

刘运磊 主编

● 高中生无师自通丛书

数学篇



北京科学技术出版社

高中生无师自通丛书

数 学 篇

刘运磊 丁 宏 薛文杰 主 编

北京科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中生无师自通丛书: 数学篇/刘运磊等主编. —北京: 北京科学技术出版社, 1998. 8

ISBN 7-5304-2171-9

I. 高… I. 刘… III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 20645 号

北京科学技术出版社出版

(北京西直门南大街 16 号)

邮政编码: 100035

各地新华书店经销

北京博诚印刷厂印刷

*

787 毫米×1092 毫米 32 开本 15.5 印张 362 千字

1998 年 8 月第一版 1998 年 8 月第一次印刷

印数 1—11000 册

定价: 17.00 元

(凡购买北京科学技术出版社的图书, 如有
缺页、倒页、脱页者, 本社发行科负责调换)

内 容 简 介

本书以问答的形式,讲述、解答了高中学生在学习数学课程中遇到的问题。

本书共分九章,第一章幂函数、指数函数、对数函数,第二章三角函数,第三章反三角函数,第四章不等式,第五章数列、极限、数学归纳法,第六章复数,第七章排列、组合、二项式定理,第八章立体几何,第九章解析几何。本书针对高中数学课本的主要内容,从解题技巧、运用数学方法等多方面对高中生解数学题进行具有针对性的辅导。

本书由具有丰富教学经验的教师编写,力求简明实用,指导学生树立正确的学习方法,提高思维能力,并掌握一定的解题技巧和学习“窍门”。

主 编 刘运磊 丁 宏 薛文杰

编 者 浩 瀚 李绍祖 李洪波

前 言

在教学过程中我们发现,学生常常有许多疑难问题不能很快明白,在课堂上教师也不可能一个个地对学生加以辅导,这样就使学生的学习出现漏洞。市面上流行的复习用书多数是习题集,常常使学生陷入题海之中,这不符合当前素质教育的方向。因此,我们觉得有必要编这样一套书,它能像一个无时不在的教师一样,解决学生的各种疑难问题,从而全面提高学生的素质。基于这种思想,我们组织编写了这套丛书。

我们的指导思想是:对中小学生的学习及应考给予正确的指导,使他们从题海中解放出来,真正做到学习知识,掌握方法,起到事半功倍的作用,解决学习过程中出现的“为什么?怎么办?如何更好?”等类型的问题,以便扎扎实实地学好应该掌握的知识,使他们的智力和创造力在学习中得到充分发展,为将来进一步深造或走向社会打下良好的基础。

本丛书强调知识的系统性与联系性,范例典型、实用,知识点鲜明、突出,融科学性、资料性、指导性、系统性、权威性于一体。此外,本丛书还具有以下特点:

第一,以提高学生的能力为宗旨。基础教育的学科教材应当把提高学生的能力放在第一位。学生的能力包括分析问题、解决问题能力两个方面。通过学习本丛书,学生能正确分析问题,提高解决实际问题的能力。

第二,本丛书编写的基调与教学计划要求持平,进度也与其

同步,这将有利于广大教师和学生的使用。

第三,利于促进学生个性发展。每个学生都应该主动地自己选择所需要的学习内容,而不是笼统地用同样一本书、做同样的作业。这样,学生可以进行必要的选择,跳过自己不适用的部分,以便发挥学生个人的主观能动性。这也符合发展学生个性的教育规律。这一观点,是我们在过去几十年教学经验与教训中得出的结论。为此我们设计了以各种问题形式引导学生思维的编写体例。

第四,突出自主性、活动性、分行性的“三性原则”。针对传统教材与传统教学方法之弊端,本书力图改变学生被动学习的境况,发展与尊重学生的独立性与主动性,发展与强化学生实践过程与应用过程,发展与激励学生在思维与实践中的求异与创新。

由于我们水平有限,书中难免会有种种错误,请广大读者批评指正。

编 者
1998年7月

目 录

第一章 幂函数、指数函数、对数函数	(1)
怎样理解集合概念	(1)
怎样正确使用“ $\in$ 、 $\notin$ 、 $\subseteq$ 、 $\subset$ 、 $\supset$ 、 $\varsubsetneq$ 、 $\varsupsetneq$ 、 $=$ ”这些符号	(4)
怎样进行集合运算	(6)
怎样理解函数的概念	(9)
怎样求函数的解析式	(11)
怎样用待定系数法求二次函数的解析式	(16)
怎样求函数的定义域	(19)
怎样判断函数的单调性	(22)
怎样判断函数的奇偶性	(26)
怎样用函数的单调性、奇偶性解题	(29)
怎样比较数或式的大小	(34)
怎样求无理函数的最值或值域	(40)
怎样求函数的反函数	(43)
怎样解与互为反函数的函数图象有关的习题	(46)
怎样画函数的大致图象	(48)
怎样求函数 $y = \frac{cx+d}{ax+b}$ ($a \neq 0$) 的值域	(51)
怎样求函数 $y = \frac{ax+bx+c}{a'x+b'x+c'}$ 的最值或值域	(54)

怎样求与二次函数有关的最值问题	(58)
怎样用一元二次方程根的判别式求函数的最值或值域	(61)
怎样解指数方程与对数方程	(66)
怎样解方程中含参数的问题	(70)
怎样求函数的值域	(76)
第二章 三角函数	(80)
怎样判断一个角终边的位置	(80)
怎样求三角函数的值	(83)
怎样求三角函数的定义域	(94)
怎样求三角函数的值域和最值	(98)
怎样求三角函数的周期	(101)
怎样判断三角函数的单调性、奇偶性	(105)
怎样证明三角恒等式	(109)
怎样证明三角条件等式	(119)
怎样证明三角形中的三角恒等式	(127)
第三章 反三角函数	(134)
怎样求反三角函数	(134)
怎样比较反三角函数值的大小并画出反三角函数的 图象	(137)
怎样求反三角函数的值及证明等式	(144)
怎样解反三角函数方程和不等式	(151)
第四章 不等式	(155)
怎样正确应用两个极值定理	(155)
怎样证明不等式	(159)
怎样解不等式	(168)

怎样解不等式中含参数的问题	(178)
第五章 数列、极限、数学归纳法	(183)
怎样求数列的通项公式	(183)
怎样解等差数列题	(188)
怎样解等比数列题	(193)
怎样求数列的前 n 项之和	(199)
怎样应用数学归纳法	(202)
怎样求数列的极限	(208)
第六章 复数	(212)
怎样解复数集上的代数方程	(212)
怎样用 $z \cdot \bar{z} = z ^2$ 解题	(215)
怎样求复数的模与辐角的取值范围	(219)
怎样用单位根 w 解题	(223)
怎样巧解复数题	(225)
怎样解复数数列问题	(228)
怎样用复数的几何意义解题	(233)
怎样用复数解三角问题	(235)
怎样用复数解轨迹问题	(238)
第七章 排列、组合、二项式定理	(242)
怎样解有关排列、组合的应用题	(242)
怎样用二项式定理的通项公式解题	(249)
第八章 (直线与平面)立体几何	(255)
怎样画平面	(255)
怎样证明点共线	(257)
怎样画水平放置的平面图形的直观图	(259)
怎样确定异面直线	(264)

怎样求异面直线所成的角.....	(267)
怎样应用集合符号与双箭头.....	(271)
怎样作两条异面直线的公垂线.....	(274)
怎样求异面直线之间的距离.....	(275)
怎样确定直线和平面垂直.....	(280)
怎样证明线面平行.....	(283)
怎样应用三垂线定理.....	(285)
怎样求直线和平面所成的角和距离.....	(292)
怎样证明平面和平面平行.....	(296)
怎样求二面角的平面角.....	(299)
怎样证明平面与平面垂直.....	(304)
怎样用反证法证明立体几何问题.....	(307)
怎样添辅助线和辅助面.....	(309)
怎样解翻折问题.....	(314)
怎样解与旋转体侧面展开图有关的问题.....	(319)
怎样判定棱台.....	(322)
怎样求几何体的体积.....	(324)
怎样解几何体的组合问题.....	(330)
怎样解截面问题.....	(335)
怎样解立体几何中的最值问题.....	(342)
怎样解切削问题.....	(345)
怎样画球的直观图.....	(347)

第九章 解析几何 (352)

怎样利用解析法证明平面几何问题.....	(352)
怎样运用定比“ λ ”解决问题	(357)
怎样运用直线重合的条件解题.....	(362)
怎样处理充要条件的问题.....	(369)

怎样用概念“点在曲线上”解题·····	(375)
怎样才能保证轨迹的纯粹性与完备性·····	(378)
怎样处理共渐近线的双曲线问题·····	(382)
怎样用圆锥曲线的定义解题·····	(385)
怎样用待定系数法求曲线的轨迹方程·····	(392)
怎样用直接法求曲线的轨迹方程·····	(396)
怎样用代入法求曲线的轨迹方程·····	(400)
怎样用参数法求曲线的轨迹方程·····	(403)
怎样用复数法求曲线的轨迹方程·····	(409)
怎样运用直线参数方程中 t 的几何意义解题·····	(413)
怎样运用圆锥曲线的参数方程解题·····	(416)
怎样处理曲线间的位置关系问题·····	(425)
怎样处理圆锥曲线的中点弦问题·····	(430)
怎样处理解析几何中的最值问题·····	(436)
怎样处理解析几何中的定值问题·····	(443)
怎样处理解析几何中曲线过定点的问题·····	(448)
怎样求圆锥曲线的弦长·····	(452)
怎样处理坐标平移问题·····	(460)
怎样处理解析几何中的对称问题·····	(465)
怎样用曲线的极坐标方程解题·····	(469)
怎样求动点轨迹的极坐标方程·····	(475)
怎样运用圆锥曲线的焦半径解题·····	(479)

第一章 幂函数、指数函数、对数函数

怎样理解集合概念

1. 集合是数学中的一个原始概念,它和点、直线、平面概念一样都是不定义的概念,只能做描述性的说明。

我们把具有某种共同属性的对象的全体看成一个整体,便成了一个集合,集合里的各个对象叫做这个集合的元素。例如,由不大于5的自然数的全体组成的集合是 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。“不大于5的自然数”是各个对象的共同属性,对象1, 2, 3, 4, 5都是这个集合的元素。

集合,应是具有某种共同属性的对象的“全体”,如: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 就不能称为“自然数集合”,而只能称为“不大于5的自然数的集合”。

2. 集合中的元素有四个特性。

① 确定性 集合中的元素应该是完全确定的,不能模棱两可。如“相当大的数的全体”不能视为集合,因为“相当大”没有确切的判定标准,不能作为集合元素的共同属性。

② 互异性 集合中元素应是互不相同的、有区别的。如不能有 $\{1, 2, 2, 3\}$,而必须写成 $\{1, 2, 3\}$ 。

③ 无序性 集合中元素间无次序关系,如 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{2, 3, 1\}$ 表示同一个集合。

④ 任意性 集合中的元素可以是任意的具体确定的事物，即集合中的元素可以是数，可以是式，可以是方程、不等式，也可以是图形等。集合的本身也可以成为其它集合的元素。如由整式 $x^2, 3x-1, 4x+y, x^2+y^2$ 组成的集合为 $\{x^2, 3x-1, 4x+y, x^2+y^2\}$ ；所有的直角三角形组成的集合为{直角三角形}；由集合 $\{a, b\}$ 的所有子集组成的集合为 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 。

3. 按含元素的数量来分，集合可分为“有限集”，“无限集”，“空集”三种。

例 1 选择

命题：①“所有相当小的正数”是一个集合；

②集合 $\{1, 2, 3, 3, 4, 5\}$ 中有 6 个元素；

③ $\{a, b, c\}$ 与 $\{c, b, a\}$ 表示同一个集合。

以上三个命题中正确的是

(A) 仅有①, ③ (B) 仅有②, ③；

(C) 仅有③ (D) 都不正确

解：由集合中元素的确定性可知，“所有相当小的正数”不是一个集合。如 0.000001 是不是一个“相当小的正数”，就无法确定，故命题①不正确；由元素的互异性可知，②的集合中只有 5 个元素，命题②也不正确；由元素的无序性可知 $\{a, b, c\}$ 与 $\{c, b, a\}$ 表示同一个集合，故命题③正确。因此所给命题中，只有③正确，应选(C)。

例 2 已知 $A = \left\{ x \mid \frac{6}{x+1} \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Z}, x \neq -1, \right\}$, $B = \left\{ y \mid \frac{6}{y+1} \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, y \neq -1, \right\}$, $C = \{x \mid x^2 + x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ 。

试判断以上三个集合中，哪些是有限集，哪些是无限集？

解：在集合 A 中，因为当 x 取不等于 -1 的任意整数时

$\frac{6}{x+1}$ 均为有理数,所以 $A=\{x|x\in Z \text{ 且 } x\neq -1\}$,故 A 是无限

集。在 B 中,要使 $\frac{6}{y+1}$ 是自然数, $y+1$ 只能取 $1, 2, 3, 6$. $\therefore B=\{0, 1, 2, 5\}$,故 B 是有限集;因为方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根,所以方程 $x^2+x+1=0$ 的解集是空集。即 $C=\emptyset$,故 C 既不是有限集也不是无限集。

例3 选择

命题:① $\{x^2-2x-3=0\}$ 与 $\{-1, 3\}$ 表示同一个集合;

②不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解集为 $x<1$ 或 $x>2$;

③ $\{y|y=x^2\}$ 与 $\{(x, y)|y=x^2\}$ 表示同一个集合;

④ $\{x|x=2k, k\in Z\}$ 与 $\{y|y=2(m-1), m\in Z\}$ 表示同一个集合。

其中正确的命题是

(A)仅有①,④

(B)仅有①,②

(C)仅有④

(D)都不正确

解:① $\{x^2-2x-3=0\}$ 是只有一个元素的有限集,即单元集集合。方程“ $x^2-2x-3=0$ ”是这个集合的一个元素,而 $\{x|x^2-2x-3=0\}$ 与 $\{-1, 3\}$ 才表示同一个集合,故命题①不正确。

②不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解集是集合,应写成 $\{x|x<1 \text{ 或 } x>2\}$,而 $x<1$ 或 $x>2$ 不符合集合形式,故②不正确。

③ $\{y|y=x^2\}$ 的元素是函数值(元素是数,集合表示二次函数) $y=x^2$ 的值域(数的集合),而 $\{(x, y)|y=x^2\}$ 的元素是抛物线 $y=x^2$ 上的点,集合表示二次函数 $y=x^2$ 的图像(点的集合),故③不正确。

④ $\{x|x=2k, k\in Z\}$ 与 $\{y|y=2(m-1), m\in Z\}$,它们只是描述的形式不同,都表示偶数集合,故④正确,因此所给命题中,只有④正确,应选(C)。

怎样正确使用“ $\in$ 、 $\notin$ 、 $\subseteq$ 、 $\subset$ 、 $\supseteq$ 、 $\supset$ 、 $=$ ”这些符号

1. “ $\in$ 、 $\notin$ ”是表示元素与集合间关系的符号,不能用来表示两个集合之间的关系。当 a 是集合 A 的元素时,我们说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;当 a 不是集合 A 的元素时,我们说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$ 。例如: $3 \in \{1, 3, 5\}$, $2 \notin \{1, 3, 5\}$ 。

$a \in A$ 与 $a \notin A$ 有且仅有一种情况成立。

2. “ $\subseteq$ 、 $\subset$ 、 $\supseteq$ 、 $\supset$ 、 $=$ ”是表示两个集合间关系的符号。

$A \subseteq B$ 包括 $A = B$ 或 $A \subset B$,这一点与符号“ $\leq$ ”类似,同学们注意体会,但它们有区别。因为当 $a \leq b$ 不成立时,则有 $a > b$ 。而当 $A \subseteq B$ 不成立时,未必有 $A \supset B$ 。

如果已确定 A 是 B 的真子集,记作 $A \subset B$,不写成 $A \subseteq B$ 。同样已确定 A 与 B 相等,记作 $A = B$,不写成 $A \subseteq B$ 。

3. 符号“ $\in$ ”与“ $\subset$ ”的区别: $\in$ 表示元素和集合的从属关系,而 $\subseteq$ 是表示集合与集合的包含关系。在使用这两种符号时,要分清是元素与集合之间的关系,还是集合与集合之间的关系。例如, a 是集合 $\{a\}$ 的元素,记作 $a \in \{a\}$,而 $\{a\}$ 又是集合 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 的元素,记作 $\{a\} \in \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,但不能写成 $\{a\} \subset \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 。这就是说元素是相对于集合而言的一个相对概念。

例 1 用适当的符号填空

① x $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{x\}$, ② $\{x\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{x, y\}$, ③ $\{1, 2, 3\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{1, 3\}$, ④ $\emptyset$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\emptyset$, ⑤ $\emptyset$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{0\}$, ⑥ $A \cap B$ $\underline{\hspace{1cm}}$ A , ⑦ $A \cap B$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\emptyset$, ⑧

$\{-1, 0, 1\}$ ____ $\{x \mid |x| < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ 。

解：① x 属于集合 $\{x\}$ ，所以用“ $\in$ ”。②集合 $\{x\}$ 是集合 $\{x, y\}$ 的真子集，所以用“ $\subset$ ”。③集合 $\{1, 3\}$ 是集合 $\{1, 2, 3\}$ 的真子集，所以用“ $\subset$ ”。④因为空集不含任何元素，所以 0 不属于 $\emptyset$ ，故用“ $\notin$ ”。⑤因为 0 是集合 $\{0\}$ 的元素，所以 $\{0\}$ 是一个非空集合，而空集是任何非空集合的真子集，故用“ $\subset$ ”。⑥当 A 是 B 的子集时， $A \cap B$ 与 A 相等；而当 A 不是 B 的子集时， $A \cap B$ 是 A 的真子集，所以用“ $\subsetneq$ ”。⑦当 A, B 有公共元素时， $A \cap B \supset \emptyset$ ；而当 A, B 没有公共元素时， $A \cap B = \emptyset$ ，所以用“ $\supsetneq$ ”。⑧集合 $\{x \mid |x| < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ 中的元素与集合 $\{-1, 0, 1\}$ 中的元素相同，即 $\{-1, 0, 1\}$ 与 $\{x \mid |x| < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ 相等，所以用“ $=$ ”。

例2 已知集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x \mid x \in A, x \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x \subseteq A\}$ ，求集合 A, B, C 之间的关系。

分析：集合 B 是集合 A 中的自然数组成的集合。集合 C 是集合 A 的所用子集组成的集合。

解：集合 B, C 的列举法表示分别为：

$$B = \{1\}; C = \{\emptyset, \{1\}, \{0\}, A\}$$

$$\therefore B \subset A, A \in C, B \in C.$$

例3 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集及真子集。

解：子集有 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ 。

其中 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ 是真子集。

说明：可以证明，含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集， $2^n - 1$ 个真子集， $2^n - 1$ 个非空子集， $2^n - 2$ 个非空真子集。

例4 集合 $\{a, b, c\}$ 加入一个新元素 d ，子集总数增加多少个？

解：加入元素 d 后，集合成为 $\{a, b, c, d\}$ 共有子集 2^4 个，原来集合 $\{a, b, c\}$ 有子集 2^3 个，所以增加了 $2^4 - 2^3 = 8$ 个。