必胜数学完全档案

BI SHENG SHU XUE WAN QUAN DANG AN

高中二年级

全国重点中学特高级教师　编写

全力打造

- 全　全过程　全训练　全综合
- 新　新理念　新方法　新题型
- 真　真精讲　真精练　真解析

中国少年儿童出版社

必胜数学完全档案

BI SHENG SHU XUE WAN QUAN DANG AN

高中二年级

主编：张乃达
编写：尤善培　孔晓燕　汤希龙
朱　慧　袁　桐

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

必胜完全档案．高二数学 / 张乃达编．—北京：中国少年儿童出版社，2002

ISBN 7－5007－3620－7

Ⅰ．必… Ⅱ．张… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 034451 号

必胜数学·完全档案

高二数学

BI SHENG SHU XUE WAN QUAN DANG AN

出版发行： 中国少年儿童出版社
出 版 人：

主　　编： 张乃达	**装帧设计：** 钱　明
主持编辑： 陈效师	**封面设计：** 徐　枝
责任编辑： 张　华	**责任印务：** 栾永生
社　址： 北京东四十二条二十一号	**邮政编码：** 100708
电　话： 010－64032266	**咨询电话：** 65956688-31
印　刷： 北京金特印刷厂	**经　销：** 全国新华书店
开 本： 850×1168　1/32	**印 张：** 17.5 印张
2002 年 6 月北京第 1 版	2002 年 7 月北京第 1 次印刷
字 数： 402 千字	**印 数：** 1—10000 册

ISBN 7—5007—3620—7/G·2412

全套（五册）总定价：89.00 元　　本册：17.80 元

前　言

本套丛书是以全日制普通初级和高级中学教科书（试验修订本）为依据而编写的，供使用人教版最新教材的初、高中各年级学生学习和使用。

长期以来，如何全面而系统地掌握各学科的基础知识，打牢扎实的学习基本功？如何确定和把握教材中的重点、难点，做到以点带面、融汇贯通？如何运用所学的知识正确地解析各类习题（特别是疑难问题），做到举一反三、触类旁通？以及如何根据学子们的年龄与思维特征，逐步地启迪和培养其综合分析与创新能力？——这些一直都是广大同学与企盼子女能够学业有成的家长所共同关心，并热切渴望得到解决的问题。本丛书正是以解决这些问题为目标，汇集了目前国内一大批具有丰富教学经验的中学特、高级教师及部分资深教育专家共同精心编写的。丛书所阐述的学习方法及选用的各种例题与习题，都是这些著名的教育专家多年从事教学工作心血的结晶。其中有许多是第一次与广大读者见面，它的出版，为我国广阔的教辅图书市场增添了一颗绚丽的明星。

全书共设有**“目标浏览”**、**“实践探究”**、**“点拨引导”**、**“开拓创新”**、**“知识结构”**、**“专题研究”**、**“反馈评估”**等七个栏目，从不同角度和侧面对教材中的知识点、重点和难点进行了扼要的介绍、细致的讲解、全面的分析与深入的研讨。是一套与教材紧密结合，具有极强的指导性、实用性与可读性的优秀综合助学读物。丛书的主要特点有：

点面结合　结构合理　“目标浏览”，简要地指出了每节知识和

能力的要求，提示重点、难点。“知识结构”，对全章知识的相互关系或体系，作出具体说明或列出知识网络图，加以归纳和总结，重点明确突出，知识体系脉络清晰。

精讲细解 注重实效 “实践探究”，精选部分典型例题，详加分析讲解，力求使学生领会解题思路、夯实基础。“点拨引导”，对重点、难点作深入的剖析、释疑，对学生疑惑的问题，给予科学、详尽的点拨。以梯次递进的有效方式，将对一般问题的回答与对疑难问题的解析，浑然溶为一体。

循序渐进 拓展创新 “开拓创新”，对有关知识作了适当的引伸、扩展，介绍和探讨了不同的解题方法及实际应用中有创意的问题，进一步提升了学生的智能水平。“专题研究”，对各章节中重要的有综合意义的问题或方法，进行了深入的探究和拓展。这两个栏目的设立，为学生认识能力与思维能力的提高，开辟了广阔的空间。

自检自测 寓教于练 “反馈评估”，每一小节均精选了一定数量与教学内容密切联系的精典试题，以供学生自我训练与评估使用。在每章（单元）之后，又设有针对性很强的测试卷，以便学生自我检测之用。习题演练是学习的一项极为重要的内容，也为学生检测自己的理解、论证与解题能力，提供了一条佳径。

书山有路勤为径，学海无涯“巧”作舟。我们所说的“巧”，是指能迅速地掌握准确的基本概念、娴熟的解题技巧、富有想象力的创新思维，而这正是我们编写此书的宗旨。同时，也是我们献给广大师生与读者的一份厚礼！

编者

2002年6月

目　　录

第六章　不等式……………………………………………………… 1

6.1　不等式的性质 ……………………………………………… 1

6.2　算术平均数与几何平均数 ………………………………… 8

6.3　不等式的证明……………………………………………… 18

6.4　不等式的解法举例………………………………………… 31

6.5　含绝对值的不等式………………………………………… 40

本章小结 ………………………………………………………… 50

本章评估测试 …………………………………………………… 54

第七章　直线和圆的方程 ………………………………………… 56

7.1　直线的倾斜角和斜率……………………………………… 56

7.2　直线的方程………………………………………………… 61

7.3　两条直线的位置关系……………………………………… 71

7.4　简单的线性规划…………………………………………… 90

7.5　研究性课题与实习作业:线性规划的实际应用 ……… 90

单元评估测试(7.1～7.5)……………………………………… 100

7.6　曲线和方程 ……………………………………………… 104

7.7　圆的方程 ………………………………………………… 115

单元评估测试(7.6～7.7)……………………………………… 135

本章小结………………………………………………………… 138

本章评估测试…………………………………………………… 159

第八章 圆锥曲线方程 …… 162
一、椭圆 …… 162
8.1 椭圆及其标准方程 …… 162
8.2 椭圆的简单几何性质 …… 171
单元评估测试(8.1～8.2) …… 186
二、双曲线 …… 189
8.3 双曲线及其标准方程 …… 189
8.4 双曲线的简单几何性质 …… 196
单元评估测试(8.3～8.4) …… 210
三、抛物线 …… 213
8.5 抛物线及其标准方程 …… 213
8.6 抛物线的简单几何性质 …… 213
单元评估测试(8.5～8.6) …… 229
本章小结 …… 232
本章评估测试 …… 253

第九章 直线、平面、简单几何体 …… 257
一、空间直线和平面 …… 257
9.1 平面 …… 257
9.2 空间直线 …… 268
9.3 直线与平面平行的判定和性质 …… 285
9.4 直线与平面垂直的判定与性质 …… 299
9.5 两个平面平行的判定和性质 …… 328
9.6 两个平面垂直的判定和性质 …… 339
二、简单几何体 …… 363
9.7 棱柱 …… 363
9.8 棱锥 …… 388

9.9　研究性课题:多面体欧拉公式的发现…………………… 414
9.10　球…………………………………………………………… 419
本章小结…………………………………………………………… 436
本章评估测试……………………………………………………… 444

第十章　排列、组合和概率 ……………………………………… 450
一、排列与组合 ………………………………………………… 450
10.1　分类计数原理和分步计数原理……………………………… 450
10.2　排列………………………………………………………… 457
10.3　组合………………………………………………………… 468
10.4　二项式定理………………………………………………… 479
单元评估测试(10.1～10.4)…………………………………… 490
二、概率 ………………………………………………………… 493
10.5　随机事件的概率…………………………………………… 493
10.6　互斥事件有一个发生的概率……………………………… 505
10.7　相互独立事件同时发生的概率…………………………… 511
单元评估测试(10.5～10.7)…………………………………… 519
本章小结…………………………………………………………… 522
本章评估测试……………………………………………………… 524

附录　反馈评估、测试题的解答和提示 ………………………… 527

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

【目标浏览】

1. 熟练掌握实数大小比较的依据：

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

能利用比较实数大小的依据，将比较大小的问题转化为研究两数(或式)的差的符号问题.

2. 理解不等式的性质及其证明.

【点拨引导】

1. 实数有两大特征. 一是任意实数的平方不小于0，即“$a\in\mathbf{R}\Leftrightarrow a^2\geqslant 0$”，当且仅当 $a=0$ 时，才有 $a^2=0$. 第二个特征是每两个实数都可以比较大小. 这就是说，给完了两个实数，就一定可以比较大小；反之，可以比较大小的两个数一定是实数. 本章的内容都是在实数范围内研究的.

2. 比较大小的依据是本节内容的重点. 比较两个实数的大小，归结为判断两个实数的差的符号(至于差的值究竟是多少，在这里无关紧要). 应当记住，为了说明差的符号，可以采用配方法、分解因式法等各种不同的方法. 方法的种类不限，关键是要能明确差的符号.

3. 不等式的性质中有些是很明显、甚至是常用过的结论. 本节系统整理了不等式的性质. 更重要的是要利用比较大小的依据

对性质加以证明．学习这些性质时，既要会用性质，还要学会证明性质的方法．

例如，已知 $a>b$，那么$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$哪个大？

如果用比较大小的依据，求差$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$，变形为$\frac{b-a}{ab}$．$\because$ $a>b$，$\therefore$ $b-a<0$，判断差的符号就要看 ab 的正负，即当 $ab>0$时，由 $a>b$ 可推出$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；当 $ab<0$，即 $a>0$ 且 $b<0$ 时，则有$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$．

如果利用性质 4，则由 $a>b$，如果 $ab>0$ 则在 $a>b$ 的两边同乘以$\frac{1}{ab}$，可得$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$；如果 $ab<0$，则有$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$．

这说明，如果会证明性质定理，可以得出结论；如果熟悉性质定理，可以更快些得出结论．否则会感到无以对答．

4．性质定理 3 是移项法则的基础．定理 3 的推论则是"同向不等式"相加法则的依据．定理 4 有两种不同的结果，乘数 c 也可能是式子．例如，$c\neq0$ 时，可以由 $a>b$ 推出$ac^2>bc^2$；如果只已知 $c\in\mathbf{R}$，则由 $a>b$ 只能推出$ac^2\geqslant bc^2$．

5．性质定理 5 的证明用的是反证法．把定理 4 的推论 2 与定理 5 结合起来，还可以得到"若 $a>b>0$，s 为正有理数，那么 $a^s>b^s$"．

反证法是应当掌握的证明方法，要否定原命题，必须"穷举"．否定$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，即$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$及$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$．

说明一个结论不全正确，只须举一个反例．在课本的练习中，问：

如果 $a>b$，$c<d$，能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小？举例说明．

与性质 3 的推论类比，条件不是"同向不等式"，不能用性质 3 的推论，只要举例说明：

当 $a=5$, $b=2$, $c=4$, $d=9$ 时, $a+c=9$, $b+d=11$, 此时 $a+c<b+d$; 当 $a=5$, $b=-2$, $c=4$, $d=9$ 时, $a+c=9$, $b+d=7$, 此时 $a+c>b+d$; 在 $a=5$, $b=2$, $c=4$, $d=7$ 时, $a+c=b+d=9$.

对于另一个问题: 如果 $a>b$, $c>d$, 是否可以推出 $ac>bd$? 举例说明.

只要举一个例: $5>-3$, $3>-6$ 而 $15<18$.

【实例探究】

例 1 填空:

(1)若 $x\in(5,9)$, $y\in(2,7)$, 则 $x+y\in$________; $x-y\in$________; $xy\in$________; $\frac{x}{y}\in$________; $3-x\in$________; $\frac{2-4x}{3}\in$________; $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\in$________; $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\in$________.

(2)若 $x\in(-3,3)$, 则 $\frac{1}{x}\in$________.

分析 正确使用性质定理

解 (1)由 $x\in(5,9)$, $y\in(2,7)$得 $x+y\in(7,16)$; 由 $5<x<9$, $-7<-y<-2$, 可得 $x-y\in(-2,7)$; $xy\in(10,63)$; $5<x<9$, $\frac{1}{7}<\frac{1}{y}<\frac{1}{2}$, 得$\frac{x}{y}\in(\frac{5}{7},\frac{9}{2})$; 由 $-9<-x<-5$, 得 $3-x\in(-6,-2)$; $\frac{2-4x}{3}\in(-\frac{34}{3},-6)$; $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\in(-\frac{11}{6},2)$;

由$\frac{1}{9}<\frac{1}{x}<\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}<\frac{1}{y}<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{y}<-\frac{1}{7}$, 可得$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\in(-\frac{7}{18},\frac{2}{35})$.

(2)$x\in(-3,0)$时, $\frac{1}{x}\in(-\infty,-\frac{1}{3})$; $x\in(0,3)$时, $\frac{1}{x}\in(\frac{1}{3},+\infty)$.

$\therefore \frac{1}{x} \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$.

说明 本例的解答过程，都是创造条件使用性质定理及其推论.

例 2 比较大小：

(1)$a^4 - b^4$ 与 $4a^3(a-b)$；

(2)设 a、b、c 满足 $b + c = 6 - 4a + 3a^2$， ①

$$c - b = 4 - 4a + a^2 \quad ②$$

确定 a、b、c 间的大小关系.

分析 运用比较大小的依据及性质定理.

解 (1) $\because$
$$\begin{aligned} & a^4 - b^4 - 4a^3(a-b) \\ &= (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 - 4a^3) \\ &= (a-b)[(a^2b - a^3) + (ab^2 - a^3) + (b^3 - a^3)] \\ &= -(a-b)^2(3a^2 + 2ab + b^2) \\ &= -(a-b)^2[2a^2 + (a+b)^2] \leqslant 0 \end{aligned}$$

$\therefore \quad a^4 - b^4 \leqslant 4a^3(a-b)$.

(2)$\because \quad c - b = 4 - 4a + a^2 = (a-2)^2 \geqslant 0$，$\therefore \quad c \geqslant b$.

又$\because$
$$\begin{aligned} b - a &= [(b+c) - (c-b)] \cdot \frac{1}{2} - a \\ &= 1 + a^2 - a = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore \quad b > a$ 由定理 2 知：$c \geqslant b > a$.

【开拓创新】

1. 在练习题中常出现判断大小的选择题，可以用“特殊值法”. 例如：

已知 $0 < a < 1$，$0 < b < 1$，且 $a \neq b$，则下列代数式中值最大的是 ( )

A. $a^2 + b^2$ B. $a + b$ C. $2ab$ D. $2\sqrt{ab}$

分析 比较四个数的大小，条件又比较狭窄，可以令 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{8}$(考虑到$\sqrt{ab}$的方便)不难得到 $a^2+b^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{64}=\frac{17}{64}$，$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$，$2ab=\frac{1}{8}$，$2\sqrt{ab}=\frac{1}{2}$. 选(B).

2. 在比较大小的问题中，所给的字母常给出一个取值范围，应引起注意. 例如：

已知 $0<a<b$，$a+b=1$，比较 b 与 a^2+b^2 的大小.

分析 求差：$a^2+b^2-b=(a+b)^2-b-2ab=1-b-2ab=a-2ab=a(1-2b)=a(a+b-2b)=a(a-b)<0$. 也可以先令 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，$a^2+b^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$，得到 $a^2+b^2<b$ 的结论，再作证明.

3. 反证法证明的方法要掌握. 例如：

已知 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 求证 $a>0$ 且 $b<0$.

证明 由已知 $a>b$ 及$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，只可能有如下几种情况：$a>0$ 且 $b>0$；$a>0$ 且 $b<0$；$a<0$ 且 $b<0$.

(1) 如果 $a>0$ 且 $b>0$，则由 $a>b$，两边同乘以$\frac{1}{ab}$得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，与已知矛盾；

(2) 如果 $a<0$ 且 $b<0$，则由 $a>b$，两边同乘以$\frac{1}{ab}$，得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，与已知矛盾；

∴ 只有 $a>0$ 且 $b<0$.

4. 比较大小的方法在使用时，有时要作些变化. 例如，比较$\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{3}$的大小，直接求差不易看出差的符号，可以变形为 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$，$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$，实际上用了性质定理 5. 又如，比较大小：

$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$，其中$0<x<1$.

如果直接作差，需要通过讨论去掉绝对值符号：设 $M=|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

在$0<a<1$时，由于$1-x<1$，$1+x>1$，

$\therefore\quad M=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)>0$；

在$a>1$时，就有

$$M=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)>0$$

$\therefore$　不论$a>1$或$0<a<1$，都有

$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|\qquad(0<x<1)$.

又可以变形，作平方差：

$$|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\frac{1-x}{1+x}$$

由于$0<1-x^2<1$，$0<\dfrac{1-x}{1+x}<1$，所以不论 $a>1$ 还是 $0<a<1$，都有$|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2>0$，运用定理 5，得到$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$. $(0<x<1)$.

对于两个正数的比较大小，有时还可以用求商的办法：

设　$$Q=\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|$$

$\because\quad 1+x>1,\ 1-x<1$，

$$\therefore\quad Q=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}$$

$$=\log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}>\log_{(1+x)}(1+x)=1.$$

$\therefore\quad |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

5. 如果使用比较大小的方法时，“差”可以看作某个变量的二次函数时，也可以利用二次函数的性质来判断差的正负．例如：

已知 a、b、c 是不全相等的正数，比较大小：$a^2+b^2+c^2$ 与 $ab+bc+ca$.

解 作差 $M=(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

其中 M 可看作是关于 a 的二次函数：

$$M=f(a)=a^2-a(b+c)+b^2+c^2-bc$$

$$\because \quad \Delta=(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)$$

$$=-3b^2-3c^2+6bc$$

$$=-3(b-c)^2\leqslant 0.$$

$\therefore$ $f(a)\geqslant 0$ 对一切实数 a 都成立，

$\therefore$ $M\geqslant 0$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

【反馈评估】

一、选择题

1. $x<0$，那么 x^2，$2x$，x 的大小关系是 ( )

   A. $x^2>2x>x$　　B. $x>x^2>2x$

   C. $x<x^2<2x$　　D. $2x<x<x^2$

2. 四个命题：(1)若 $a>b$，则 $a-c>b-c$；(2)若 $a>b$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；(3)若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；(4)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$. 其中正确的个数是 ( )

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 若 $a>b$，则下列不等式中恒成立的个数是 ( )

   (1)$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　(2)$\lg(a-b)>0$　(3)$\frac{a}{b}<1$　(4)$a^b>1$

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. $a<b<0$，下列不等式中不正确的是 ( )

   A. $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$　　B. $\sqrt{a^2}<\sqrt{b^2}$

   C. $\sqrt[3]{-a}>\sqrt[3]{-b}$　　D. $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$

5. a、b 为非零实数，以下真命题中，逆命题也真的是 ( )

   A. $a>b>0\Rightarrow a^2>b^2$　　B. $a>b>0\Rightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}$

C. $a>b>0\Rightarrow|a|>|b|$ D. $a>b>0\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$

二、填空题

6. 设 $a\in(10,20)$，$b\in(15,25)$则

(1)$a+b\in$________；(2)$a-b\in$________.

7. 设 $a<b<0$，则$\frac{1}{a-b}$____$\frac{1}{a}$.

8. $ab\neq0$，则 $ab-a^2$ ____ b^2.

9. 若$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\pi$，则$\frac{1}{3}(\alpha-\beta)$的取值范围是______.

10. 已知 a、b 为整数，且 $a>b\geqslant2$. 试用反证法证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$.

证明：假设________，即$\frac{a+b}{ab}\geqslant1$

$\because$ __________，

$\therefore$ $ab\leqslant a+b<a+a=2a$.

$\therefore$ __________，与题设矛盾.

$\therefore$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$.

三、解答题

11. 已知 $a=x^2+1-2x$，$b=x^2+16-8x$，且 $3<x<4$. 比较$\sqrt{a}$与$\sqrt{b}$的大小.

12. a、b、x、$y\in\mathbf{R}$，比较大小：$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$与$(ax+by)^2$.

13. $0<x<1$，比较大小：$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$与$(a+b)^2$.

14. a、$b\in\mathbf{R}$，比较大小：a^2+b^2+1 与 $ab+a+b$.

6.2 算术平均数与几何平均数

【目标浏览】

1. 掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理及证明.

2. 会应用上述定理证明有关不等式，求有关函数式的最值.

【点拨引导】

1. 通常称“定理：a，$b\in\mathbf{R}^{+}$，那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当$a=b$时取“=”号）”为均值定理. 证明均值定理的依据是“引理”：a，$b\in\mathbf{R}$，那么$a^{2}+b^{2}\geqslant 2ab$（当且仅当$a=b$时取“=”号）.

认真观察一下，两个定理成立的条件是不同的. 引理只要求a，$b\in\mathbf{R}$，而定理要求a，$b\in\mathbf{R}^{+}$. 两者的叙述方法上又有类似的地方，即“当且仅当$a=b$时取“=”号”. 其含义是

$a=b$时，有$a^{2}+b^{2}=2ab$；

$a=b\in\mathbf{R}^{+}$时，有$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$.

反过来，如果$a^{2}+b^{2}=2ab$，则一定有$a=b$；同样，如果a，$b\in\mathbf{R}^{+}$且有$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$，则一定有$a=b$. 也就是说，当a，$b\in\mathbf{R}^{+}$时，$a=b$是$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$的充要条件.

2. $a^{2}+b^{2}\geqslant 2ab$（a、$b\in\mathbf{R}$）及$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a$，$b\in\mathbf{R}^{+}$）是公式，就意味着$a$、$b$可以代表的内容很广泛. 所谓灵活运用这两个公式解决有关问题，首先就是要看出a、b的广泛性，第二则是要创造条件使用公式. 例如：

已知$ab>0$，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$；

已知$x>1$，则$x+\frac{4}{x-1}=(x-1)+\frac{4}{x-1}+1\geqslant 5$；

已知$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\tan\theta+2\cot\theta\geqslant 2\sqrt{2}$；…

3. 由两个公式还可以得到很多推论.

例如，$ab\leqslant\frac{a^{2}+b^{2}}{2}$，$a$，$b\in\mathbf{R}$；$-ab\leqslant\frac{a^{2}+b^{2}}{2}$；