 257 |
| 沈阳机电学院.....      | 259 |
| 大连工学院 (I) .....  | 263 |
| 大连工学院 (II) ..... | 267 |
| 北京工业学院.....      | 271 |
| 郑州工学院.....       | 275 |
| 西北工业大学.....      | 279 |
| 四川工业学院.....      | 281 |
| 南京航空学院.....      | 284 |
| 上海工业大学.....      | 286 |
| 华东工学院.....       | 289 |

## 机械制造工艺学

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 哈尔滨工业大学.....    | 293 |
| 吉林工业大学.....     | 296 |
| 吉林工学院.....      | 301 |
| 长春光学精密机械学院..... | 305 |
| 大连工学院.....      | 308 |
| 机械工业部科学研究院..... | 313 |
| 北京工业学院.....     | 316 |
| 西北工业大学.....     | 318 |
| 同济大学.....       | 324 |
| 南京航空学院.....     | 326 |

## 金属切削机床

|              |     |
|--------------|-----|
| 哈尔滨工业大学..... | 337 |
| 吉林工业大学.....  | 343 |
| 大连工学院.....   | 348 |
| 北京机床研究所..... | 354 |
| 北京工业学院.....  | 357 |
| 沈阳机电学院.....  | 363 |
| 上海工业大学.....  | 368 |
| 同济大学.....    | 372 |

## 综合试题

|             |     |
|-------------|-----|
| 吉林工业大学..... | 377 |
|-------------|-----|

|                  |     |
|------------------|-----|
| 大连工学院.....       | 380 |
| 天津大学、西安交通大学..... | 383 |
| 北京工业大学.....      | 391 |
| 北京工业学院.....      | 396 |
| 西北电讯工程学院.....    | 403 |
| 同济大学.....        | 409 |
| 上海工业大学.....      | 413 |

# 高等数学

## 吉林工业大学

一、(10分) 已知  $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$

试指出积分区域是由什么曲面围成的, 并改变积分次序

1. 先对  $y$ , 再对  $z$ , 最后对  $x$  积分

2. 先对  $x$ , 再对  $y$ , 最后对  $z$  积分

解: 积分域为圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及平面  $z = 1$  围成的。

$$1. \quad I = \int_{-1}^1 dx \int_{-z}^z dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy \\ + \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy$$

$$2. \quad I = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx$$

二、(10分) 已知  $F(x, x+y, x+y+z) = 0$  求  $z$  对  $x$  的二阶导数

解: 将给定关系式对  $x$  求导

$$\therefore F_1 + F_2 + F_3(1 + z_x) = 0$$

$$\therefore z_x = - \frac{F_1 + F_2 + F_3}{F_3}$$

$$z_{xx} = \frac{[F_{31} + F_{32} + F_{33}(1 + z_x)](F_1 + F_2 + F_3)}{F_3^2} \\ - \frac{F_{11} + F_{12} + F_{13}(1 + z_x) + F_{21} + F_{22} + F_{23}(1 + z_x) + F_{31} + F_{32} + F_{33}(1 + z_x)}{F_3} \\ = - \frac{F_3^2(F_{11} + 2F_{12} + F_{22}) - 2(F_1 + F_2)F_3(F_{13} + F_{23}) + (F_1 + F_2)^2 F_{33}}{F_3^3}$$

三、(10分) 解方程  $\frac{1}{x+y} + \frac{4y^2}{(x+y)^3} + \left(\frac{1}{x+y} - \frac{4xy}{(x+y)^3}\right)y' = 0$

解: 设  $z = z(x) = x + y(x)$ , 则  $y' = z' - 1$  代入原方程

$$\frac{1}{z} + \frac{4(z-x)^2}{z^3} + \left(\frac{1}{z} - \frac{4x(z-x)}{z^3}\right)(z' - 1) = 0$$

$$\therefore z' = \frac{4z(x-z)}{(z-2x)^2}$$

令  $\frac{z}{x} = u(x)$  , 则  $u + xu' = \frac{4u(1-u)}{(u-2)^2}$ , 化简得

$$\frac{u^2 - 4u + 4}{u^3} du = -\frac{1}{x} dx$$

$$\therefore \ln |u| + \frac{4}{u} - \frac{2}{u^2} = -\ln |x| + \ln c$$

$$\therefore \ln \left| \frac{x+y}{x} \right| + \frac{4x}{x+y} - \frac{2x^2}{(x+y)^2} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$$

即  $x+y = ce^{-\frac{2x^2+4xy}{(x+y)^2}}$

本题亦可乘以  $(x+y)^3$  后, 令  $y=xu$  求解。

四、(10分)  $\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$   $n$  为正奇数

解:  $n=2k+1$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^{2k+1} t dt = 2 \cdot \frac{(2k)(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3 \cdot 1}$$

五、(10分) 已知曲线  $y=f(x)$  的参数方程为  $x=t^2$ ,  $y=3t-t^3$  求拐点并作图

解: 变量的变化范围是  $-\infty < t < +\infty$ ,  $x \geq 0$ ,  $-\infty < y < +\infty$ ,  $y$  对  $x$  的一、二阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{t^2+1}{t^3}$$

可见,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  除  $t=0$  处外, 处处存在, 而且

$$\frac{d^2y}{dx^2} \begin{cases} < 0, & t > 0 \\ > 0, & t < 0 \end{cases}$$

这说明曲线  $y=f(x)$  在  $t=0$  处改变凹向, 故  $t=0$  所对应的点  $(0, 0)$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点。

填出下表后, 可画草图如图 1-1

|                     |                 |          |           |              |           |         |                |
|---------------------|-----------------|----------|-----------|--------------|-----------|---------|----------------|
| $t$                 | $(-\infty, -1)$ | $-1$     | $(-1, 0)$ | $0$          | $(0, 1)$  | $1$     | $(1, +\infty)$ |
| $\frac{dy}{dx}$     | +               | 0        | -         |              | +         | 0       | -              |
| $\frac{d^2y}{dx^2}$ | +               | +        | +         |              | -         | -       | -              |
| $y$                 | 递增<br>凹向上       | 极小<br>-2 | 递减<br>凹向上 | 拐点<br>(0, 0) | 递增<br>凹向下 | 极大<br>2 | 递减<br>凹向下      |

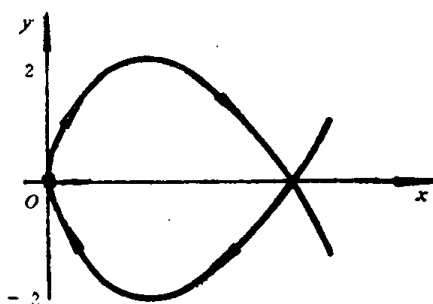


图 1-1

六、(10分) 以向量形式写出并证明：三维空间中的点到直线的距离公式

解：设  $P_1$  是不在直线  $l$  上的点， $D$  是点  $P_1$  到直线  $l$  的距离，取  $l$  上一点  $P_0$  和直线  $l$  的方向向量  $\vec{L}$ ，则由矢量积的几何意义和平行四边形面积公式可知

$$D \times |\vec{L}| = |\vec{L} \times \overrightarrow{P_0P_1}|$$

于是得距离公式为

$$D = \frac{|\vec{L} \times \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{L}|}$$

七、(10分) 证明，若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = q \text{ 存在, 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (\text{其中 } u_n > 0) \text{ 当 } q > 1 \text{ 时收敛,}$$

当  $q < 1$  时发散。

证：由  $u_n > 0$  知  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数，又由已知极限  $q$  存在，则任给  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N$ ，使得当  $n > N$  时，恒有

$$- \varepsilon < \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} - q < \varepsilon \quad (*)$$

当  $q > 1$  时，取  $\varepsilon > 0$  充分小，有  $r > 0$  使  $q - \varepsilon \geq 1 + r$ ，由 (\*) 式有

$$\ln \frac{1}{u_n} > (1 + r) \ln n$$

即  $\frac{1}{u_n} > n^{1+r}$ ， $0 < u_n < \frac{1}{n^{1+r}}$ ，而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+r}}$  收敛，故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  亦收敛。

当  $q < 1$  时，取  $\varepsilon > 0$  充分小，使  $q + \varepsilon < 1$ ，又据 (\*) 式可知，当  $n > N$  时，总有

$$\ln \frac{1}{u_n} < (q + \varepsilon) \ln n \leq \ln n$$

即 
$$u_n > \frac{1}{n}$$

而  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$  发散, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  亦发散。

八、(10分) 设  $f(x)$  是二阶连续可导的偶函数, 且  $f''(0) \neq 0$ , 问  $x=0$  是否极值点, 为什么?

解: 不妨设  $f''(0) > 0$ , 由  $f''(0)$  的连续性可知, 在点  $x=0$  的某一邻域内  $f''(0) > 0$ , 而

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad \xi \text{ 在 } 0, x \text{ 之间}$$

$$\therefore f(x) - f(0) - f'(0)x \geq 0$$

又  $\because f(-x) = f(x)$  推得  $f'(x) = -f'(-x)$ ,  $f'(0) = -f'(0)$  进而可知  $f'(0) = 0$

$$\therefore f(x) - f(0) \geq 0$$

即  $x=0$  是  $f(x)$  的极小点, 如  $f''(0) < 0$  时, 可类似推得  $x=0$  是  $f(x)$  的极大点。总之,  $x=0$  是  $f(x)$  的极值点。

九、(10分) 已知 
$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求矩阵  $X$

解: 设 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则  $|A| \neq 0$ , 即  $A$  满秩, 原矩阵方程为  $XA = B$ ,

$$\therefore X = BA^{-1} = B \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

十、(10分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立, 且依次在  $(-a, 0)$  及  $(0, a)$  上服从均匀分布, ( $a > 0$ ), 求  $X+Y$  的分布函数

解: 
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & -a < x < 0 \\ 0 & \text{其他,} \end{cases} \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 < y < a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由于  $X$  与  $Y$  独立, 所以二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & -a < x < 0, \quad 0 < y < a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

于是,  $z = X+Y$  的分布函数为

$$F_z(z) = P(x+y \leq z) = \iint_D \varphi(x, y) d\sigma$$

其中  $D = \{(x, y) \mid x+y \leq z\}$

$$\therefore F_z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq -a \\ \frac{(z+a)^2}{2a^2} & -a < z \leq 0 \\ \frac{a^2 - \frac{1}{2}(a-z)^2}{a^2} & 0 < z \leq a \\ 1 & a < z \end{cases}$$

## 东 北 工 学 院

一、(50分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}$

解: 原式 =  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{x^2} dx \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0$

2. 已知  $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解: 方程等号两端对x求导得

$$x^{y^2} \left( 2y \ln x \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} \right) + 2y \ln x \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = 0$$

即  $y(x^{y^2} + 1) \left( 2 \ln x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \right) = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = - \frac{y}{2x \ln x}$

3. 已知  $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ ,  $F$  为一次可微函数, 求证

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

解:  $F_1 \left( \frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F_2 \left( -\frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z F_1}{x F_1 + y F_2}$$

类似地,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z F_2}{x F_1 + y F_2}$$

两式相加即可得证。

4. 计算定积分  $\int_0^{1+\sqrt{5}} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 15} dx$

解: 令  $t = \sqrt{e^x - 1}$ , 则  $x = \ln(1 + t^2)$

$$\text{原式} = \int_0^2 \frac{2(1+t^2)t^2}{(t^2+4^2)(1+t^2)} dt = 2 \int_0^2 \left( 1 - \frac{4}{t^2+4} \right) dt = 4 - \pi$$

5. 计算二重积分  $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$ , 已知  $D$  为圆  $x^2 + y^2 = e^2$  和圆  $x^2 + y^2 = e^4$  所围区域。

解: 原式  $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{e^2}^{e^4} r \ln r^2 dr = \pi e^2 (3e^2 - 1)$

6. 把函数  $f(x) = x(\pi - x)$  在区间  $[0, \pi]$  内展开为正弦级数, 并写出它的和。

解:  $b_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin nx dx = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{8}{(2k+1)^3 \pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$

$$\therefore f(x) = \frac{8}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots \right) \quad x \in [0, \pi]$$

这个正弦级数的和函数是以 $2\pi$ 为周期的奇函数, 它在 $[0, \pi]$ 上的值等于 $x(\pi - x)$

二、(10分) 已知力场 $\vec{F} = (3x - 4y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j} - 4y^2\vec{k}$ , 求一质点沿 $xoy$ 平面内椭圆 $c$ :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ 正向运动一周时, 力场所作的功}$$

解: 椭圆  $c$  的参数方程为  $x = 4\cos t, y = 3\sin t, z = 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ , 于是功

$$\begin{aligned} W &= \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_c (3x - 4y)dx + (4x + 2y)dy - 4y^2dz \\ &= \int_0^{2\pi} [(12\cos t - 12\sin t) \cdot (-4\sin t) + (16\cos t + 6\sin t) \cdot 3\cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (48 - 30\sin t \cos t) dt = 96\pi \end{aligned}$$

三、(10分) 把函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$  展为 $(x - 4)$ 的幂级数

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-4}{6}} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-4}{7}} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-4}{6}\right)^n - \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-4}{7}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{6^{n+1}} - \frac{1}{7^{n+1}} \right) (x-4)^n \end{aligned}$$

由  $\left| \frac{x-4}{6} \right| < 1$  和  $\left| \frac{x-4}{7} \right| < 1$  得  $-2 < x < 10$  和  $-3 < x < 11$ , 故所展开的级数在 $(-2, 10)$ 内收敛。

四、(10分) 已知函数  $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中 $f$ 为可微函数,  $\Omega$ 域为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2, \text{ 求 } F'(t)$$

解: 作球坐标变换得

$$F(t) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^t f(r^2) r^2 \sin\theta dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r^2) dr$$

于是

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$$

五、(10分) 把质量为4千克的物体挂在一个弹簧上, 弹簧系数为64牛顿/米, 让此物体向上离开其平衡位置0.5米, 然后放开, 此物体以初速为0, 而且受 $8\sin 4t$ 牛顿的外力作用, 求此物体的运动规律。

解: 设平衡位置为坐标原点, 则

$$\begin{cases} 4 \frac{d^2 x}{dt^2} = 8 \sin 4t - 64x \\ x \Big|_{t=0} = -0.5, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 2 \sin 4t \quad (2)$$

对应齐次方程的通解为

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$$

设  $x^* = t(A \cos 4t + B \sin 4t)$ , 代入 (2) 可得  $A = -\frac{1}{4}$ ,  $B = 0$ , 故  $x^* = -\frac{1}{4} t \cos 4t$ ,

方程 (2) 的通解为

$$x = -\frac{1}{4} t \cos 4t + c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$$

六、(10分) 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内可导且  $f'(x) \geq k > 0$ ,  $f(0) < 0$ , 证明  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有唯一零点。

证: 由拉格朗日中值定理得: 对于  $x \in (0, +\infty)$  有

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x \geq kx + f(0) \quad \xi \in (0, x)$$

故当  $x > -\frac{1}{k}f(0)$  时,  $f(x) > 0$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$ , 又  $f(0) < 0$ , 由此可知在  $(0, +\infty)$  内,  $f(x)$  至少有一个零点。

又已知  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加, 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内至少有一个零点。

总之,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有唯一零点。

## 清 华 大 学

( I )

一、(10分) 已知  $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctg \frac{y}{x}}$ , 求  $y'$  及  $y''$

解: 两边取对数得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \arctg \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

再对  $x$  求导

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\therefore y' = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y \text{ 且 } x \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore y'' &= \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \quad (x \neq y, \quad x \neq 0) \end{aligned}$$

二、(10分) 计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$$

其中 $L$ 是从点 $A(-a, 0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $y \geq 0$ ) 到点 $B(a, 0)$ 的弧段。

解: 
$$P = \frac{x-y}{x^2+y^2} \quad Q = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (x^2+y^2 \neq 0)$$

可见对 $xoy$ 平面上任何不包围坐标原点的单连域 $G$ 内, 曲线积分 $I$ 与路径无关, 今取 $\widehat{AB}$ 为从点 $A$ 经 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 到 $B$ 的路径, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{\widehat{AB}} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy \\ &= \int_{\pi}^0 [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t)] dt \\ &= \int_{\pi}^0 dt = -\pi \end{aligned}$$

三、(10分) 计算二重积分

$$I = \iint_D (x+y) d\sigma$$

其中 $D$ 是抛物线 $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$ 及直线 $y = 1$ 所围成的区域。

解: 积分区域 $D$ 对称于 $y$ 轴, 而被积函数 $(x+y)$ 中的第一项是 $x$ 的奇函数, 第二项是 $x$ 的偶函数。当设 $D$ 在第一象限部分为 $D_0$ 时,

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) d\sigma &= \iint_D x d\sigma + \iint_D y d\sigma = \iint_D y d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_0} y d\sigma = 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} y dx = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

四、(10分) 将  $\cos x$  在  $0 < x < \pi$  内展开成以  $2\pi$  为周期的正弦富氏级数, 并在  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  上写出该级数的和函数, 再画出其图形

解:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] dx$$

当  $n=1$  时  $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$

当  $n=2, 3, \dots$  时

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{-\cos(n-1)x}{n-1} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right]$$

$$= \frac{1 + (-1)^n}{\pi} \left( \frac{2n}{n^2 - 1} \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} & n = 2k \end{cases}$$

$$\therefore \cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2kx \quad (0 < x < \pi)$$

在  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  上该级数的和函数为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2kx = \begin{cases} \cos x & -2\pi < x < -\pi \text{ 或 } 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \text{ 或 } \pi < x < 2\pi \\ 0 & x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \end{cases}$$

其图形如图 1-2

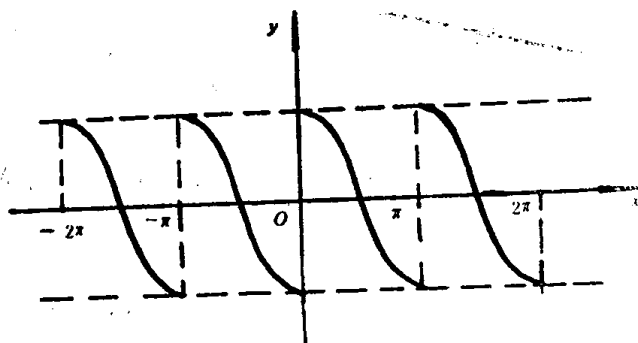


图 1-2