丛书主编 锴 桢

高二 数学（上）

试验修订本

龙门图解

学科主编 赵国良

本册主编 张 健 王学玲

开创

教辅读图时代

龍門書局

责任编辑 王风雷 夏少宁 封面设计 企鹅美编室

亲爱的读者：

感谢您选择《龙门图解》！

这套用图解形式编写的教辅书是我们的新尝试，一年来虽殚精竭虑，但因水平和能力所限，我们感到这套书仍有许多不尽如人意之处。我们深信，广大读者一定能为我们提供无穷的智慧和无尽的素材。在此，我们真诚地希望您能写信告诉我们：您对《龙门图解》有什么意见和建议；您有什么用图解形式学习的好方法、金点子；您还希望看到哪些领域的图解类书籍……您的这些宝贵意见将用于《龙门图解》的修订和品牌的延伸。相信在广大读者的支持下，《龙门图解》一定能茁壮成长。

来信请寄：

北京东黄城根北街16号龙门书局《龙门图解》编委会收。邮编100717

愿《龙门图解》成为您的、我的、大家的好朋友！

龙门书局

ISBN 7-80160-505-5

9 787801 605054 >

ISBN 7-80160-505-5/G · 495

定价：11.00元

试验修订本

龙门图解

高二数学（上）

学科主编　赵国良
本册主编　张　健　王学玲
编　　写　赵国良　张　健　王学玲

龍門書局
2002

龙门图解

高二数学试验修订本(上)

本册主编：张　健　王学玲

责任编辑：王风雷　夏少宁

出　　版：龍門書局

地　　址：北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

网　　址：http://www.sciencep.com

印　　刷：中国科学院印刷厂

发　　行：科学出版社总发行　　各地书店经销

版　　次：2002年6月第一版

印　　次：2002年6月第一次印刷

开　　本：890×1240　A5

印　　张：7 3/4

字　　数：194 000

印　　数：1—60 000

书　　号：ISBN 7-80160-505-5/G·495

定　　价：11.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

教辅书的升华

—— 代编者话

随着我国进入 WTO，竞争全球化的大市场对国内教辅书界的影响也日益加剧，原来意义上的（传统）教辅产品，不论其表现形式和策划思路，都已与发展迅速的国际同类书市场和国内其他类图书市场有了很大差距。显而易见，教辅书选题策划思路的创新、升华势在必行。

21 世纪是信息传播手段高度发达的时代，其内涵浓缩到传统的出版领域，具体而言就是指更多的叙述文字被风趣、幽默、直观、简单的图片所替代。而这种新鲜、先进手法在教辅书界的运用，就是我们这套书策划的初衷。因其表现手法的图文并茂，知识解答的浅显易懂，故起名《龙门图解》。

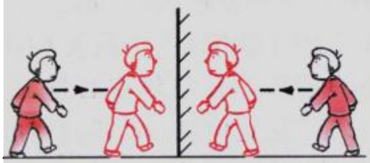
本套书的编写原则有三：

- 与教材同步，内容源于教材，丰富于教材。
- 充分注意到图、表在知识讲解中的重要性，使繁杂的知识通过直观的图解而变得浅显易懂。
- 重点考虑图、表的恰当运用，以使知识的深度、趣味二者和谐统一，从而达到应试教育与素质教育的有机结合。

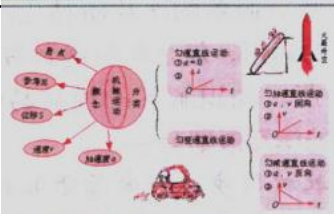
经过一年多的努力，本书终于面世了。翻开书你马上会感到：精心设计的版式和 20000 多张图片令人耳目一新；仔细再看，小小的图片和清晰的版式对知识的解答竟会有如此大的作用。其实，本书的优点还远不止此，概括起来有以下八点：

一、知识导入自然化。每章、每单元或课有一段引文，引导学生自然切入主体。

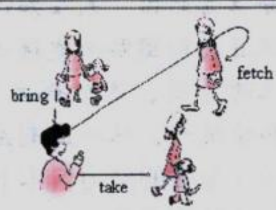
二、枯燥知识兴趣化。一道令人头疼的物理题，配上一组人物卡通示意图，顿时会激发学生的解题兴趣。



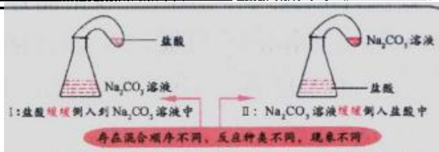
三、知识关联条理化。错综复杂的知识点，用一组图表来归纳，让学生一目了然。



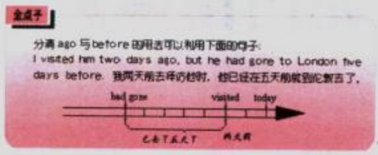
四、抽象问题形象化。很难区分的几个英语动词，用图来表达，可深领其义。



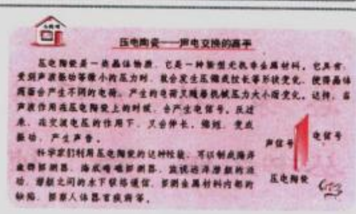
五、关键之处点评化。



六、巧学巧记精练化。设“金点子”栏目，用精练的语言，或通俗易记的方法，记忆一些知识点。



七、科普知识休闲化。设“小网吧”栏目，讲述一些相关的科普小知识，开阔学生的眼界。



八、知识检测星级化。课后检测题，用星号来区分难易程度。无星表示基础题，一个星表示中等题，两星表示有难度的题，三个星表示需要学生动脑筋才能解决的提高题。

出版这样一套尚无先例的丛书确实困难较大。一年多的时间毕竟太短了，丛书名为《龙门图解》，其实图、表的分量还不够，还有许多要改进的地方，我们仅仅是刚刚开始走出了第一步。诚心希望广大读者给我们提出宝贵的意见。

丛书编委会

2002.6

《龙门图解》系列丛书

总 策 划　龙门书局

丛书主编　锴　桢

编　　委　田庆元 边永朴 古城威
石　磊 刘云飞 江　哲
陈大捷 张世宏 张希彬
赵国良 霍晓宏

（按姓氏笔画排列）

执行编委　王风雷

执行策划　曹强利

设计制作　企鹅版务技术有限公司

目录

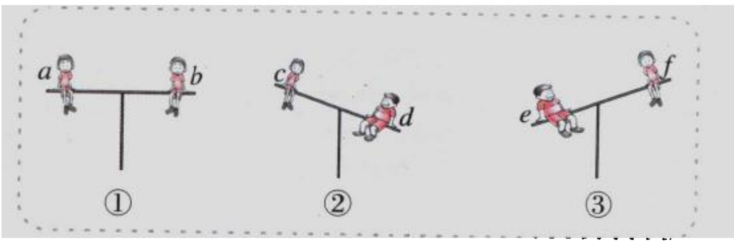
龙门图解

第六章 不等式

导引

现实世界中,数量关系可分为两类:相等,不相等.

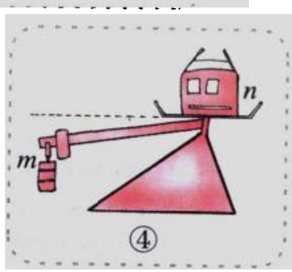
如,在下面的三个图中,用 a、b、c、d、e、f 分别表示做跷跷板游戏的 6 个人的重量,则



图①中,$a=b$;

图②中,$c<d$;

图③中 $e>f$.



又如,在图④中,用 m 表示你所购买的商品的重量,用 n 表示天平上已有的商品的重量,这时显然是“重量不足”,用式子表示就是

$$m>n.$$

在我们的日常生活、生产和科学研究中,可以用等号“=”表示的数量关系,那是我们熟知的等式问题;可以用不等号“$<,\leqslant,>,\geqslant,\neq$”表示的数量关系,就是我们这一章要研究的问题——不等式.

在不等式这一章,我们将着重讨论:不等式的性质;不等式的证明;不等式的解法.

第六章

6.1 不等式的性质

图导

不等式的性质是解证不等式的基础，无论是证明不等式还是解不等式，都要对不等式进行合理、正确的变形，而这些变形的主要依据就是不等式的性质.

实数的顺序性

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$

$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$

$\Downarrow$

不等式的性质

(基本性质)

1. 对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$
2. 传递性：$a>b, b>c \Rightarrow a>c$
3. 可加性：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$
4. 可乘性：$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$

   $a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$

$\Longrightarrow$

(运算性质)

1. 加法：$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$
2. 减法：$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$
3. 乘法：$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$
4. 除法：$a>b>0, 0<c<d \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$
5. 乘方：$a>b>0, n\in \mathbf{N}, n>1 \Rightarrow a^n>b^n$
6. 开方：$a>b>0, n\in \mathbf{N}$ 且 $n>1$

   $\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

对于不等式的性质关键是要正确理解和运用，要弄清每一性质的条件和结论，注意条件的放宽和加强，条件与结论之间的相互联系.

图例

基础知识例解

例题 1

对于实数 a、b、c，判断下列命题的真假：

1. 若 $a>b$，则 $ac<bc$
2. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$
3. 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$
4. 若 $a<b<0$，则 $a^2>ab>b^2$
5. 若 $a<b<0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
6. 若 $a<b<0$，则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$
7. 若 $a<b<0$，则 $|a|>|b|$
8. 若 $a<b<0$，则 $\frac{b}{a}<1$
9. 若 $c>a>b>0$，则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$
10. 若 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0,b<0$

自助解题

解题的关键是记清不等式的性质

1. 因 c 的正负或是否为零未知，无法判断 ac 与 bc 的大小，所以是假命题.
2. 因 $c^2\geqslant0$，所以 $c=0$ 时，有 $ac^2=bc^2$，故为假命题.
3. 由 $ac^2>bc^2$，知 $c\neq0$，$c^2>0$，所以为真命题.

在不等式两边同乘(除)一数(式)时，必须确定正负，还应注意是否为零

4. 由 $\begin{cases}a<b\\a<0\end{cases}\Rightarrow a^2>ab$，又 $\begin{cases}a<b\\b<0\end{cases}\Rightarrow ab>b^2$，所以为真命题.
5. 例如 $-3<-2<0$，但 $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$，所以为假命题.

若是假命题，只需举一反例

第六章

事实上,由 $a<b<0 \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

6. 因 $a<b<0 \Rightarrow \begin{cases}-a>-b>0\\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-a>-b>0\\ -\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0\end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b}>\frac{b}{a}$,所以为假命题.

7. 两负实数,数值小的其绝对值反而大,所以为真命题.

8. 同(7),$|a|>|b|>0 \Rightarrow \left|\frac{b}{a}\right|<1 \Rightarrow \frac{b}{a}<1$,所以为真命题.

9. 因 $-a<-b<0 \Rightarrow 0<c-a<c-b \Rightarrow \frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$.

又 $\begin{cases}\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0\\ a>b>0\end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$,所以为真命题.

若是真命题,应说明理由或证明

10. 因 $\begin{cases}a-b>0\\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b-a<0\\ \frac{b-a}{ab}>0\end{cases} \Rightarrow ab<0$. 又 $a>b$,$\therefore a>0,b<0$,所以为真命题.

第六章

即学即练

判断下列命题是否正确,正确的在题后括号内打“√”,错误的打“×”.

(1) $a>b \Rightarrow \frac{a}{b}>1$ ( )　　(2) $a>b \Rightarrow a^2>b^2$ ( )

(3) $a^3>b^3 \Leftrightarrow a>b$ ( )　　(4) $a>b \Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}(n\in \mathbf{N}^*)$ ( )

(5) $|a|>b \Rightarrow a^2>b^2$ ( )　　(6) $a>|b| \Rightarrow a^2>b^2$ ( )

(7) $|a|>|b| \Leftrightarrow a^2>b^2$ ( )　　(8) $a>b \Rightarrow |a|>b$ ( )

答案 (1) ×　(2) ×　(3) √　(4) √

(5) ×　(6) √　(7) √　(8) √

例题 2

$a>b>0$ 是 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 的(　　)条件

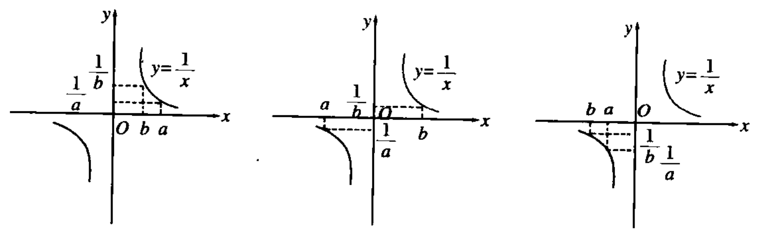
A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

自助解题

[解法一] 将本题中的符号语言转化为文字语言，即："两个正数中较大数的倒数反而小于较小数的倒数是否成立？反之是否成立？"显然 $a>b>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，但反之不成立，因此选 A.

[解法二] 可构造函数 $y=\frac{1}{x}$，观察 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，如图：



由图可知，当 $a>b>0$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立. 反之不成立.因为 $a<0<b$ 或 $b<a<0$ 也能推出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，因此选 A.

即学即练

1. 若 $a,b,c,d \in \mathbf{R}$，则下面四个命题中，正确的命题是(　　)

A. 若 $a>b,c>b$，则 $a>c$　　B. 若 $a>-b$，则 $c-a<c+b$

C. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$　　D. 若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$

2. $a<b$ 且 $c<d$ 的必要条件是(　　)

A. $a+c<b+d$　　B. $a-c<b-d$

C. $ac<bd$　　D. $a+c>b+d$

3. 以下四个条件,能使$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的充分条件的个数是(　　)

① $b>0>a$　② $0>a>b$　③ $a>0>b$　④ $a>b>0$

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

4. 若 a、$b\in\mathbf{R}$,则 $a>b$ 与$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$同时成立的充要条件是(　　)

A. $a>0,b<0$　B. $a>0,b>0$

C. $a<0,b>0$　D. $a<0,b<0$

答案　1. B　2. A　3. C　4. A

例题 3

若 $1<a<b<a^2$,则 $\log_b a,\log_a b,\log_a\frac{a}{b},\log_b\frac{b}{a}$的大小关系是(　　)

A. $\log_a\frac{a}{b}<\log_b\frac{b}{a}<\log_a b<\log_b a$

B. $\log_a\frac{a}{b}<\log_b\frac{b}{a}<\log_b a<\log_a b$

C. $\log_a b<\log_a\frac{a}{b}<\log_b\frac{b}{a}$

D. $\log_a\frac{a}{b}>\log_b a$

自助解题

由已知,$\log_a b\in(1,2)$, $\log_b a\in(0,1)$.

$\therefore \log_b a<\log_a b$.

又 $\log_a\frac{a}{b}=1-\log_a b<0$.　$\log_b\frac{b}{a}=1-\log_b a\in(0,1)$

$\therefore \log_a\frac{a}{b}<\log_b\frac{b}{a}$.　$\because b<a^2$,　$\therefore a>\frac{b}{a}$　$\therefore \log_b a>\log_b\frac{b}{a}$.

故选 B.

即学即练

1. 设 $a<0,-1<b<0$,则 a,ab,ab^2三者的大小关系为______.

2. 若 $a^2+a<0$,则 $a^2,a,-a^2,-a$ 由大到小排列是______.

第六章

3. 若 $a>1,b\in(-1,0)$，则 $a,b,-a,-b,-ab$ 由大到小排列是______.

答案 1. $a<ab^2<ab$ 2. $-a>a^2>-a^2>a$

3. $a>-ab>-b>b>-a$

例题 4

设 $60<a<84$，$28<b<33$，求 $a+b,a-b,\frac{a}{b}$ 的范围.

自助解题

由于目标中"$a+b$"是 a 与 b 的和，因此只需将已知不等式相加即可得到：$88<a+b<117$. 但不等式性质中，不允许两不等式直接作差和作商. 因此"$a-b$"和"$\frac{a}{b}$"的范围必须转化.

由 $28<b<33$ 得 $-33<-b<-28$，又 $60<a<84$，$\therefore 27<a+(-b)<56$，即 $27<a-b<56$. 同理"$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$"，可由 b 的范围取倒数得 $\frac{1}{b}$ 的范围，再与 a 的范围相乘得 $\frac{a}{b}$ 范围，易得 $\frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$.

即学即练

1. 已知：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\alpha+\beta}{2}$、$\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的范围分别是( )

A. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$、$(-\frac{\pi}{2},0)$　　B. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$、$[-\frac{\pi}{2},0]$

C. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$、$(-\frac{\pi}{2},0)$　　D. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$、$[-\frac{\pi}{2},0)$

2. 已知：$1<a<2,1\leqslant b\leqslant 2$.求证：$\frac{1}{2}<\frac{b}{a}<2$

答案 1. D 2. 证明略

例题 5

m 是何范围时，关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x+(5-m)=0$ 的两根都大于 2?

第六章

自助解题

错解：设原方程的两根为 x_1、x_2，根据题意有：

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x_1>2\\ x_2>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)^2-4(5-m)\geqslant 0\\ x_1+x_2=-(m-2)>4\\ x_1x_2=5-m>4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 4\text{ 或 }m\leqslant -4\\ m<-2\\ m<1\end{cases}\Leftrightarrow m\leqslant -4$$

取 $m=-5<4$，此时原方程变为：$x^2-7x+10=0$，显然有一根为 2，不符合题意，所以解法不正确. 错在哪里呢？这要看前面的推理过程.

由 $\begin{cases}x_1>2\\ x_2>2\end{cases}$ 推出 $\begin{cases}x_1+x_2>4\\ x_1\cdot x_2>4\end{cases}$ 是正确的，但由 $\begin{cases}x_1+x_2>4\\ x_1x_2>4\end{cases}$ 不能推出 $\begin{cases}x_1>2\\ x_2>2\end{cases}$. 原题要求 m 的取值应满足 $\begin{cases}x_1>2\\ x_2>2\end{cases}$，我们用 $\begin{cases}x_1+x_2>4\\ x_1x_2>4\end{cases}$ 代替它，破坏了等价变形，使所求范围扩大了. 因此，出现了上面的错误解法.

正解 1：设原方程的两根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=2-m$，$x_1x_2=5-m$.

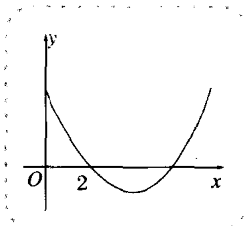
$$\begin{cases}x_1>2\\ x_2>2\\ \Delta\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2>0\\ x_2-2>0\\ \Delta\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-2)(x_2-2)>0\\ (x_1-2)+(x_2-2)>0\\ \Delta\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1x_2-2(x_1+x_2)+4>0\\ x_1+x_2>4\\ \Delta\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5-m-2(2-m)+4>0\\ 2-m>4\\ m\geqslant 4\text{ 或 }m\leqslant -4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-5\\ m<-2\\ m\geqslant 4\text{ 或 }m\leqslant -4\end{cases}\Leftrightarrow -5<m\leqslant -4.$$

正解 2：二次方程的问题还可联想二次函数，将代数问题转化为几何问题. 设 $f(x)=x^2+(m-2)x+(5-m)$，则

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{m-2}{2}>2\\ f(2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 4\text{ 或 }m\leqslant -4\\ m<-2\\ 4+2(m-2)+5-m>0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -5<m\leqslant -4.$



即学即练

当不等式 $x^2+px+10\leqslant 0$ 恰有一个解时，则实数 p 的值是______.

第六章