

高等学校教学用书

# 空间啮合原理及应用

(下 册)

胡来瑛 编

煤炭工业出版社

## 内 容 提 要

本书包括三篇,分上、下册出版。上册为空间啮合的数学基础和基本理论,下册为空间啮合理论的应用。第一篇为空间啮合数学基础,包括向量运算、矩阵及坐标变换、曲线论、曲面论和包络论等。这是用现代解析方法研究空间啮合问题的基本数学工具。

第二篇为空间啮合基本理论,包括相对运动、共轭曲面、诱导法曲率、平面啮合和多自由度啮合等。这是研究空间啮合问题的理论基础。平面啮合可视为空间啮合的特例。

第三篇为空间啮合理论的应用,包括圆弧齿圆柱蜗杆副、直线齿环面蜗杆副、斜平面二次包络环面蜗杆副、角修正直平面二次包络环面蜗杆副、圆锥点啮合圆柱齿轮副以及弧齿锥齿轮副等。这是空间啮合理论在各种齿轮传动中的应用,也是理论联系实际的重要体现。

本书为高等院校机械工程专业研究生的教学用书,也可作为本科同类专业高年级学生开设选修课程使用。对于工厂和科研单位从事齿轮研究的工程技术人员也有参考价值。

责任编辑 王 润 范

## 高等学校教学用书 空间啮合原理及应用 下 册

胡米琦 编

煤炭工业出版社 出版

(北京东直门内大街42号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

开本787×1092mm<sup>1/16</sup>, 印张15

字数 338千字 印数1—1,320

1988年3月第1版: 1988年3月第1次印刷

ISBN 7-5020-0078-X/ID·74

书号2980 定价2.50元

## 前 言

空间啮合理论是用现代解析方法研究齿轮传动啮合性能的基础,也是设计新齿形齿轮传动和研究其他共轭曲面问题的依据。随着生产和科学技术的进步,世界各国都在探索新的啮合方式,从而推动了空间啮合理论的研究和发展。

近年来,由于许多高等院校、科研单位以及广大科学技术人员的共同努力,我国在空间啮合理论方面已经摆脱了长期处于落后状态的局面,达到了世界先进水平。

在空间啮合理论的研究中,由于采用不同的数学工具和处理方法,国内外形成多种学派。本书从中精选和整理最基本的研究成果,使之成为较系统的理论和应用并重的教学用书。

本书是为高等院校机械工程学科研究生的教学需要而编写的,也可供本科同类专业高年级学生开设选修课程使用。

坐标变换是研究空间啮合问题的重要工具,为把空间标架底矢的变换运算和点向量坐标的变换运算系统化,书中将坐标的旋转变换和平移变换分开表述,并引用了向量和矩阵的代数运算方法,这对初学者会有很大方便。

本书收集了国内外大量文献和资料,在此特向这些作者表示诚挚的敬意,同时对支持编写和出版本书的国内同行学者表示衷心的感谢。

由于时间短促和水平所限,书中难免有缺点和欠妥之处,敬请读者批评指正。

编 者

一九八六年 元旦

# 目 录

## 第三篇 空间啮合理论应用

<b>第十一章 圆弧齿圆柱蜗杆副</b> .....	1
第一节 蜗杆齿面方程 .....	1
第二节 蜗轮齿面方程 .....	8
第三节 啮合面和啮合区 .....	15
第四节 法曲率和短程挠率 .....	23
第五节 诱导法曲率 .....	28
第六节 两类界曲线 .....	30
第七节 滑动角和润滑角 .....	32
<b>第十二章 直齿齿环面蜗杆副</b> .....	33
第一节 共轭齿面的形成 .....	33
第二节 蜗杆齿面方程 .....	38
第三节 蜗轮齿面方程 .....	43
第四节 诱导法曲率 .....	50
第五节 两类界曲线 .....	55
第六节 变参数修形计算 .....	57
第七节 滑动角和润滑角 .....	62
<b>第十三章 斜平面二次包络环面蜗杆副</b> .....	63
第一节 共轭齿面的形成 .....	63
第二节 蜗杆齿面方程 .....	65
第三节 蜗轮齿面方程 .....	70
第四节 两次包络的诱导法曲率 .....	78
第五节 两次包络的两类界曲线 .....	84
第六节 两次包络的二次接触特性 .....	91
第七节 滑动角和润滑角 .....	94
<b>第十四章 角修正直平面二次包络环面蜗杆副</b> .....	95
第一节 共轭齿面的形成 .....	95
第二节 蜗杆齿面方程 .....	96
第三节 蜗轮齿面方程 .....	102
第四节 两次包络的两类界曲线 .....	108
第五节 两次包络的诱导法曲率 .....	118
第六节 滑动角和润滑角 .....	128
<b>第十五章 圆弧点啮合圆柱齿轮副</b> .....	128
第一节 共轭齿面的形成 .....	128
第二节 共轭齿面方程 .....	132
第三节 范成切齿方法 .....	136

第四节	诱导法曲率 .....	143
第五节	啮合性能分析 .....	147
<b>第十六章</b>	<b>弧齿锥齿轮副 .....</b>	<b>157</b>
第一节	类型和参数 .....	157
第二节	范成切齿原理 .....	163
第三节	齿面结构分析 .....	168
第四节	切齿误差修正 .....	176
第五节	切齿方法选择 .....	186
第六节	“失配”啮合原理 .....	194
第七节	齿面结构综合 .....	201
第八节	切齿调整计算 .....	212
<b>参考文献</b>	.....	<b>232</b>

## 第三篇 空间啮合理论应用

### 第十一章 圆弧齿圆柱蜗杆副

#### 第一节 蜗杆齿面方程

圆弧齿圆柱蜗杆副是由一种新型的圆柱蜗杆与蜗轮组成。蜗杆在轴截面内具有凹形圆弧齿廓，它的螺旋齿面可用圆弧刀刃的车刀切削成形，也可用圆弧回转面的盘形砂轮磨削成形。蜗轮是用与蜗杆相同的专用滚刀直接范成的。因而，车削蜗杆的齿面是车刀圆弧刀刃在相对运动中形成的轨迹，而磨削蜗杆的齿面是圆盘砂轮的圆弧回转面在相对运动中形成的曲面族的包络。前者称为轨迹面圆弧齿圆柱蜗杆，后者称为包络面圆弧齿圆柱蜗杆。这种蜗杆副是西德最早研究和应用的，国外又称为尼曼蜗杆传动 (Niemann Worm)。

包络面圆弧齿圆柱蜗杆一般做成硬齿面的，经磨削后不仅提高了蜗杆的制造精度和表面光洁度，而且提高了蜗杆副的承载能力和效率。目前，包络面圆弧齿圆柱蜗杆副，特别是大型多头蜗杆副，在国外矿山、冶金设备中，获得日益广泛的应用，国内应用也逐渐增多。本章只讨论包络面圆弧齿圆柱蜗杆副。

#### 一、标架选择和坐标变换

##### 1. 标架选择

图11-1为砂轮轴向剖面简图。这种砂轮的轴向剖面廓线是一段半径为 $\rho$ 的圆弧 $\alpha-\alpha$ ，圆

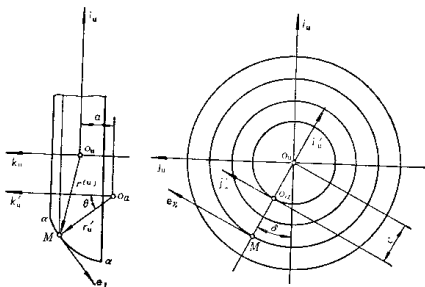


图 11-1

弧中心在 $O_a$ 点。设由砂轮中心 $O_a$ 取一动标架 $\sigma^{(a)} = [O_a, i_a, j_a, k_a]$ 与砂轮相固结，其中 $k_a$ 沿砂轮轴线。另由砂轮轴面圆弧廓线的中心 $O_a$ 取一动标架 $\sigma'_a = [O'_a, i'_a, j'_a, k']$ 与砂轮轴面廓线 $\alpha$ - $\alpha$ 相固结，其中 $i'_a$ 沿砂轮径向指向轴线， $k'$ 平行于 $k_a$ ，且方向相同。

设在砂轮轴截面廓线 $\alpha$ - $\alpha$ 上任取一点 $M$ ， $M$ 点的位置取决于参数 $\theta$ ，在 $\sigma^{(a)}$ 和 $\sigma'_a$ 中，取 $M$ 点的径矢分别用 $r^{(a)}$ 和 $r'_a$ 表示。显然，在砂轮圆弧回转面上设 $M$ 点的单位法线向量为 $n$ ，经 $M$ 点沿两个主方向的单位向量分别用 $e_1$ 、 $e_2$ 表示，有 $e_1 \times e_2 = n$ ，其中 $e_1$ 和 $e_2$ 分别沿砂轮轴截面廓线 $\alpha$ - $\alpha$ 和横截面圆周在 $M$ 点的切线方向， $e_1$ 、 $e_2$ 和 $n$ 组成右手系。

图11-2为用这种砂轮磨削蜗杆齿面的相对运动简图。设由蜗杆上取一动标架 $\sigma^{(1)} = [O_1, i_1, j_1, k_1]$ 与蜗杆相固结，另由蜗杆中心 $O$ 点取一固定标架 $\sigma = [O, i, j, k]$ 。图中， $k_1$ 、 $k$ 与蜗杆轴线重合且方向相同， $\psi$ 为 $\sigma^{(1)}$ 在 $\sigma$ 中的转角， $\rho$ 为螺旋参数， $\gamma_a$ 为砂轮轴线与蜗杆轴线间的夹角。

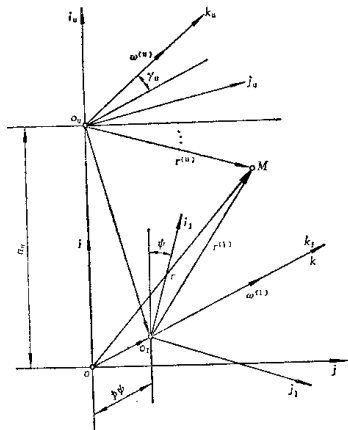


图 11-2

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \rho \cdot \cos \alpha_n \\ b_1 &= r_1 + \rho \cdot \sin \alpha_n \\ a_n &= r_1 + \rho \cdot \sin \alpha_n + c_1 \end{aligned} \right\} \quad (11-1)$$

式中  $\rho$ ——蜗杆法面圆弧齿廓的半径；

$r_1$ ——蜗杆分度圆柱面的半径；

$\alpha_n$ ——蜗杆分度圆柱面上的法向齿形角。

图中， $a_1$ 为砂轮圆弧齿廓 $\alpha$ - $\alpha$ 的圆心 $O_a$ 到砂轮与蜗杆两轴线间的公垂线的距离， $b_1$ 和 $c_1$ 分别为 $O_a$ 到蜗杆轴线和与砂轮轴线的距离， $a_n$ 为两轴线间的公垂线长度。

## 2. 坐标旋转矩阵

当用砂轮磨削蜗杆时，砂轮作高速回转，蜗杆绕轴线 $k$ 作螺旋运动。由于砂轮工作表面是圆弧回转面，所以在研究蜗杆与砂轮的工艺啮合时可不考虑砂轮的转动，而令蜗杆相对于砂轮作螺旋运动。这种螺旋运动可用转角 $\psi$ 和螺旋参数 $\rho$ 表示。

11-3a为砂轮相对于蜗杆的安装位置简图。砂轮轴线与蜗杆轴线间的夹角 $\gamma_a$ 约等于蜗杆分度圆柱上的螺旋线升角 $\lambda_1$ ，即 $\gamma_a \approx \lambda_1$ 。图11-3b是通过砂轮轴线且垂直于蜗杆分度圆柱螺旋线的法向截面简图。图中假设砂轮轴线与蜗杆轴线的公垂线通过蜗杆法面圆弧齿廓的中点 $P$ 。

如图11-3b所示，砂轮相对于蜗杆的安装尺寸为

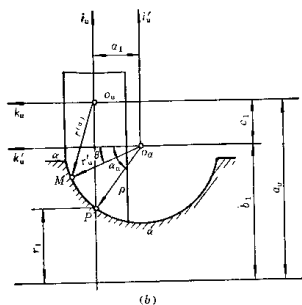
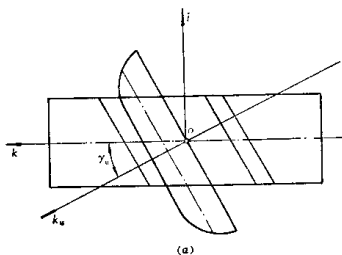


图 11-3

根据图11-1和图11-2所示的几何关系，各标架之间的坐标旋转矩阵为

1)  $\sigma'_u \longleftrightarrow \sigma^{(u)}$

$$S_{u u'} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11-2)$$

$$S_{u' u} = S_{u u'}^T = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11-3)$$

2)  $\sigma^{(u)} \longleftrightarrow \sigma$

$$S_{\sigma u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_u & -\sin \gamma_u \\ 0 & \sin \gamma_u & \cos \gamma_u \end{pmatrix} \quad (11-4)$$



$$S_{u0} = S_{u\sigma}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_u & \sin\gamma_u \\ 0 & -\sin\gamma_u & \cos\gamma_u \end{pmatrix} \quad (11-5)$$

3)  $\sigma \longleftrightarrow \sigma^{(1)}$

$$S_{10} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11-6)$$

$$S_{01} = S_{10}^T = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11-7)$$

4)  $\sigma^{(n)} \longleftrightarrow \sigma^{(1)}$

$$\begin{aligned} S_{1n} = S_{10} S_{0n} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_u & -\sin\gamma_u \\ 0 & \sin\gamma_u & \cos\gamma_u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \cos\gamma_u & -\sin\psi \sin\gamma_u \\ -\sin\psi & \cos\psi \cos\gamma_u & -\cos\psi \sin\gamma_u \\ 0 & \sin\gamma_u & \cos\gamma_u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11-8)$$

$$S_{n1} = S_{1n}^T = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi \cos\gamma_u & \cos\psi \cos\gamma_u & \sin\gamma_u \\ -\sin\psi \sin\gamma_u & -\cos\psi \sin\gamma_u & \cos\gamma_u \end{pmatrix} \quad (11-9)$$

### 3. 坐标变换公式

设砂轮轴面圆弧廓线上任一点  $M$  在  $\sigma'$  和  $\sigma^{(n)}$  中的径矢分别为  $r'_n$  和  $r^{(n)}$ , 如图 11-1 所示。由点的径矢的坐标变换关系,  $M$  点由  $\sigma'_n$  到  $\sigma^{(n)}$  的坐标变换公式可表示为

$$r^{(n)} = S_{n'n} r'_n + r_{0'n}^{(n)} \quad (11-10)$$

式中  $r^{(n)}$ 、 $r'_n$ —— $M$  点在  $\sigma^{(n)}$ 、 $\sigma'_n$  中的径矢  $r^{(n)}$ 、 $r'_n$  的列矩阵;

$r_{0'n}^{(n)}$ —— $\sigma'_n$  的原点  $O_n$  在  $\sigma^{(n)}$  中的径矢  $r_{0'n}^{(n)}$  的列矩阵。

如图 11-1 所示, 有

$$r_{0'n}^{(n)} = [-c_1 \cos\delta \quad c_1 \sin\delta \quad -a_1]^T \quad (11-11)$$

同理, 设  $M$  点在  $\sigma^{(n)}$  和  $\sigma^{(1)}$  中的径矢分别为  $r^{(n)}$  和  $r^{(1)}$ ,  $M$  点由  $\sigma^{(n)}$  到  $\sigma^{(1)}$  的坐标变换公式为

$$\left. \begin{aligned} r^{(1)} &= S_{1n} r^{(n)} + r_{0'n}^{(1)} \\ r_{0'n}^{(1)} &= S_{10} r_{0'n}^{(n)} + r_{0'0}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (11-12)$$

式中  $r^{(1)}$ —— $M$  点在  $\sigma^{(1)}$  中的径矢  $r^{(1)}$  的列矩阵;

$r_{0'n}^{(1)}$ —— $\sigma^{(n)}$  的原点  $O_n$  在  $\sigma^{(1)}$  中的径矢  $r_{0'n}^{(1)}$  的列矩阵;

$r_{0'0}$ —— $\sigma^{(n)}$  的原点  $O_n$  在  $\sigma$  中的径矢  $r_{0'0}$  的列矩阵;

$r_{0'0}^{(1)}$ —— $\sigma$  的原点  $O$  在  $\sigma^{(1)}$  中的径矢  $r_{0'0}^{(1)}$  的列矩阵。

如图 11-2 所示, 有

$$r_{0'n}^{(1)} = [0 \quad 0 \quad -p\psi]^T \quad (11-13)$$

$$r_{0'0} = [a_n \quad 0 \quad 0]^T \quad (11-14)$$

将式 (11-6)、(11-14) 及式 (11-13) 代入式 (11-12) 第二式, 乘开后代

$$r_{i_u}^{(1)} = [a_u \cos \psi - a_n \sin \psi - \rho \psi]^T \quad (11-15)$$

同理,  $M$  点由  $\sigma^{(3)}$  到  $\sigma$  的坐标变换公式可表示为

$$r = S_{0n} r^{(3)} + r_{0n} \quad (11-16)$$

## 二、砂轮与蜗杆的啮合方程和接触线

### 1. 砂轮工作母面方程

如图 11-3b 所示, 在  $\sigma'_u$  中, 砂轮轴面圆弧廓线  $\alpha-\alpha$  的向量方程为

$$r'_u = -\rho \sin \theta \cdot i_u + \rho \cos \theta \cdot k'_u \quad (11-17)$$

式中  $\theta$ ——砂轮轴面圆弧上任一点  $M$  的位置参数。

当砂轮轴面圆弧  $\alpha-\alpha$  绕砂轮轴线旋转一周时, 便形成作为砂轮工作表面的圆弧回转面。设砂轮的转角为  $\delta$ , 利用式 (11-10) 将  $M$  点在  $\sigma'_u$  中的径矢  $r'_u$  变换到  $\sigma^{(2)}$  中, 就得到砂轮工作表面的向量方程, 即

$$r^{(2)} = S_{u2} r'_u + r_{e_u}^{(2)}$$

将式 (11-2)、(11-17) 及式 (11-11) 代入, 有

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ 0 \\ \rho \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_1 \cos \delta \\ c_1 \sin \delta \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

将右端乘开, 得砂轮工作母面的方程为

$$\left. \begin{aligned} x_u &= -(\rho \sin \theta + c_1) \cos \delta \\ y_u &= (\rho \sin \theta + c_1) \sin \delta \\ z_u &= \rho \cos \theta - a_1 \end{aligned} \right\} \quad (11-18)$$

### 2. 砂轮工作表面的单位法线向量

如图 11-1 所示, 在  $\sigma'_u$  中, 砂轮圆弧回转面在  $M$  点处沿两个主方向的单位向量  $e_1$  及  $e_2$  可表示为

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\cos \theta \cdot i_u - \sin \theta \cdot k'_u \\ e_2 &= j'_u \end{aligned} \right\} \quad (11-19)$$

利用式 (11-3), 由  $\sigma^{(2)}$  到  $\sigma'_u$  的底矢变换公式为

$$\begin{pmatrix} i'_u \\ j'_u \\ k'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_u \\ j_u \\ k_u \end{pmatrix}$$

或表示为

$$\left. \begin{aligned} i'_u &= \cos \delta \cdot i_u - \sin \delta \cdot j_u \\ j'_u &= \sin \delta \cdot i_u + \cos \delta \cdot j_u \\ k'_u &= k_u \end{aligned} \right\} \quad (11-20)$$

代入式 (11-19), 得砂轮工作母面上两个主方向的单位向量  $e_1$  及  $e_2$  在  $\sigma^{(2)}$  中的表达式为

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(2)} &= -\cos \theta \cos \delta \cdot i_u + \cos \theta \sin \delta \cdot j_u - \sin \theta \cdot k_u \\ e_2^{(2)} &= \sin \delta \cdot i_u + \cos \delta \cdot j_u \end{aligned} \right\} \quad (11-21)$$

因而, 在  $\sigma^{(2)}$  中, 砂轮工作母面上的单位法线向量  $n^{(2)}$  可表示为

$$\mathbf{n}^{(n)} = \mathbf{e}_1^{(n)} \times \mathbf{e}_2^{(n)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_n & \mathbf{j}_n & \mathbf{k}_n \\ -\cos\theta\cos\delta & \cos\theta\sin\delta & -\sin\theta \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sin\theta\cos\delta \cdot \mathbf{i}_n - \sin\theta\sin\delta \cdot \mathbf{j}_n - \cos\theta \cdot \mathbf{k}_n \quad (11-22)$$

或用分量表示为

$$\left. \begin{aligned} n_{x_n} &= \sin\theta\cos\delta \\ n_{y_n} &= -\sin\theta\sin\delta \\ n_{z_n} &= -\cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (11-23)$$

同样, 利用式 (11-8) 将  $\mathbf{n}^{(n)}$  由  $\sigma^{(n)}$  变换到  $\sigma^{(1)}$  中, 可得单位法线向量  $\mathbf{n}$  在  $\sigma^{(1)}$  中的表达式, 即

$$\mathbf{n}^{(1)} = S_{1n} \mathbf{n}^{(n)}$$

将式 (11-8) 和 (11-23) 代入, 有

$$\begin{pmatrix} n_{x_1} \\ n_{y_1} \\ n_{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\gamma_n & -\sin\psi\sin\gamma_n \\ -\sin\psi & \cos\psi\cos\gamma_n & \cos\psi\sin\gamma_n \\ 0 & \sin\gamma_n & \cos\gamma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\delta \\ -\sin\theta\sin\delta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

将右端乘开, 得

$$\left. \begin{aligned} n_{x_1} &= \sin\theta(\cos\delta\cos\psi - \sin\delta\sin\psi\cos\gamma_n) + \cos\theta\sin\psi\sin\gamma_n \\ n_{y_1} &= -\sin\theta(\cos\delta\sin\psi + \sin\delta\cos\psi\cos\gamma_n) + \cos\theta\cos\psi\sin\gamma_n \\ n_{z_1} &= \sin\theta\sin\delta\sin\gamma_n - \cos\theta\cos\gamma_n \end{aligned} \right\} \quad (11-24)$$

或表示为

$$\mathbf{n}^{(1)} = n_{x_1} \cdot \mathbf{i}_1 + n_{y_1} \cdot \mathbf{j}_1 + n_{z_1} \cdot \mathbf{k}_1 \quad (11-25)$$

### 3. 砂轮与蜗杆的相对运动速度

如图11-2所示, 设将砂轮视为不转动, 令蜗杆相对于砂轮作螺旋运动, 角速度为  $\omega^{(1)}$ , 螺旋参数为  $p$ 。因而, 砂轮与蜗杆的相对运动速度  $\mathbf{V}^{(n)}$  可表示为

$$\mathbf{V}^{(n)} = \mathbf{V}^{(n)} - \mathbf{V}^{(1)} = \omega^{(n)} \times \mathbf{r}^{(n)} - (\omega^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)} + p\omega^{(1)})$$

式中  $\omega^{(n)} = 0$ ;  $\omega^{(1)} = \omega_1 \mathbf{k}_1$ ;

$$\mathbf{r}^{(1)} = r - p\psi \mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - p\psi)\mathbf{k}。$$

代入上式, 有

$$\mathbf{V}^{(n)} = \omega_1 y \cdot \mathbf{i} - \omega_1 x \cdot \mathbf{j} - p\omega_1 \cdot \mathbf{k} \quad (11-26)$$

利用式 (11-4), 由  $\sigma^{(n)}$  到  $\sigma$  的底矢变换公式为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_n & -\sin\gamma_n \\ 0 & \sin\gamma_n & \cos\gamma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_n \\ \mathbf{j}_n \\ \mathbf{k}_n \end{pmatrix}$$

或表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{i}_n \\ \mathbf{j} &= \cos\gamma_n \cdot \mathbf{j}_n - \sin\gamma_n \cdot \mathbf{k}_n \\ \mathbf{k} &= \sin\gamma_n \cdot \mathbf{j}_n + \cos\gamma_n \cdot \mathbf{k}_n \end{aligned} \right\} \quad (11-27)$$

同理, 根据式 (11-16), 将式 (11-4) 和式 (11-14) 代入, 得出  $\sigma^{(n)}$  到  $\sigma$  的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_u & -\sin\gamma_u \\ 0 & \sin\gamma_u & \cos\gamma_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

或表示为

$$\left. \begin{aligned} x &= x_u + a_u \\ y &= y_u \cos\gamma_u - z_u \sin\gamma_u \\ z &= y_u \sin\gamma_u + z_u \cos\gamma_u \end{aligned} \right\} \quad (11-28)$$

因而, 将式 (11-27) 和 (11-28) 代入式 (11-26), 整理后得相对运动速度  $V^{(u)}$  在  $\sigma^{(u)}$  中的表达式为

$$\left. \begin{aligned} V_{x_u}^{(u)} &= \omega_1 (y_u \cos\gamma_u - z_u \sin\gamma_u) \\ V_{y_u}^{(u)} &= -\omega_1 [(x_u + a_u) \cos\gamma_u + \rho \sin\gamma_u] \\ V_{z_u}^{(u)} &= \omega_1 [(x_u + a_u) \sin\gamma_u - \rho \cos\gamma_u] \end{aligned} \right\} \quad (11-29)$$

或表示为

$$\mathbf{V}^{(u)} = V_{x_u}^{(u)} \cdot \mathbf{i}_u + V_{y_u}^{(u)} \cdot \mathbf{j}_u + V_{z_u}^{(u)} \cdot \mathbf{k}_u \quad (11-30)$$

#### 4. 砂轮与蜗杆的啮合方程

当用砂轮磨削蜗杆齿面时, 在  $\sigma^{(u)}$  中, 砂轮与蜗杆的啮合方程可表示为

$$\phi^{(u)} = \mathbf{n}^{(u)} \cdot \mathbf{V}^{(u)} = 0$$

将式 (11-23) 和式 (11-29) 代入, 得

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_u - \rho \operatorname{ctg}\gamma_u - c_1 \cos\delta}{a_1 \cos\delta + (\rho + a_u \operatorname{ctg}\gamma_u) \sin\delta} \quad (11-31)$$

#### 5. 砂轮与蜗杆的接触线方程

将式 (11-31) 与式 (11-18) 联立, 便是砂轮工作表面上的接触线方程, 即

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{a_u - \rho \operatorname{ctg}\gamma_u - c_1 \cos\delta}{a_1 \cos\delta + (\rho + a_u \operatorname{ctg}\gamma_u) \sin\delta} \\ x_u &= -(\rho \sin\theta + c_1) \cos\delta \\ y_u &= (\rho \sin\theta + c_1) \sin\delta \\ z_u &= \rho \cos\theta - a_1 \end{aligned} \right\} \quad (11-32)$$

### 三、蜗杆齿面方程

利用式 (11-12) 第一式, 将砂轮工作母面方程 (11-18) 由  $\sigma^{(u)}$  变换到  $\sigma^{(1)}$  中, 有

$$\mathbf{r}^{(1)} = S_{1u} \mathbf{r}^{(u)} + \mathbf{r}_0^{(1)}$$

将式 (11-8) 和 (11-15) 代入, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \cos\gamma_u & -\sin\psi \sin\gamma_u \\ -\sin\psi & \cos\psi \cos\gamma_u & -\cos\psi \sin\gamma_u \\ 0 & \sin\gamma_u & \cos\gamma_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_u \cos\psi \\ -a_u \sin\psi \\ -\rho\psi \end{pmatrix}$$

将右端乘开, 并与式 (11-31) 联立, 得蜗杆齿面方程为

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{a_u - \rho \operatorname{ctg} \gamma_u - c_1 \cos \delta}{a_1 \cos \delta + (\rho + a_u \operatorname{ctg} \gamma_u) \sin \delta} \\
 x_1 &= (x_u + a_u) \cos \psi + (y_u \cos \gamma_u - z_u \sin \gamma_u) \sin \psi \\
 y_1 &= -(x_u + a_u) \sin \psi + (y_u \cos \gamma_u - z_u \sin \gamma_u) \cos \psi \\
 z_1 &= y_u \sin \gamma_u + z_u \cos \gamma_u - \rho \psi \\
 x_u &= -(\rho \sin \theta + c_1) \cos \delta \\
 y_u &= (\rho \sin \theta + c_1) \sin \delta \\
 z_u &= \rho \cos \theta - a_1
 \end{aligned} \right\} (11-33)$$

式中  $\psi$  ——蜗杆相对于砂轮的转角参数；

$\delta, \theta$  ——砂轮工作母面上的参数，其中只有一个参数是独立的，另一个参数由啮合方程决定。

## 第二节 蜗轮齿面方程

用式(11-33)表示的蜗杆齿面方程是以三个参数的形式给出的。其中虽然有两个参数是独立的，但计算很复杂，特别是用这种形式的蜗杆齿面方程求瞬时接触线较麻烦。因此，为便于计算，通常采用由端面齿廓作螺旋运动导出的蜗杆齿面的双参数方程，求解蜗杆与蜗轮的啮合方程和接触线。

### 一、蜗杆的端面齿廓方程

在 $\sigma^{(1)}$ 中，蜗杆的端面齿廓通常是用 $z = 0$ 的坐标平面在蜗杆的螺旋齿面上截得的，如图11-4a所示。因而，将 $z_1 = 0$ 代入蜗杆的齿面方程(11-33)，就是蜗杆的端面齿廓方程，得

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{a_u - \rho \operatorname{ctg} \gamma_u - c_1 \cos \delta}{a_1 \cos \delta + (\rho + a_u \operatorname{ctg} \gamma_u) \sin \delta} \\
 x_1 &= (\rho \sin \theta + c_1) (-\cos \delta \cos \psi + \sin \delta \sin \psi \cos \gamma_u) \\
 &\quad - (\rho \cos \theta - a_1) \sin \psi \sin \gamma_u + a_u \cos \psi \\
 y_1 &= (\rho \sin \theta + c_1) (\cos \delta \sin \psi + \sin \delta \cos \psi \cos \gamma_u) \\
 &\quad - (\rho \cos \theta - a_1) \cos \psi \sin \gamma_u - a_u \sin \psi \\
 \psi &= \frac{1}{\rho} [(\rho \sin \theta + c_1) \sin \delta \sin \gamma_u + (\rho \cos \theta - a_1) \cos \gamma_u]
 \end{aligned} \right\} (11-34)$$

利用方程组(11-34)求蜗杆端面齿廓的程序为：先设定一系列 $\delta$ 值，用第一、四式分别求出相应的 $(\theta, \psi)$ 值，再代入第二、三式求出对应的 $(x_1, y_1)$ 值。因而，根据一系列的 $(x_1, y_1)$ 值可求得蜗杆端面齿廓上对应点的极径 $r_1$ 和极角 $\eta$ ，即

$$\left. \begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\
 \eta &= \theta_1 - \mu
 \end{aligned} \right\} (11-35)$$

式中  $\theta_1$  ——由底矢 $i_1$ 起算到单位切矢 $\alpha$ 的有向角；

$\mu$  ——端面齿廓上 $M$ 点的径矢 $r^{(1)}$ 到单位切矢 $\alpha$ 的有向角，又称为径切角。

由于 $\eta$ 是由底矢 $i_1$ 起算的极角，所以蜗杆端面齿廓的极坐标方程可表示为 $r_1 = r_1(\eta)$ 。

由于用 $z_1 = 0$ 的平面截得的蜗杆端面齿廓在坐标平面 $O_1 i_1 j_1$ 上有可能位于四个象限的任一位置，为便于表示，可引用符号 $\operatorname{sign}$ ，当 $x_1 \neq 0$ 或 $y_1 \neq 0$ 时，角度 $\theta_1$ 和 $\eta$ 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\pi}{2} [1 - \text{sign}(x_1)] + \text{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) & (x_1 \neq 0) \\ \theta_i &= \frac{\pi}{2} [2 - \text{sign}(n_{x1})] + \text{arctg}\left(\frac{n_{y1}}{n_{x1}}\right) & (n_{x1} \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (11-35)$$

式中, 符号 $\text{sign}$ 表示: 当 $x_1 > 0$ 或 $n_{x1} > 0$ 时, 取 $\text{sign}(x_1) = 1$ 或 $\text{sign}(n_{x1}) = 1$ , 而当 $x_1 < 0$ 或 $n_{x1} < 0$ 时, 取 $\text{sign}(x_1) = -1$ 或 $\text{sign}(n_{x1}) = -1$ 。

在特殊情况下, 当 $x_1 = 0$ 或 $n_{x1} = 0$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign}(y_1) & (x_1 = 0) \\ \theta_i &= \frac{\pi}{2} [1 + \text{sign}(n_{y1})] & (n_{x1} = 0) \end{aligned} \right\} \quad (11-37)$$

式中, 符号 $\text{sign}$ 表示: 当 $y_1 > 0$ 或 $n_{y1} > 0$ 时, 取 $\text{sign}(y_1) = 1$ 或 $\text{sign}(n_{y1}) = 1$ ; 当 $y_1 < 0$ 或 $n_{y1} < 0$ 时, 取 $\text{sign}(y_1) = -1$ 或 $\text{sign}(n_{y1}) = -1$ 。

因而, 在一般情况下, 蜗杆端面齿廓在 $M$ 点的径切角 $\mu$ 可表示为

$$\mu = \frac{\pi}{2} [1 + \text{sign}(x_1) - \text{sign}(n_{x1})] + \text{arctg}\left(\frac{n_{y1}}{n_{x1}}\right) - \text{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \quad (x_1 \neq 0, n_{x1} \neq 0) \quad (11-38)$$

显然, 当 $x_1 > 0$ 和 $n_{x1} > 0$ 时, 如图11-1a所示, 角度 $\eta$ 和 $\mu$ 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \text{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \\ \mu &= \frac{\pi}{2} + \text{arctg}\left(\frac{n_{y1}}{n_{x1}}\right) - \text{arctg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (11-39)$$

在利用式(11-24)计算 $n_{x1}$ 和 $n_{y1}$ 时, 应将由式(11-34)求 $x_1$ 和 $y_1$ 时所用的 $d$ 、 $\theta$ 和 $\psi$ 值代入。

当蜗杆端面齿廓以极坐标方程 $r_i = r_i(\eta)$ 给出时, 径切角 $\mu$ 也可用下式确定:

$$\text{tg}\mu = \frac{r_i}{\frac{dr_i}{d\eta}} = \frac{r_i}{r_i'(\eta)} \quad (11-40)$$

## 二、蜗杆齿面的双参数方程

如图11-4b所示, 设取一动标架 $\sigma_i = [O_i, i_i, j_i, k_i]$ 与蜗杆端面齿廓相固结, 而图中 $\sigma^{(1)} = [O_1, i_1, j_1, k_1]$ 转化为固定标架, 其中 $k_1$ 与 $k_i$ 重合。因而, 当蜗杆端面齿廓随同标架 $\sigma_i$ 在 $\sigma^{(1)}$ 中作螺旋运动时, 便形成蜗杆螺旋齿面, 取 $\sigma_i$ 作螺旋运动的转角为 $\zeta$ , 螺旋参数为 $\hat{p}$ 。

如图11-4a所示, 设蜗杆端面齿廓的极坐标方程为 $r_i = r_i(\eta)$ ,  $r_i$ 为端面齿廓上 $M$ 点径矢 $r^{(i)}$ 的模,  $\eta$ 为由 $i_i$ 起算的极角。因而, 蜗杆端面齿廓在 $\sigma_i$ 中的向量方程可表示为

$$r^{(i)} = r^{(i)}(\eta) = x_i(\eta)i_i + y_i(\eta)j_i \quad (11-41)$$

式中  $x_i(\eta) = r_i(\eta) \cdot \cos\eta$ ;  $y_i(\eta) = r_i(\eta) \cdot \sin\eta$ 。

显然, 当 $\sigma_i$ 在 $\sigma^{(1)}$ 中作螺旋运动时, 将蜗杆端面齿廓在 $\sigma_i$ 中的向量方程(11-41)变换

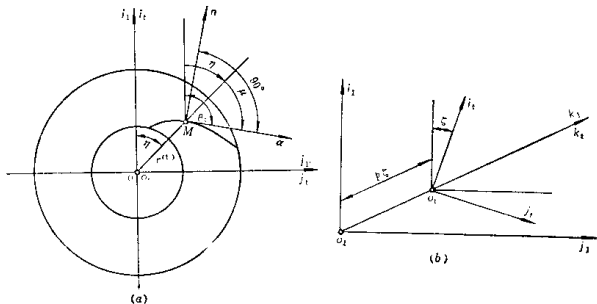


图 11-4

到 $\sigma^{(1)}$ 中, 就是蜗杆的齿面方程, 即

$$r^{(1)} = M_{11} r^{(2)} + r_{O_1}^{(1)} \quad (11-42)$$

式中  $M_{11}$ ——由 $\sigma_2$ 到 $\sigma^{(1)}$ 的坐标旋转矩阵;

$r^{(2)}$ —— $M$ 点在 $\sigma_2$ 中的径矢 $r^{(2)}$ 的列矩阵;

$r_{O_1}^{(1)}$ —— $\sigma_2$ 的原点 $O_2$ 在 $\sigma^{(1)}$ 中的径矢 $r_{O_2}^{(1)}$ 的列矩阵。

根据图11-4b中的几何关系, 有

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11-43)$$

$$r_{O_2}^{(1)} = [0 \quad 0 \quad p\zeta]^T \quad (11-44)$$

代入上式, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p\zeta \end{pmatrix}$$

将右端乘开, 并将式(11-41)代入, 得蜗杆齿面的双参数方程为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_1(\eta) \cdot \cos(\eta + \zeta) \\ y_1 &= r_1(\eta) \cdot \sin(\eta + \zeta) \\ z_1 &= p\zeta \end{aligned} \right\} \quad (11-45)$$

或表示为

$$r^{(1)} = r_1(\eta) \cos(\eta + \zeta) \cdot i_1 + r_1(\eta) \sin(\eta + \zeta) \cdot j_1 + p\zeta \cdot k_1 \quad (11-46)$$

式中,  $\eta$ 和 $\zeta$ 是蜗杆齿面的参变数。

### 三、蜗杆与蜗轮的啮合方程和接触线

#### 1. 标架选择和坐标变换

##### 1) 标架选择

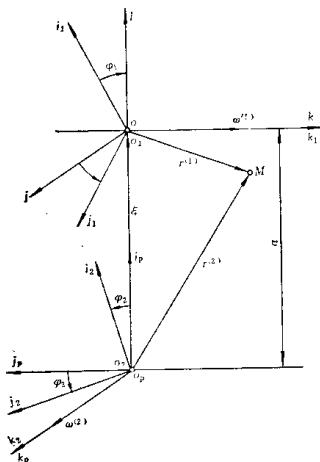


图 11-5

蜗杆与蜗轮啮合的标架选择如图11-5所示。图中， $\sigma = [O; i, j, k]$ 为蜗杆上的定标架， $k$ 与 $\omega^{(1)}$ 重合； $\sigma_p = [O_p; i_p, j_p, k_p]$ 为蜗轮上的辅助定标架， $k_p$ 与 $\omega^{(2)}$ 重合； $\sigma^{(1)} = [O_1; i_1, j_1, k_1]$ 为与蜗杆相固结的动标架， $\sigma^{(1)}$ 在 $\sigma$ 中的转角为 $\varphi_1$ ； $\sigma^{(2)} = [O_2; i_2, j_2, k_2]$ 为与蜗轮相固结的动标架， $\sigma^{(2)}$ 在 $\sigma_p$ 中的转角为 $\varphi_2$ ， $\varphi_2 = i_{21}\varphi_1$ 。蜗杆与蜗轮为正交传动，啮合中心距为 $a$ 。

## 2) 坐标旋转矩阵

根据图11-5所示的几何关系，各标架之间的坐标旋转矩阵为

$$(1) \sigma^{(1)} \longleftrightarrow \sigma$$

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11-47)$$

$$M_{10} = M_{01}^{-1} \quad (11-48)$$

$$(2) \sigma^{(2)} \longleftrightarrow \sigma_p$$

$$M_{p2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11-49)$$

$$M_{2p} = M_{p2}^{-1} \quad (11-50)$$



$$(3) \sigma_p \longleftrightarrow \sigma$$

$$M_{\theta p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11-51)$$

$$M_{p\theta} = M_{\theta p}^T \quad (11-52)$$

$$(4) \sigma^{(1)} \longleftrightarrow \sigma^{(2)}$$

$$\begin{aligned} M_{21} &= M_{2p} M_{p\theta} M_{\theta 1} = M_{p_2}^T M_{p_1}^T M_{\theta 1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 & \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11-53) \end{aligned}$$

$$M_{12} = M_{21}^T \quad (11-54)$$

### 3) 坐标变换公式

设蜗杆与蜗轮两共轭齿面上的啮合点  $M$  在  $\sigma$ 、 $\sigma^{(1)}$ 、 $\sigma^{(2)}$  和  $\sigma_p$  中的径矢分别为  $r$ 、 $r^{(1)}$ 、 $r^{(2)}$  和  $r_p$ ， $M$  点各径矢之间的坐标变换公式为

$$(1) r^{(1)} \longleftrightarrow r$$

$$\left. \begin{aligned} r &= M_{01} r^{(1)} \\ r^{(1)} &= M_{10} r \end{aligned} \right\} \quad (11-55)$$

$$(2) r^{(2)} \longleftrightarrow r_p$$

$$\left. \begin{aligned} r_p &= M_{p2} r^{(2)} \\ r^{(2)} &= M_{2p} r_p \end{aligned} \right\} \quad (11-56)$$

$$(3) r^{(1)} \longleftrightarrow r^{(2)}$$

$$\left. \begin{aligned} r^{(2)} &= M_{21} r^{(1)} + r_{0_2}^{(2)} \\ r^{(1)} &= M_{12} r^{(2)} + r_{0_1}^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (11-57)$$

式中， $r$ 、 $r^{(1)}$ 、 $r^{(2)}$  和  $r_p$  分别为径矢  $r$ 、 $r^{(1)}$ 、 $r^{(2)}$  和  $r_p$  的列矩阵， $r_{0_1}^{(1)}$  及  $r_{0_2}^{(2)}$  分别为  $\sigma^{(1)}$  的原点  $O_1$  在  $\sigma^{(1)}$  中的径矢  $r_{0_1}^{(1)}$  和  $\sigma^{(2)}$  的原点  $O_2$  在  $\sigma^{(2)}$  中的径矢  $r_{0_2}^{(2)}$  的列矩阵。

### 2. 蜗杆齿面的单位法线向量

设用  $\alpha$  表示蜗杆端面齿廓上  $M$  点的单位切线向量，如图 11-4a 所示，在  $\sigma_t$  中， $\alpha^{(t)}$  可表示为

$$\alpha^{(t)} = \cos(\eta + \mu) \cdot i_t + \sin(\eta + \mu) \cdot j_t \quad (11-58)$$

利用由  $\sigma_t$  到  $\sigma^{(1)}$  的坐标变换公式，将  $\alpha^{(t)}$  由  $\sigma_t$  变换到  $\sigma^{(1)}$  中，有

$$\alpha^{(1)} = M_{1t} \alpha^{(t)}$$

将式 (11-43) 和式 (11-58) 代入，得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{y_1} &= \cos(\eta + \mu + \zeta) \\ \alpha_{z_1} &= \sin(\eta + \mu + \zeta) \\ \alpha_{x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-59)$$

或表示为