纯粹数学与应用数学专著 第2号

齐次可列马尔可夫过程

侯振挺 郭青峰 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第2号

齐次可列马尔可夫过程

侯振挺 郭青峰 著

科学出版社

1978

内 容 简 介

本书为作者关于齐次可列马尔可夫过程构造论研究成果的总结.

作者提出"最小非负解"方法和另一个由王梓坤提出又为作者发展的极限过渡法,成功地解决了一系列齐次可列马尔可夫过程的重要理论问题.

第一、二篇是理论基础;第三、四篇研究齐次可列马尔可夫链和过程的各种性质;第五篇研究齐次可列马尔可夫过程的构造理论.

本书可供高等学校概率论专门化的师生以及数学工作者阅读.

纯粹数学与应用数学专著　第2号

齐次可列马尔可夫过程

侯振挺　郭青峰 著

*

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

北京新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1978年9月第一版　开本:850×1168 1/32

1978年9月第一次印刷　印张:8 1/8

印数:0001—21,340　字数:212,000

统一书号:13031·779

本社书号:1118·13—1

定价: 1.05 元

序

马尔可夫过程在概率论的研究中占有重要地位. 齐次可列马尔可夫过程则是马尔可夫过程的主要一支. 它在科学技术各个领域(如物理学、控制论、排队论、动态规划等)中有着广泛的应用.

齐次可列马尔可夫过程中的理论问题可大致分成两类. 第一, 是对任意给定的过程的各种性质的研究; 第二, 是对任给的一个 Q 矩阵, 定性研究 Q 过程及构造出全部 Q 过程来. 本书是作者近年来对上述两个问题研究成果的一个总结, 其中大部分工作还都是第一次公开发表. 它由五篇构成, 第一、二篇是理论基础, 第三、四篇是研究第一个问题, 第五篇是研究第二个问题. 贯穿本书始终的有两个数学方法. 其一, 我们把它叫做"最小非负解方法"; 其二是"极限过渡法": 用样本函数较简单的过程去逼近任意过程. 大致说来, 这两个方法是这样配合的: 用最小非负解方法研究样本函数较简单的过程(马氏链、最小 Q 过程和一阶 Q 过程), 在此基础上依据第一篇中给出的"构造定理"用极限过渡法来研究任意过程. 前一方法是作者提出的, 后一方法是王梓坤同志在他的"生灭过程构造论"一文中建立的, 而为我们发展的.

第一、二章是全书的一个框架, 较难读. 但到第十一章才用到. 所以可先浏览一下(以了解全书的轮廓), 待用到时再详读.

我们的工作始终得到党组织的亲切关怀和支持, 也得到许多同志的帮助、鼓励和指教. 其中主要有苗邦均、杨向群、王梓坤、越民义、韩继业、墨文川、陈木法和李峻贤等同志, 还有钟开莱教授. 在此一并致谢.

由于我们思想水平低, 专业知识浅薄, 错误和不当之处在所难免. 敬请同志们指正.

作者

1975.2

目　　录

序 …… i
第一篇　齐次可列马尔可夫过程样本函数构造论 …… 1
第一章　第一构造定理 …… 1
§1.1.　引言 …… 1
§1.2.　g_n 变换的定义 …… 2
§1.3.　叙列 $X^{(n)}(\omega)(n\geqslant 1)$的收敛性 …… 3
§1.4.　关于 $X^{(n)}(\omega)(n\geqslant 1)$的进一步性质 …… 6
§1.5.　第一构造定理 …… 11
第二章　第二构造定理 …… 12
§2.1.　引言 …… 12
§2.2.　映射 Tmn …… 12
§2.3.　映射 W'_n …… 14
§2.4.　作辅助函数 …… 19
§2.5.　第二构造定理 …… 20
§2.6.　定理 2.5.1 的深化 …… 21
§2.7.　小结 …… 22
第二篇　非负线性方程组的最小非负解理论 …… 23
第三章　一般理论 …… 23
§3.1.　引言 …… 23
§3.2.　非负线性方程组的定义及其最小非负解的定义、存在和唯一性 …… 23
§3.3.　比较定理和线性组合定理 …… 26
§3.4.　局部化定理 …… 27
§3.5.　最小非负解的牵连性质 …… 28
§3.6.　极限过渡定理 …… 29
§3.7.　矩阵表示法 …… 30
§3.8.　对偶定理 …… 31

第四章 计算方法 …… 32
§4.1. 几个引理 …… 32
§4.2. 问题的归结 …… 34
§4.3. n 维常义严格非齐次方程 …… 36
第五章 囿壹方程 …… 38
§5.1. 引言 …… 38
§5.2. 第一型通外方程 …… 38
§5.3. 第一型相容方程 …… 40
§5.4. 随机添尾严格非齐次方程 …… 42
§5.5. 正则方程 …… 43
§5.6. 拟规格方程 …… 44
§5.7. 有限维拟规格方程 …… 47
§5.8. 第二型正则方程 …… 51
第三篇 齐次可列马尔可夫链 …… 55
第六章 一般理论 …… 55
§6.1. 引言 …… 55
§6.2. 转移概率 …… 55
§6.3. 第一次到达时间的分布和矩 …… 57
§6.4. 齐次有限马氏链的第一次到达时间的分布和矩 …… 62
§6.5. 到达次数的分布和矩 …… 64
§6.6. 常返判别准则 …… 66
§6.7. 可加泛函的分布和矩 …… 69
§6.8. 导出马氏链和原子几乎闭集的判别准则 …… 72
第七章 Martin 流出边界理论 …… 79
§7.1. 引言 …… 79
§7.2. 马氏链的分解 …… 79
§7.3. 关于过份函数的终极性态 …… 82
§7.4. Green 函数和 Martin 核 …… 83
§7.5. h-链 …… 85
§7.6. 关于 Martin 核的一个极限定理 …… 91
§7.7. Martin 边界 …… 93
§7.8. x_ζ 的分布 …… 96

§7.9. 过份函数的 Martin 表达式 …… 97
§7.10. 流出空间 …… 98
§7.11. 唯一性定理 …… 99
§7.12. 极小过份函数 …… 99
§7.13. 终极随机变量 …… 100
§7.14. 位势、过份函数的判别准则和 Riesz 分解 …… 101
§7.15. 极小调和函数、极小位势和极小过份函数的判别准则 …… 102
§7.16. 原子流出空间和非原子流出空间 …… 105
§7.17. 状态空间的 Blackweel 分解 …… 107
第八章 Martin 流入边界理论 …… 108
§8.1. 引言 …… 108
§8.2. 第一组引理 …… 109
§8.3. 有限过份测度的性质 …… 111
§8.4. 第二组引理 …… 112
§8.5. 流入边界 …… 114
§8.6. 流入空间和过份测度的表达式 …… 115
第四篇 齐次可列马尔可夫过程 …… 116
第九章 最小 Q 过程 …… 116
§9.1. 引言 …… 116
§9.2. 转移概率 …… 116
§9.3. 第一次到达时间的分布和矩 …… 117
§9.4. 正常返判别准则 …… 124
§9.5. 积分型泛函的分布和矩 …… 126
§9.6. 拟可推集上的积分型泛函的分布和矩 …… 138
§9.7. §9.3 中的结果的推广 …… 145
第十章 一阶 Q 过程 …… 147
§10.1. 引言 …… 147
§10.2. 转移概率 …… 149
§10.3. 第一次到达时间的分布和矩 …… 154
第十一章 任意的 Q 过程 …… 165
§11.1. 第一构造定理的深化 …… 165

§11.2. 转移概率 …………………………………………………… 171
§11.3. 过份测度和过份函数的分解定理 ………………………… 172
第五篇 齐次可列马尔可夫过程构造论 ……………………………178
第十二章 Q过程的唯一性准则 ……………………………………178
§12.1. 引言 …………………………………………………………… 178
§12.2. 几个引理 ……………………………………………………… 181
§12.3. 主要定理的证明 ……………………………………………… 186
§12.4. 对角线型的情况 ……………………………………………… 194
§12.5. 有界的情况 …………………………………………………… 195
§12.6. E为有限集的情况 …………………………………………… 196
§12.7. 分枝Q矩阵的情况 …………………………………………… 197
§12.8. 另一判别准则和有限非保守情况 …………………………… 201
§12.9. 定理12.1.1中两个条件的独立性 …………………………… 204
§12.10. 定理12.1.1中条件(i)的概率意义 ………………………… 206
第十三章 Q过程的构造 ……………………………………………213
§13.1. 构造定理 ……………………………………………………… 213
§13.2. 全部Q过程的刻划 …………………………………………… 215
§13.3. $\{Q, H_{(\partial X)_e}\times E\}$过程的表达式 ……………………………… 216
§13.4. 讨论 …………………………………………………………… 216
第十四章 定性理论 …………………………………………………218
§14.1. 引言 …………………………………………………………… 218
§14.2. 结果的陈述 …………………………………………………… 219
§14.3. B型Q过程的构造问题的归结和Doob过程 ……………… 225
§14.4. $B\cap F$型Q过程的构造问题的归结 …………………………… 232
§14.5. 定理14.2.1—定理14.2.3的证明 …………………………… 235
§14.6. 定理14.2.4的证明及其应用举例 …………………………… 236
§14.7. 定理14.2.5—定理14.2.10的证明 …………………………… 247
参考文献 ………………………………………………………………249
索引 ……………………………………………………………………251

第一篇　齐次可列马尔可夫过程样本函数构造论

第一章　第一构造定理

§ 1.1. 引　　言

设 $X(\omega)=\{x(t,\omega), t<\sigma(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的齐次可列马尔可夫过程. 其最小状态空间 $E=(1, 2, \cdots)$, 其转移概率矩阵 $(p_{ij}(t), i, j\in E)_{t\geqslant 0}$ 是标准的, 且其 Q 矩阵满足关系:

$$q_{ij}\geqslant 0\ (i\neq j),\quad \sum_{j\neq i} q_{ij}=-q_{ii}\equiv q_i<+\infty \tag{1.1.1}$$

为了简洁, 根据 [1, II 的定理 5.1、定理 5.7 以及 §7], 不影响转移概率矩阵, 我们总假定 $X(\omega)$ 具有如下的性质 (D):

(D_1) 右连续. 从而是完全可分的, Borel 可测的, 并且具有强马氏性.

(D_2) $(\omega:\ \mu(t:\ x(t,\omega)=+\infty)=0)=\Omega$, 这里 μ 表示 Lebesgue 测度.

(D_3) $(\omega$: 对任一 $i\in E$ 和任一 $t\in[0,\sigma(\omega))$, 在 $[0,t)$ 中仅含有 $x(\cdot,\omega)$ 的有限个 i-区间$)=\Omega$.

习知, 以 $Q=(q_{ij})$ 为密度矩阵的过程 (一切具有相同转移概率矩阵的过程视为同一过程) 未必一个, 我们泛称其为 Q 过程.

Q 过程的性质的研究的难易在很大程度上依赖于其样本函数的结构的繁简. 下面我们首先区分出样本函数结构最简单的"最小 Q 过程"和样本函数结构较简单的一类所谓"一阶 Q 过程". 它们是研究任意 Q 过程的基础.

定义 1.1.1. 对于 $\tau\leqslant\sigma(\omega)$, 称 τ 为 $x(\cdot,\omega)$ 的飞跃点, 如果 $\tau=\sigma(\omega)$, 或 $\tau<\sigma(\omega)$ 且对任意 $\varepsilon>0$, 在 $(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)$ 中, $x(\cdot,\omega)$ 有无穷多个跳跃点.

显见，飞跃点的聚点仍是飞跃点，因此 $x(\cdot, \omega)$ 的一切飞跃点构成一个闭集. 所以，$x(\cdot, \omega)$ 的第一个飞跃点存在，今以 τ_1 表示之.

定义 1.1.2. 如果 Q 过程 $X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$ 满足条件

$$\tau_1(\omega) = \sigma(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{1.1.2}$$

则称 $X(\omega)$ 为最小 Q 过程或零阶 Q 过程.

定义 1.1.3. 如果 Q 过程 $X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$ 满足如下两个条件，则称之为一阶 Q 过程：

(1) $$(\omega: x(\tau_1(\omega)) = \infty) = \emptyset \tag{1.1.3}$$

(2) 对任一 $\omega \in \Omega$ 及任一 $t \in [0, \sigma(\omega))$，在 $[0, t)$ 中 $x(\cdot, \omega)$ 至多有有限个飞跃点.

由定义 1.1.2 和定义 1.1.3 知，零阶 Q 过程是一阶 Q 过程的退化情况.

王梓坤在 [2] 中严格地论证了生灭过程的样本函数的构造定理，并在 [2]，[3] 中及杨超群在 [4]，[5] 中把构造定理成功地用于生灭过程的一系列研究上. 本章的目的则是给出 Q 过程的样本函数的构造定理 1.5.1. 该定理的意义在于使得对过程的性质的研究可按如下程序进行：先研究样本函数结构最简单的最小 Q 过程，继而研究样本函数结构较简单的一阶 Q 过程，最后，依据构造定理用“极限过渡法”研究任意 Q 过程.

§1.2. g_n 变换的定义

设 $X(\omega) = \{x(t, \omega), t < \sigma(\omega)\}$ 是任一 Q 过程，$D_n = (1, 2, \cdots, n)$. 令

$$\beta_0^{(n)}(\omega) \equiv 0 \tag{1.2.1}$$

$\sigma_1^{(n)}(\omega)$ 是 $x(\cdot, \omega)$ 的第一个飞跃点 (1.2.2)

$$\beta_1^{(n)}(\omega) = \begin{cases} \inf\,(t: \sigma_1^{(n)}(\omega) \leqslant t < \sigma(\omega),\ x(t, \omega) \in D_n) \\ \sigma(\omega), \text{ 如上集合空} \end{cases} \tag{1.2.3}$$

设 $\sigma_{m-1}^{(n)}(\omega)$，$\beta_{m-1}^{(n)}(\omega)$ 已定义，如 $\beta_{m-1}^{(n)}(\omega) = \sigma(\omega)$，则令 $\sigma_m^{(n)}(\omega) =$

$\beta_m^{(n)}(\omega)=\sigma(\omega)$，否则令

$$\sigma_m^{(n)}(\omega)\text{ 为 } x(\cdot,\omega)\text{ 在 } \beta_{m-1}^{(n)}(\omega)\text{ 后的第一个飞跃点} \tag{1.2.4}$$

$$\beta_m^{(n)}(\omega)=\begin{cases}\inf(t:\ \sigma_m^{(n)}(\omega)\leqslant t<\sigma(\omega),x(t,\omega)\in D_n)\\ \sigma(\omega),\ \text{如上集合空}\end{cases} \tag{1.2.5}$$

于是，有

$$\begin{aligned}0\equiv\beta_0^{(n)}(\omega)&\leqslant\sigma_1^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_1^{(n)}(\omega)\leqslant\cdots\\ &\leqslant\sigma_m^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_m^{(n)}(\omega)\leqslant\cdots\leqslant\sigma(\omega)\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

令

$$\tau_k^{(n)}(\omega)=\begin{cases}0,\ k=0\\ \sum_{s=1}^{k}(\sigma_s^{(n)}(\omega)-\beta_{s-1}^{(n)}(\omega)),\ k>0\end{cases} \tag{1.2.7}$$

$$\sigma^{(n)}(\omega)=\sum_{s=1}^{\infty}(\sigma_s^{(n)}(\omega)-\beta_{s-1}^{(n)}(\omega))=\lim_{k\to\infty}\tau_k^{(n)}(\omega) \tag{1.2.8}$$

$$\alpha_t^{(n)}(\omega)=\begin{cases}\beta_{k-1}^{(n)}(\omega)+(t-\tau_{k-1}^{(n)}(\omega)),\\ \quad\text{如}\quad \tau_{k-1}^{(n)}(\omega)\leqslant t<\tau_k^{(n)}(\omega)\\ \sigma(\omega);\quad\text{如}\quad t\geqslant\sigma^{(n)}(\omega)\end{cases} \tag{1.2.9}$$

对任一 $\omega\in\Omega$，$t<\sigma^{(n)}(\omega)$ 令

$$x_{(t,\omega)}^{(n)}=x(\alpha_t^{(n)}(\omega),\omega) \tag{1.2.10}$$

我们把由 $X(\omega)=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 到 $X^{(n)}(\omega)=\{x^{(n)}(t,\omega),t<\sigma^{(n)}(\omega)\}$ 的变换记为

$$g_n(X(\omega))=X^{(n)}(\omega) \tag{1.2.11}$$

§1.3. 叙列 $X^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant1)$ 的收敛性

引理 1.3.1.

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}(\omega)=\beta^{(n)}(\omega)=\sigma(\omega)\quad(\omega\in\Omega) \tag{1.3.1}$$

证．由 (1.2.6) 知，极限 $\lim_{k\to\infty}\beta_k^{(n)}(\omega)=\beta^{(n)}(\omega)(\omega\in\Omega)$ 存在．

令

$$\Delta=(\omega;\ \beta^{(n)}(\omega)<\sigma(\omega)) \tag{1.3.2}$$

于是

$$\beta^{(n)}(\omega) < +\infty \quad (\omega \in \Delta) \tag{1.3.3}$$

对每一 $\omega \in \Delta$，由性质 (D_1) 和 $x(\beta_{k-1}^{(n)}(\omega)) \in D_n$ 知，如 $\beta_{k-1}^{(n)}(\omega) < \sigma(\omega)$，则

$$\beta_{k-1}^{(n)}(\omega) < \sigma_k^{(n)}(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$$

于是有

$$\begin{aligned} 0 \equiv \beta_0^{(n)}(\omega) &< \sigma_1^{(n)}(\omega) \leqslant \beta_1^{(n)}(\omega) < \sigma_2^{(n)}(\omega) \leqslant \cdots \\ &\leqslant \beta_{k-1}^{(n)}(\omega) < \sigma_k^{(n)}(\omega) \leqslant \beta_k^{(n)}(\omega) < \cdots < \sigma(\omega) \\ &\qquad (\omega \in \Delta) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

从而

$$\begin{aligned} 0 \equiv \beta_0^{(n)}(\omega) &< \beta_1^{(n)}(\omega) < \cdots < \beta_k^{(n)}(\omega) < \cdots \\ &< \sigma(\omega) \quad (\omega \in \Delta) \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

由 $D_n = (1, 2, \cdots, n)$ 只包含有限个元素及 $x(\beta_k^{(n)}(\omega)) \in D_n$ 知，对任一 $\omega \in \Delta$，必有某 $i \in D_n$ 使

$$x(\beta_k^{(n)}(\omega)) = i, \text{ 对无穷个 } k \text{ 成立} \tag{1.3.6}$$

于是易知

$$x(\cdot, \omega) \text{ 在 } [0, \beta^{(n)}(\omega)) \text{ 中有无穷个 } i\text{-区间} \tag{1.3.7}$$

从而，由 (1.3.3) 和性质 (D_3) 知 $\Delta = \varnothing$. 引理证毕.

引理 1.3.2. 对任一 $\omega \in \Omega$ 和 $t < \sigma(\omega)$，我们有

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_t^{(n)}(\omega)) = 0 \tag{1.3.8}$$

其中

$$B_t^{(n)}(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\sigma_k^{(n)}(\omega), \beta_k^{(n)}(\omega)) \cap [0, t) \tag{1.3.9}$$

证. 令

$$A(\omega) = (t: x(t, \omega) \neq +\infty, \ t < \sigma(\omega)) \tag{1.3.10}$$

$$B(\omega) = (t: x(t, \omega) = +\infty, \ t < \sigma(\omega)) \tag{1.3.11}$$

$$A^{(n)}(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\beta_{k-1}^{(n)}(\omega), \ \sigma_k^{(n)}(\omega)) \tag{1.3.12}$$

$$B^{(n)}(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\sigma_k^{(n)}(\omega), \ \beta_k^{(n)}(\omega)) \tag{1.3.13}$$

于是由引理 1.3.1 易知

$$A(\omega) \cup B(\omega) = A^{(n)}(\omega) \cup B^{(n)}(\omega) = [0, \sigma(\omega)) \tag{1.3.14}$$

$$A^{(n)}(\omega) \subseteq A^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.15}$$

$$B^{(n)}(\omega) \supseteq B^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.16}$$

$$A(\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^{(n)}(\omega) \tag{1.3.17}$$

$$B(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B^{(n)}(\omega) \tag{1.3.18}$$

因此,如果令

$$A_t(\omega) = A(\omega) \cap [0, t) \tag{1.3.19}$$

$$B_t(\omega) = B(\omega) \cap [0, t) \tag{1.3.20}$$

$$A_t^{(n)}(\omega) = A^{(n)}(\omega) \cap [0, t) \tag{1.3.21}$$

则由 (1.3.9), (1.3.13)—(1.3.18) 得

$$B_t^{(n)}(\omega) = B^{(n)}(\omega) \cap [0, t) \tag{1.3.22}$$

$$A_t(\omega) \cup B_t(\omega) = A_t^{(n)}(\omega) \cup B_t^{(n)}(\omega) = [0, t) \tag{1.3.23}$$

$$A_t^{(n)}(\omega) \subseteq A_t^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.24}$$

$$B_t^{(n)}(\omega) \supseteq B_t^{(n+1)}(\omega) \tag{1.3.25}$$

$$A_t(\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_t^{(n)}(\omega) \tag{1.3.26}$$

$$B_t(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_t^{(n)}(\omega) \tag{1.3.27}$$

由

$$\mu(B_t^{(n)}(\omega)) \leqslant t < +\infty \tag{1.3.28}$$

$$\mu(B_t(\omega)) \leqslant \mu(B(\omega)) = 0 \tag{1.3.29}$$

以及 (1.3.27) 得

$$\lim_{n \to \infty} \mu(B_t^{(n)}(\omega)) = \mu(B_t(\omega)) = 0 \tag{1.3.30}$$

于是引理得证.

引理 1.3.3. 对任一 $\omega \in \Omega$ 和 $t < \sigma(\omega)$ 我们有

$$\alpha_t^{(n)}(\omega) \downarrow t \quad (n \uparrow +\infty) \tag{1.3.31}$$

证. 由引理 1.3.2 知

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{(n)}(\omega)=\sigma(\omega) \tag{1.3.32}$$

于是由 $t<\sigma(\omega)$ 知,存在 $N>0$, 使

$$t<\sigma^{(n)}(\omega)\quad (n\geqslant N) \tag{1.3.33}$$

由 $\alpha_t^{(n)}(\omega)$ 的定义知

$$\alpha_t^{(n)}(\omega)=t+\mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(n)}(\omega)}(\omega))\quad (n\geqslant N) \tag{1.3.34}$$

$$\alpha_t^{(n)}(\omega)\geqslant\alpha_t^{(n+1)}(\omega)\quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.3.35}$$

由 $B_t^{(n)}(\omega)$ 的定义和 (1.3.35) 得

$$0\leqslant\mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(n)}(\omega)}(\omega))\leqslant\mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(N)}(\omega)}(\omega))\quad (n\geqslant N) \tag{1.3.36}$$

由 $\alpha_t^{(n)}(\omega)$ 的定义和 (1.3.33) 知

$$\alpha_t^{(N)}(\omega)<\sigma(\omega)\leqslant+\infty \tag{1.3.37}$$

于是由引理 1.3.2 得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B^{(n)}_{\alpha_t^{(N)}(\omega)}(\omega))=0 \tag{1.3.38}$$

由 (1.3.34), (1.3.35), (1.3.36) 和 (1.3.38) 立得 (1.3.31). 引理证毕.

定理 1.3.1. 在 $[0,\sigma(\omega))$ $(\omega\in\Omega)$ 上处处有

$$\lim_{n\to\infty}x^{(n)}(t,\omega)=x(t,\omega) \tag{1.3.39}$$

证. 设 $t<\sigma(\omega)$, 于是存在 $N>0$, 使

$$x^{(n)}(t,\omega)=x(\alpha_t^{(n)}(\omega),\omega)\quad (n\geqslant N) \tag{1.3.40}$$

于是由性质 (D_1) 和引理 1.3.3 立得我们的定理.

§ 1.4. 关于 $X^{(n)}(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 的进一步性质

设 $X(\omega)=\{x(t,\omega),t<\sigma(\omega)\}$ 是任一 Q 过程. 以 N_t 表示由形如 $(x_u=i,\sigma>t)$ $(u\leqslant t,\ i\in E\cup\{+\infty\})$ 的集合所产生的在空间 $\Omega_t=(\sigma>t)$ 中的 σ-代数. 于是有

$$u\leqslant t,\ A\in N_t\Rightarrow A\cap\Omega_t\in N_t \tag{1.4.1}$$

关于不依赖于将来的随机变量,我们将采用的是 [6] 中的定义,即

定义 1.4.1. 函数 $\delta(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ 叫做关于过程

$$X(\omega)=\{x(t,\omega),\ t<\sigma(\omega)\}$$

的不依赖于将来的随机变量，如果

(1) $$0 \leqslant \delta(\omega) \leqslant \sigma(\omega) \quad (\omega \in \Omega) \tag{1.4.2}$$

(2) 对一切 $t \geqslant 0$ 有

$$(\delta \leqslant t < \sigma) \in N_t \tag{1.4.3}$$

显然，条件(2)可用下列的条件代替:

(2)′ 对一切 $t \geqslant 0$ 有

$$(\delta > t) \in N_t \tag{1.4.4}$$

引理 1.4.1. 若 $\delta(\omega)$ 是关于过程

$$X(\omega) = \{x(t, \omega),\ t < \sigma(\omega)\}$$

的不依赖于将来的随机变量，则

$$(\delta > u,\ \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.5}$$

$$(\delta \geqslant u,\ \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.6}$$

$$(\delta = u,\ \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.7}$$

$$(\delta \leqslant u,\ \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.8}$$

以及

$$(\delta < u,\ \sigma > t) \in N_t \quad (u \leqslant t) \tag{1.4.9}$$

证. 由(1.4.1)和(1.4.4)得(1.4 5)，从而得(1.4.8). 由(1.4.1)和(1.4.5)知

$$(\delta \geqslant u, \sigma > t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\delta > u - \frac{1}{n}, \sigma > t\right) \in N_t \tag{1.4.10}$$

于是得(1.4.6)，从而得(1.4.9). 由(1.4.5)和(1.4.6)得(1.4.7). 引理得证.

引理 1.4.2. 设 δ_1, δ_2 是关于过程

$$X(\omega) = \{x(t, \omega),\ t < \sigma(\omega)\}$$

的不依赖于将来的随机变量，且 $\delta_1 \leqslant \delta_2$，则

$$(\delta_2 - \delta_1 < r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \in N_t \tag{1.4.11}$$

及

$$(\delta_2 - \delta_1 > r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \in N_t \tag{1.4.12}$$

证. (i) (1.4.11)式的证明.

若 $r \leqslant 0$，则

$$(\delta_2 - \delta_1 < r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) = \emptyset \in N_t \qquad (1.4.13)$$

若 $r > 0$，R 表示有理数集，则由引理 1.4.1 知

$$\begin{aligned}
&(\delta_2 - \delta_1 < r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \\
&= (\delta_2 < \delta_1 + r,\ \delta_2 < t,\ \sigma > t) \cup (\delta_2 < \delta_1 + r,\ \delta_2 = t,\ \sigma > t) \\
&= \Big\{ \bigcup_{\substack{r_1, r_2 \in R \\ r_1, r_2 < t \\ r_2 < r_1 + r}} [(\delta_2 < r_2, \sigma > t) \cap (\delta_1 > r_1, \sigma > t)] \Big\} \\
&\quad \cup [(\delta_1 > t - r,\ \sigma > t) \cap (\delta_2 = t,\ \sigma > t)] \in N_t \qquad (1.4.14)
\end{aligned}$$

由 (1.4.13) 和 (1.4.14) 立得 (1.4.11)；

(ii) (1.4.12) 式的证明.

若 $r < 0$，则

$$(\delta_2 - \delta_1 > r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) = (\delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \in N_t \qquad (1.4.15)$$

若 $r \geqslant 0$，则由引理 1.4.1 知

$$\begin{aligned}
&(\delta_2 - \delta_1 > r,\ \delta_2 \leqslant t,\ \sigma > t) \\
&= \Big\{ \bigcup_{\substack{r_1, r_2 \in R \\ r_1, r_2 < t \\ r_2 > r_1 + r}} [(\delta_2 > r_2,\ \sigma > t) \cap (\sigma_2 < t,\ \sigma > t) \cap (\delta_1 < r_1,\ \sigma > t)] \Big\} \\
&\quad \cup [(\delta_1 < t - r,\ \sigma > t) \cap (\delta_2 = t,\ \sigma > t)] \in N_t \qquad (1.4.16)
\end{aligned}$$

由 (1.4.15) 和 (1.4.16) 立得 (1.4.12).

引理证毕.

引理 1.4.3. 对于任一 $s \in [0, +\infty)$，$\alpha_s^{(n)}(\omega)$ 是关于 Q 过程 $X(\omega) = \{x(t, \omega),\ t < \sigma(\omega)\}$ 的不依赖于将来的随机变量.

证. 在本引理的证明过程中把 $\alpha_s^{(n)}(\omega)$ 简记为 $\alpha(\omega)$. 并注意 $\beta_0^{(n)}(\omega)$, $\sigma_k^{(n)}(\omega)$, $\beta_k^{(n)}(\omega)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 都是关于 Q 过程 $X(\omega)$ 的不依赖于将来的随机变量.

下面分两种情况进行论证：

(i) $t < s$.

若 $\omega \in (\sigma > t)$ 及 $s \geqslant \sigma^{(n)}(\omega)$，则 $\alpha(\omega) = \sigma(\omega) > t$；若 $\omega \in (\sigma > t)$ 及 $s < \sigma^{(n)}(\omega)$，则 $\alpha(\omega) \geqslant s > t$. 于是 $(\alpha > t) \supseteq$

$(\sigma > t)$. 但恒有 $(\alpha > t)\subseteq(\sigma > t)$. 所以,当 $t < s$ 时我们有

$$(\alpha > t) = (\sigma > t) \tag{1.4.17}$$

(ii) $t \geqslant s$.

由于 $(\alpha > t)\subseteq(\sigma > t)$, 所以 $(\alpha > t) = (\alpha > t, \sigma > t)$. 于是由引理1.3.1得

$$(\alpha > t) = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(\beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t < \sigma_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t)\right]$$

$$\cup\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(\sigma_k^{(n)} \leqslant t < \beta_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t)\right] \tag{1.4.18}$$

由于当 $\beta_0^{(n)} \leqslant t < \sigma_1^{(n)}$ 时有 $\alpha \leqslant s \leqslant t$, 所以

$$(\beta_0^{(n)} \leqslant t < \sigma_1^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t) = \varnothing \tag{1.4.19}$$

由 (1.3.22) 及 $\alpha > t$ 当且仅当 $\mu(B_t^{(n)}) > t - s$ 知

$$\begin{aligned}
&(\beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t < \sigma_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t)\\
&= (\beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t < \sigma_k^{(n)}, \mu(B_t^{(n)}) > t - s, \sigma > t)\\
&= \left[\left(\sum_{j=1}^{k-1}(\beta_j^{(n)} - \sigma_j^{(n)})\right) > t - s, \beta_{k-1}^{(n)} \leqslant t, \sigma > t\right] \cap (\sigma_k^{(n)} > t)\\
&= \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\bigcup_{r_j \in R}\left[\bigcap_{j=1}^{k-1}(\beta_j^{(n)} - \sigma_j^{(n)} > r_j, \beta_j^{(n)} \leqslant t, \sigma > t)\right]\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} r_j > t - s\end{array}\right\} \cap (\sigma_k^{(n)} > t)
\end{aligned}$$

$$(k > 1) \tag{1.4.20}$$

由 (1.3.21) 及 $\alpha > t$ 当且仅当 $\mu(A_t^{(n)}) < s$, 知

$$\begin{aligned}
&(\sigma_k^{(n)} \leqslant t < \beta_k^{(n)}, \alpha > t, \sigma > t)\\
&= (\sigma_k^{(n)} \leqslant t < \beta_k^{(n)}, \mu(A_t^{(n)}) < s, \sigma > t)\\
&= \left[\left(\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^{(n)} - \beta_{j-1}^{(n)}\right) < s, \sigma_k^{(n)} \leqslant t, \sigma > t\right] \cap (\beta_k^{(n)} > t)\\
&= \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\bigcup_{r_j \in R}\left[\bigcap_{j=1}^{k}(\sigma_j^{(n)} - \beta_{j-1}^{(n)} < r_j, \sigma_j^{(n)} \leqslant t, \sigma > t)\right]\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} r_j < s\end{array}\right\}
\end{aligned}$$