1985
机械类硕士研究生试题汇解

《试题汇解》编写组编
熊大章　王价人　主审

吉林科学技术出版社

内 容 简 介

本书编辑了全国二十多所高等工科院、校、所，1985年硕士研究生的入学试题及其解答。试题范围包括：高等数学、理论力学、材料力学、机械原理、机械零件、金属切削原理及刀具、机械制造工艺学、金属切削机床、综合试题。

本书对准备报考研究生的读者，能起到辅导作用。对工科院校在校学生、电视大学学生及广大自修读者是一本适宜的参考书，也可供从事有关学科教学工作的教师参考。

1985年机械类硕士研究生
试 题 汇 解
《试题汇解》编写组编
熊大章 王价人 主审
*
吉林科学技术出版社出版 吉林省新华书店发行
吉林省科技情报所印刷厂印刷
*
787×1092毫米16开本 26.625印张 643,000字
1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷
印数：1—10,000册
统一书号：13376·33 定价：5.60元

编 写 说 明

为了满足广大读者，特别是准备报考工科研究生读者的追切需要，我们收集编写了这本试题汇解。试题涉及的学科范围广，内容丰富，具有一定的深广度和难度，对准备报考研究生的读者是一本比较理想的参考书。对在校学生和从事有关学科教学工作的教师也是一本较好的参考书。

本书的编写工作由郭春生同志主持。高等数学部分由王喜臣同志编写，理论力学部分由孙凤亭同志编写，材料力学部分由陈文信同志编写，机械原理部分由贾贵奇同志编写，机械零件部分由张贵其同志编写，金属切削原理及刀具部分由谭云成同志编写，机械制造工艺学部分由陆博良同志编写，金属切削机床部分由王毅同志编写，综合试题部分由徐洪吉同志编写。

书中的试题，除个别院校外，均由编者解题。由于我们水平有限，时间仓促，书中有缺点错误之处，请广大读者批评指正。

本书由熊大章教授、王价人副教授主审。

在此，我们向提供试题的有关院校以及关心本书编写和出版工作的有关同志表示衷心的感谢。

长春光学精密机械学院

精密机械工程系

《试题汇解》编写组

一九八五年八月

目　　录

高等数学

理论力学

材料力学

机械原理

机械零件

金属切削原理及刀具

机械制造工艺学

金属切削机床

综合试题

高 等 数 学

吉 林 工 业 大 学

一、（10分）已知 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,\ y,\ z)dz$

试指出积分区域是由什么曲面围成的，并改变积分次序

1．先对 y，再对 z，最后对 x 积分

2．先对 x，再对 y，最后对 z 积分

解：积分域为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 围成的。

1．
$$I=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{1}dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy$$
$$+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy$$

2．
$$I=\int_{0}^{1}dz\int_{-z}^{z}dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx$$

二、（10分）已知 $F(x,\ x+y,\ x+y+z)=0$ 求 z 对 x 的二阶导数

解：将给定关系式对 x 求导

$$\because\quad F_1+F_2+F_3(1+z_x)=0$$

$$\therefore\quad Z_x=-\frac{F_1+F_2+F_3}{F_3}$$

$$Z_{xx}=\frac{[F_{31}+F_{32}+F_{33}(1+Z_x)](F_1+F_2+F_3)}{F_3^2}$$
$$-\frac{F_{11}+F_{12}+F_{13}(1+Z_x)+F_{21}+F_{22}+F_{23}(1+Z_x)+F_{31}+F_{32}+F_{33}(1+Z_x)}{F_3}$$
$$=-\frac{F_3^2(F_{11}+2F_{12}+F_{22})-2(F_1+F_2)F_3(F_{13}+F_{23})+(F_1+F_2)^2F_{33}}{F_3^3}$$

三、（10分）解方程 $\frac{1}{x+y}+\frac{4y^2}{(x+y)^3}+\left(\frac{1}{x+y}-\frac{4xy}{(x+y)^3}\right)y'=0$

解：设 $z=z(x)=x+y(x)$，则 $y'=z'-1$ 代入原方程

$$\frac{1}{z}+\frac{4(z-x)^2}{z^3}+\left(\frac{1}{z}-\frac{4x(z-x)}{z^3}\right)(z'-1)=0$$

$\therefore \qquad z' = \dfrac{4z(x-z)}{(z-2x)^2}$

令 $\qquad \dfrac{z}{x} = u(x)$ ，则$u + xu' = \dfrac{4u(1-u)}{(u-2)^2}$，化简得

$$\frac{u^2-4u+4}{u^3}\,du = -\frac{1}{x}dx$$

$\therefore \qquad \ln|u| + \dfrac{4}{u} - \dfrac{2}{u^2} = -\ln|x| + \ln c$

$\therefore \qquad \ln\left|\dfrac{x+y}{x}\right| + \dfrac{4x}{x+y} - \dfrac{2x^2}{(x+y)^2} = \ln\left|\dfrac{c}{x}\right|$

即 $\qquad x + y = ce^{-\frac{2x^2+4xy}{(x+y)^2}}$

本题亦可乘以 $(x+y)^3$ 后，令 $y = xu$求解。

四、（10分） $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ n为正奇数

解： $n = 2k+1 \qquad (k = 0，1，2\cdots)$

$$原式 = \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^{2k+1} t dt = 2\cdot\frac{(2k)(2k-2)\cdots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\cdots3\cdot1}$$

五、（10分）已知曲线 $y = f(x)$的参数方程为 $x = t^2$，$y = 3t - t^3$ 求拐点并作图

解： 变量的变化范围是 $-\infty < t < +\infty$，$x \geq 0$，$-\infty < y < +\infty$，y 对x 的一、二阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2t} \;; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{t^2+1}{t^3}$$

可见，$\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2}$除$t=0$处外，处处存在，而且

$$\frac{d^2y}{dx^2}\begin{cases} < 0\ , & t > 0 \\ > 0\ , & t < 0 \end{cases}$$

这说明曲线 $y = f(x)$在 $t=0$处改变凹向，故 $t=0$ 所对应的点（0，0）是曲线 $y=f(x)$的拐点。

填出下表后，可画草图如图1—1

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\frac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$
y	递增凹向上	极小 -2	递降凹向上	拐点 $(0,0)$	递增凹向下	极大 2	递降凹向下

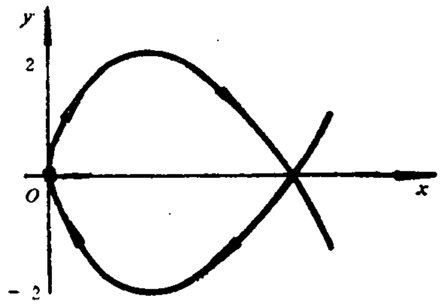

图 1—1

六、（10分）以向量形式写出并证明：三维空间中的点到直线的距离公式

解： 设 P_1 是不在直线 l 上的点，D 是点 P_1 到直线 l 的距离，取 l 上一点 P_0 和直线 L 的方向矢量 $\vec{L}$，则由矢量积的几何意义和平行四边形面积公式可知

$$D\times\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{L}\times\overrightarrow{P_0P_1}\right|$$

于是得距离公式为 $$D=\frac{\left|\vec{L}\times\overrightarrow{P_0P_1}\right|}{\left|\vec{L}\right|}$$

七、（10分）证明，若

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=q$ 存在，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ （其中 $u_n>0$） 当 $q>1$ 时收敛，当 $q<1$ 时发散。

证： 由 $u_n>0$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，又由已知极限 q 存在，则任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$-\varepsilon<\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}-q<\varepsilon \qquad (*)$$

当 $q>1$ 时，取 $\varepsilon>0$ 充分小，有 $r>0$ 使 $q-\varepsilon\geq 1+r$，由（*）式有

$$\ln\frac{1}{u_n}>(1+r)\ln n$$

即 $\frac{1}{u_n}>n^{1+r}$， $0<u_n<\frac{1}{n^{1+r}}$， 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+r}}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦收敛。

当 $q<1$ 时，取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $q+\varepsilon<1$，又据（*）式可知，当 $n>N$ 时，总有

$$\ln\frac{1}{u_n}<(q+\varepsilon)\ln n\leqslant\ln n$$

即 $$u_n > \frac{1}{n}$$

而 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}u_n$发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$亦发散。

八、（10分）设$f(x)$是二阶连续可导的偶函数，且 $f''(0)\neq 0$，问 $x=0$ 是否极值点，为什么？

解：不妨设 $f''(0)>0$，由 $f''(0)$ 的连续性可知，在点 $x=0$的某一邻域内 $f''(0)>0$，而

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \qquad \xi\text{在}0,\ x\text{之间}$$

$$\therefore \quad f(x)-f(0)-f'(0)x\geq 0$$

又$\because f(-x)=f(x)$推得$f'(x)=-f'(-x)$，$f'(0)=-f'(0)$进而可知$f'(0)=0$

$$\therefore \quad f(x)-f(0)\geq 0$$

即 $x=0$是 $f(x)$的极小点，如 $f''(0)<0$时，可类似推得 $x=0$是$f(x)$ 的极大点。总之，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点。

九、（10分）已知 $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

求矩阵X

解： 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

则 $|A|\neq 0$，即 A 满秩，原矩阵方程为$XA=B$，

$$\therefore \quad X=BA^{-1}=B\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 8\\ 4 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

十、（10分）设随机变量 X与Y独立，且依次在$(-a,\ 0)$ 及$(0,\ a)$ 上服从均匀分布，$(a>0)$，求 $X+Y$的分布函数

解：
$$\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & -a<x<0\\ 0 & \text{其他，}\end{cases} \qquad \varphi_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{a} & 0<y<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

由于X与Y独立，所以二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$\varphi(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2} & -a<x<0, \quad 0<y<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

于是，$z=X+Y$的分布函数为

$$F_z(z)=P(x+y\leqslant z)=\iint\limits_D\varphi(x,\ y)d\sigma$$

其中 $$D=\{(x,\ y)\mid x+y\leqslant z\}$$

$$\therefore \quad F_Z(z)=\begin{cases} 0 & z\leqslant -a \\ \dfrac{(z+a)^2}{2a^2} & -a<z\leqslant 0 \\ \dfrac{a^2-\frac{1}{2}(a-z)^2}{a^2} & 0<z\leqslant a \\ 1 & a<z \end{cases}$$

东 北 工 学 院

一、（50分）

1．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{x^2}dx\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$

2．已知 $x^{y^2}+y^2\ln x-4=0$， 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解： 方程等号两端对x求导得

$$x^{y^2}\left(2y\ln x\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}\right)+2y\ln x\ \frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=0$$

即 $$y(x^{y^2}+1)(2\ln x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x})=0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x\ln x}$$

3． 已知 $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$， F为一次可微函数，求证

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

解： $$F_1\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2\left(-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

∴ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_1}{xF_1+yF_2}$$

类似地，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zF_2}{xF_1+yF_2}$$

两式相加即可得证。

4．计算定积分 $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+15}dx$

解： 令 $t=\sqrt{e^x-1}$， 则 $x=\ln(1+t^2)$

$$\text{原式}=\int_0^2\frac{2(1+t^2)t^2}{(t^2+4^2)(1+t^2)}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=4-\pi$$

5．计算二重积分 $\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)dxdy$，已知$D$为圆 $x^2+y^2=e^2$ 和圆 $x^2+y^2=e^4$所围区域。

解： $$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_e^{e^2}r\ln r^2dr=\pi e^2(3e^2-1)$$

6．把函数$f(x)=x(\pi-x)$在区间〔0，π）内展开为正弦级数，并写出它的和。

解： $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin nxdx=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{8}{(2k+1)^3\pi}, & n=2k+1\end{cases}$$

∴ $$f(x)=\frac{8}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3^3}\sin 3x+\frac{1}{5^3}\sin 5x+\cdots\cdots\right)\quad x\in[0,\pi]$$

这个正弦级数的和函数是以2π为周期的奇函数，它在〔$0,\pi$〕上的值等于$x(\pi-x)$

二、(10分)已知力场$\vec{F}=(3x-4y)\vec{i}+(4x+2y)\vec{j}-4y^2\vec{k}$，求一质点沿$xoy$平面内椭圆c：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$正向运动一周时，力场所作的功

解：椭圆 c 的参数方程为$x=4\cos t$，$y=3\sin t$，$z=0$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，于是功

$$W=\int_c \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_c (3x-4y)dx+(4x+2y)dy-4y^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}〔(12\cos t-12\sin t)\cdot(-4\sin t)+(16\cos t+6\sin t)\cdot 3\cos t〕dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(48-30\sin t\cos t)dt=96\pi$$

三、(10分) 把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$展为$(x-4)$的幂级数

解：$$f(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-4}{6}}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-4}{7}}$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-4}{6}\right)^n-\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-4}{7}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{6^{n+1}}-\frac{1}{7^{n+1}}\right)(x-4)^n$$

由 $\left|\frac{x-4}{6}\right|<1$和$\left|\frac{x-4}{7}\right|<1$ 得 $-2<x<10$ 和 $-3<x<11$，故所展开的级数在$(-2, 10)$内收敛。

四、(10分) 已知函数 $F(t)=\iiint_\Omega f(x^2+y^2+y^2)dxdydz$，其中$f$为可微函数，$\Omega$域为$x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，求$F'(t)$

解：作球坐标变换得

$$F(t)=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^t f(r^2)r^2\sin\theta dr=4\pi\int_0^t r^2f(r^2)dr$$

于是 $$F'(t)=4\pi t^2f(t^2)$$

五、(10分) 把质量为4千克的物体挂在一个弹簧上，弹簧系数为64牛顿／米，让此物体向上离开其平衡位置0.5米，然后放开，此物体以初速为0，而且受$8\sin 4t$牛顿的外力作用，求此物体的运动规律。

解：设平衡位置为坐标原点，则

$$\begin{cases} 4\dfrac{d^2x}{dt^2} = 8\sin 4t - 64x \\ x\Big|_{t=0} = -0.5, \quad \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 2\sin 4t \tag{2}$$

对应齐次方程的通解为

$$x = c_1\cos 4t + c_2\sin 4t$$

设 $x^* = t(A\cos 4t + B\sin 4t)$，代入（2）可得 $A = -\dfrac{1}{4}$， $B = 0$，故$x^* = -\dfrac{1}{4}t\cos 4t$，

方程（2）的通解为

$$x = -\frac{1}{4}t\cos 4t + c_1\cos 4t + c_2\sin 4t$$

六、（10分）设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$内可导且 $f'(x) \geq k > 0$，$f(0) < 0$，证明 $f(x)$在$(0, +\infty)$内有唯一零点。

证：由拉格朗日中值定理得：对于 $x \in (0, +\infty)$ 有

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x \geq kx + f(0) \qquad \xi \in (0, x)$$

故当$x > -\dfrac{1}{k}f(0)$时，　$f(x) > 0$，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geq 0$，又 $f(0) < 0$，　由此可知在 $(0, +\infty)$内，$f(x)$ 至少有一个零点。

又已知$f'(x) > 0$，所以$f(x)$在$(0, +\infty)$内单调增加，故 $f(x)$ 在$(0, +\infty)$内至少有一个零点。

总之，$f(x)$在 $(0, +\infty)$内有唯一零点。

清 华 大 学

（Ⅰ）

一、（10分）已知$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$，求 y' 及 y''

解：两边取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$$

再对 x 求导

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} \qquad (x \neq 0)$$

$\therefore \qquad y' = \dfrac{x+y}{x-y} \qquad (x \neq y \text{ 且 } x \neq 0)$

$\therefore \qquad y'' = \dfrac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$

$$= \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \qquad (x \neq y, \quad x \neq 0)$$

二、（10分）计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

其中L是从点A（$-a$，0）经上半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$y \geq 0$）到点$B$（$a$,0）的弧段。

解： $\qquad P = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \qquad Q = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (x^2+y^2 \neq 0)$$

可见对xoy平面上任何不包围坐标原点的单连域G内，曲线积分I与路径无关，今取$\widehat{AB}$为从点A经$y=\sqrt{a^2-x^2}$到B的路径，于是

$$I = \int_{\widehat{AB}} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$$

$$= \int_\pi^0 [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t(\cos t]dt$$

$$= \int_\pi^0 dt = -\pi$$

三、（10分）计算二重积分

$$I = \iint\limits_D (x+y)d\sigma$$

其中D是抛物线$y=x^2$，$y=4x^2$及直线$y=1$所围成的区域。

解： 积分区域D对称于y轴，而被积函数（$x+y$）中的第一项是x的奇函数，第二项是x的偶函数。当设D在第一象限部分为D_0时，

$$\iint\limits_D (x+y)\,d\sigma = \iint\limits_D x d\sigma + \iint\limits_D y d\sigma = \iint\limits_D y d\sigma$$

$$= 2\iint\limits_{D_0} y d\sigma = 2\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} y dx = \frac{2}{5}$$

四、（10分）　将 $\cos x$ 在 $0<x<\pi$ 内展开成以 2π 为周期的正弦富氏级数，并在 $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上写出该级数的和函数，再画出其图形

解：

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]dx$$

当 $n=1$ 时　$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0$

当 $n=2$，3…时

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n-1}}{n+1}+\frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right]$$

$$=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}\right)$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ \dfrac{8k}{\pi(4k^2-1)} & n=2k\end{cases}$$

$$\therefore\quad \cos x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\cdot\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx\qquad(0<x<\pi)$$

在 $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上该级数的和函数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\cdot\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx=\begin{cases}\cos x & -2\pi<x<-\pi\text{或}0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\text{或}\pi<x<2\pi\\ 0 & x=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi\end{cases}$$

其图形如图1—2

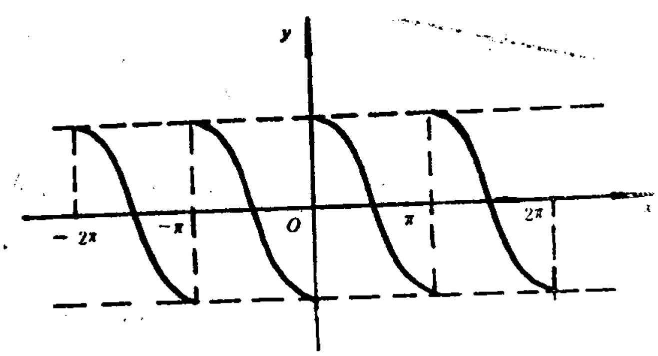

图1—2