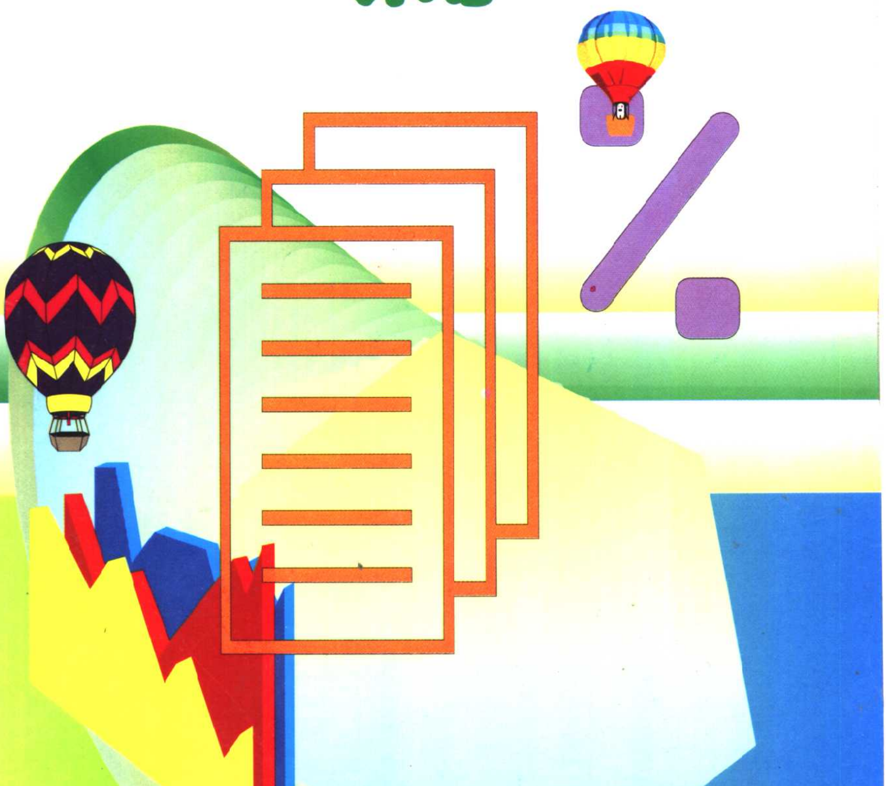
刘运磊 主编

高中生无师自通丛书

数学篇



北京科学技术出版社

高中生无师自通丛书

数 学 篇

刘运磊 丁 宏 薛文杰 主 编

北京科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中生无师自通丛书：数学篇/刘运磊等主编．—北京：北京科学技术出版社，1998.8

ISBN 7-5304-2171-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 20645 号

北京科学技术出版社出版

（北京西直门南大街 16 号）

邮政编码：100035

各地新华书店经销

北京博诚印刷厂印刷

*

787 毫米×1092 毫米　32 开本　15.5 印张　362 千字

1998 年 8 月第一版　　1998 年 8 月第一次印刷

印数 1—11000 册

定价：17.00 元

内容简介

本书以问答的形式，讲述、解答了高中学生在学习数学课程中遇到的问题。

本书共分九章，第一章幂函数、指数函数、对数函数，第二章三角函数，第三章反三角函数，第四章不等式，第五章数列、极限、数学归纳法，第六章复数，第七章排列、组合、二项式定理，第八章立体几何，第九章解析几何。本书针对高中数学课本的主要内容，从解题技巧、运用数学方法等多方面对高中生解数学题进行具有针对性的辅导。

本书由具有丰富教学经验的教师编写，力求简明实用，指导学生树立正确的学习方法，提高思维能力，并掌握一定的解题技巧和学习“窍门”。

主　编　刘运磊　丁　宏　薛文杰
编　者　浩　瀚　李绍祖　李洪波

前言

在教学过程中我们发现，学生常常有许多疑难问题不能很快明白，在课堂上教师也不可能一个个地对学生加以辅导，这样就使学生的学习出现漏洞。市面上流行的复习用书多数是习题集，常常使学生陷入题海之中，这不符合当前素质教育的方向。因此，我们觉得有必要编这样一套书，它能像一个无时不在的教师一样，解决学生的各种疑难问题，从而全面提高学生的素质。基于这种思想，我们组织编写了这套丛书。

我们的指导思想是：对中小学生的学习及应考给予正确的指导，使他们从题海中解放出来，真正做到学习知识，掌握方法，起到事半功倍的作用，解决学习过程中出现的“为什么？怎样办？如何更好？”等类型的问题，以便扎扎实实地学好应该掌握的知识，使他们的智力和创造力在学习中得到充分发展，为将来进一步深造或走向社会打下良好的基础。

本丛书强调知识的系统性与联系性，范例典型、实用，知识点鲜明、突出，融科学性、资料性、指导性、系统性、权威性于一体。此外，本丛书还具有以下特点：

第一，以提高学生的能力为宗旨。基础教育的学科教材应当把提高学生的能力放在第一位。学生的能力包括分析问题、解决问题能力两个方面。通过学习本丛书，学生能正确分析问题，提高解决实际问题的能力。

第二，本丛书编写的基调与教学计划要求持平，进度也与其

同步，这将有利于广大教师和学生的使用。

第三，利于促进学生个性发展。每个学生都应该主动地自己选择所需要的学习内容，而不是笼统地用同样一本书、做同样的作业。这样，学生可以进行必要的选择，跳过自己不适用的部分，以便发挥学生个人的主观能动性。这也符合发展学生个性的教育规律。这一观点，是我们在过去几十年教学经验与教训中得出的结论。为此我们设计了以各种问题形式引导学生思维的编写体例。

第四，突出自主性、活动性、分行性的“三性原则”。针对传统教材与传统教学方法之弊端，本书力图改变学生被动学习的境况，发展与尊重学生的独立性与主动性，发展与强化学生实践过程与应用过程，发展与激励学生在思维与实践中的求异与创新。

由于我们水平有限，书中难免会有种种错误，请广大读者批评指正。

编　者

1998年7月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数、对数函数

怎样理解集合概念

1. 集合是数学中的一个原始概念，它和点、直线、平面概念一样都是不定义的概念，只能做描述性的说明。

我们把具有某种共同属性的对象的全体看成一个整体，便成了一个集合，集合里的各个对象叫做这个集合的元素。例如，由不大于 5 的自然数的全体组成的集合是{1,2,3,4,5}。“不大于 5 的自然数”是各个对象的共同属性，对象 1,2,3,4,5 都是这个集合的元素。

集合，应是具有某种共同属性的对象的“全体”，如：{1,2,3,4,5}就不能称为“自然数集合”，而只能称为“不大于 5 的自然数的集合”。

2. 集合中的元素有四个特性。

① 确定性　集合中的元素应该是完全确定的，不能模棱两可。如“相当大的数的全体”不能视为集合，因为“相当大”没有确切的判定标准，不能作为集合元素的共同属性。

② 互异性　集合中元素应是互不相同的、有区别的。如不能有{1,2,2,3}，而必须写成{1,2,3}。

③ 无序性　集合中元素间无次序关系，如{1,2,3}与{2,3,1}表示同一个集合。

④ 任意性　集合中的元素可以是任意的具体确定的事物，即集合中的元素可以是数，可以是式，可以是方程、不等式，也可以是图形等。集合的本身也可以成为其它集合的元素。如由整式 $x^2,3x-1,4x+y,x^2+y^2$ 组成的集合为 $\{x^2,3x-1,4x+y,x^2+y^2\}$；所有的直角三角形组成的集合为{直角三角形}；由集合 $\{a,b\}$ 的所有子集组成的集合为 $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。

3. 按含元素的数量来分，集合可分为“有限集”，“无限集”，“空集”三种。

例 1　选择

命题：①“所有相当小的正数”是一个集合；

②集合 $\{1,2,3,3,4,5\}$ 中有 6 个元素；

③$\{a,b,c\}$ 与 $\{c,b,a\}$ 表示同一个集合。

以上三个命题中正确的是

(A)仅有①，③　　　　(B)仅有②，③；

(C)仅有③　　　　(D)都不正确

解：由集合中元素的确定性可知，“所有相当小的正数”不是一个集合。如 0.000001 是不是一个“相当小的正数”，就无法确定，故命题①不正确；由元素的互异性可知，②的集合中只有 5 个元素，命题②也不正确；由元素的无序性可知 $\{a,b,c\}$ 与 $\{c,b,a\}$ 表示同一个集合，故命题③正确。因此所给命题中，只有③正确，应选(C)。

例 2　已知 $A=\left\{x\left|\frac{6}{x+1}\in Q,x\in Z,x\neq-1,\right.\right\}$，$B=\left\{y\left|\frac{6}{y+1}\in N,y\in Z,y\neq-1,\right.\right\}$，$C=\{x\mid x^2+x+1=0,x\in R\}$。试判断以上三个集合中，哪些是有限集，哪些是无限集？

解：在集合 A 中，因为当 x 取不等于 -1 的任意整数时

$\frac{6}{x+1}$均为有理数，所以 $A=\{x|x\in Z$ 且 $x\neq -1\}$，故 A 是无限集。在 B 中，要使$\frac{6}{y+1}$是自然数，$y+1$ 只能取 1,2,3,6. $\therefore B=\{0,1,2,5\}$，故 B 是有限集；因为方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根，所以方程 $x^2+x+1=0$ 的解集是空集。即 $C=\varnothing$，故 C 既不是有限集也不是无限集。

例 3　选择

命题：①$\{x^2-2x-3=0\}$与$\{-1,3\}$表示同一个集合；

②不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解集为 $x<1$ 或 $x>2$；

③$\{y|y=x^2\}$与$\{(x,y)|y=x^2\}$表示同一个集合；

④$\{x|x=2k,k\in Z\}$与$\{y|y=2(m-1),m\in Z\}$表示同一个集合。

其中正确的命题是

(A)仅有①，④　　(B)仅有①，②

(C)仅有④　　(D)都不正确

解：①$\{x^2-2x-3=0\}$是只有一个元素的有限集，即单元集集合。方程“$x^2-2x-3=0$”是这个集合的一个元素，而$\{x|x^2-2x-3=0\}$与$\{-1,3\}$才表示同一个集合，故命题①不正确。

②不等式 $x^2-3x+2>0$ 的解集是集合，应写成$\{x|x<1$ 或 $x>2\}$，而 $x<1$ 或 $x>2$ 不符合集合形式，故②不正确。

③$\{y|y=x^2\}$的元素是函数值（元素是数，集合表示二次函数）$y=x^2$ 的值域（数的集合），而$\{(x,y)|y=x^2\}$的元素是抛物线 $y=x^2$ 上的点，集合表示二次函数 $y=x^2$ 的图像（点的集合），故③不正确。

④$\{x|x=2k,k\in Z\}$与$\{y|y=2(m-1),m\in Z\}$，它们只是描述的形式不同，都表示偶数集合，故④正确，因此所给命题中，只有④正确，应选(C)。

怎样正确使用“$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subset$、$\nsubseteq$、$\not\subset$、$=$”这些符号

1. “$\in$、$\notin$”是表示元素与集合间关系的符号，不能用来表示两个集合之间的关系。当 a 是集合 A 的元素时，我们说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；当 a 不是集合 A 的元素时，我们说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$。例如：$3\in\{1,3,5\}$，$2\notin\{1,3,5\}$。

$a\in A$ 与 $a\notin A$ 有且仅有一种情况成立。

2. “$\subseteq$、$\subset$、$\nsubseteq$、$\not\subset$、$=$”是表示两个集合间关系的符号。

$A\subseteq B$ 包括 $A=B$ 或 $A\subset B$，这一点与符号“$\leqslant$”类似，同学们注意体会，但它们有区别。因为当 $a\leqslant b$ 不成立时，则有 $a>b$。而当 $A\subseteq B$ 不成立时，未必有 $A\supset B$。

如果已确定 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$，不写成 $A\subseteq B$。同样已确定 A 与 B 相等，记作 $A=B$，不写成 $A\subseteq B$。

3. 符号“$\in$”与“$\subset$”的区别：$\in$ 表示元素和集合的从属关系，而$\subseteq$是表示集合与集合的包含关系。在使用这两种符号时，要分清是元素与集合之间的关系，还是集合与集合之间的关系。例如，a 是集合$\{a\}$的元素，记作 $a\in\{a\}$，而$\{a\}$又是集合$\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$的元素，记作$\{a\}\in\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，但不能写成$\{a\}\subset\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。这就是说元素是相对于集合而言的一个相对概念。

例 1　用适当的符号填空

①x ____ $\{x\}$，②$\{x\}$ ____ $\{x,y\}$，③$\{1,2,3\}$ ____ $\{1,3\}$，④ 0 ____ $\varnothing$，⑤$\varnothing$ ____ $\{0\}$，⑥$A\cap B$ ____ A，⑦$A\cap B$ ____ $\varnothing$，⑧

$\{-1,0,1\}$____$\{x||x|<2,x\in Z\}$。

解：①x 属于集合$\{x\}$，所以用“$\in$”。②集合$\{x\}$是集合$\{x,y\}$的真子集，所以用“$\subset$”。③集合$\{1,3\}$是集合$\{1,2,3\}$的真子集，所以用“$\supset$”。④因为空集不含任何元素，所以 0 不属于$\varnothing$，故用“$\notin$”。⑤因为 0 是集合$\{0\}$的元素，所以$\{0\}$是一个非空集合，而空集是任何非空集合的真子集，故用“$\subset$”。⑥当 A 是 B 的子集时，$A\cap B$ 与 A 相等；而当 A 不是 B 的子集时，$A\cap B$ 是 A 的真子集，所以用“$\subseteq$”。⑦当 A,B 有公共元素时，$A\cap B\supset\varnothing$；而当 A,B 没有公共元素时，$A\cap B=\varnothing$，所以用“$\supseteq$”。⑧集合$\{x||x|<2,x\in z\}$中的元素与集合$\{-1,0,1\}$中的元素相同，即$\{-1,0,1\}$与$\{x||x|<2,x\in z\}$相等，所以用“$=$”。

例 2　已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x|x\in A\ x\in N\}$，$C=\{x|x\subseteq A\}$，求集合 A、B、C 之间的关系。

分析：集合 B 是集合 A 中的自然数组成的集合。集合 C 是集合 A 的所用子集组成的集合。

解：集合 B、C 的列举法表示分别为：

$$B=\{1\};\ C=\{\varnothing,\{1\},\{0\},A\}$$

$$\therefore B\subset A, A\in C, B\in C.$$

例 3　写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集及真子集。

解：子集有$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$。其中$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$是真子集。

说明：可以证明，含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集，2^n-1 个非空子集，2^n-2 个非空真子集。

例 4　集合$\{a,b,c\}$加入一个新元素 d，子集总数增加多少个？

解：加入元素 d 后，集合成为$\{a,b,c,d\}$共有子集 2^4 个，原来集合$\{a,b,c\}$有子集 2^3 个，所以增加了 $2^4-2^3=8$ 个。