高等学校经济类专科教材

经济应用数学基础（二）

线性代数与线性规划

周誓达　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与线性规划/周誓达编著.
北京:中国人民大学出版社,1997

ISBN 7-300-02453-X/O·37
Ⅰ.线...
Ⅱ.周...
Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材...②线性规则-高等学校-教材
Ⅳ.0151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 24273 号

高等学校经济类专科教材
经济应用数学基础(二)

线性代数与线性规划

周誓达　编著

出　　版:中国人民大学出版社
　　　　(北京海淀路 175 号　邮码 100872)
发　　行:新华书店总店北京发行所
印　　刷:河北省涿州市星河印刷厂

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:8.25
1997 年 12 月第 1 版　1997 年 12 月第 1 次印刷
字数:201 000

定价:11.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　　言

大专经济类应用数学基础教材是为高等专科学校经济类各专业编写的教材，包括《微积分》、《线性代数与线性规划》、《概率统计》等. 特点是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂.

《线性代数与线性规划》共分五章，介绍了经济工作所需要的行列式、矩阵、线性方程组，以及线性规划问题数学模型、单纯形解法，着重讲解基本概念、基本理论和基本方法，培养熟练运算能力.

经济类专业毕竟不是专搞数学的，本着"打好基础，够用为度"的原则，本书删除了对于经济工作并不急需的某些内容及某些定理的严格证明，凡是可讲可不讲的一律不讲，而用较多篇幅详细讲述那些急需的内容，同时也适当注意了知识面的拓宽，适当联系实际，强化在经济上的应用. 体现出"有所为，必须有所不为"的指导思想.

基础课毕竟不是专业课，本着"服务专业，兼顾数学体系"的原则，把握内容的难易程度，不盲目攀比难度，做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通，达到"跳一跳就可够着苹果"的效果. 在内容编排上做到前后呼应，前面的内容在后面都有归宿，后面的内容在前面都有伏笔，使得"讲起来好讲，学起来好学".

例题、习题是指挥棒，集中体现了教学意图，因此对例题、习题的编选给予高度的重视. 例题、习题都经过精心设计与编选，它们与概念、理论、方法的讲述完全配套，其中除计算题与经济应用题外，尚有考察基本概念与基本运算技能的标准化习题. 书末附有习

题答案，便于检查学习效果.

在标准化习题中，填空是指：将正确答案直接填在空白处；单项选择是指：在四项备选答案中，只有一项是正确的，要求把正确答案前面的字母填在括号内.

质量是教材的生命，质量不过硬，教材就站不住脚. 本书是一部很有特色的教材，在单纯形解法的讲解上尤为突出.减少以至消灭差错是衡量教材质量的一项重要标准，也是对读者负责的重要体现，书稿经过再三校对、验算，尽可能杜绝任何形式的差错.

如果读者学习本书后能有所收获，并对学习线性代数与线性规划产生兴趣，作者将感到很欣慰.恳切希望广大读者提出宝贵意见.

周誓达

1997 年 7 月

目　　录

第一章 行 列 式

§1.1 行列式的概念

考虑由两个线性方程式构成的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

其中 x_1,x_2 为未知量,$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为未知量的系数,b_1,b_2 为常数项.用消元法解此线性方程组:第一个方程式乘以 a_{22},第二个方程式乘以 a_{12},然后相减;第二个方程式乘以 a_{11},第一个方程式乘以 a_{21},然后相减.得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,此线性方程组仅有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了进一步揭示求解公式的规律,引进二阶行列式的概念.

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称它为二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$称为元素，这4个元素排成一个方阵，横排称为行，竖排称为列，二阶行列式共有两行两列. 每个元素有两个脚标，第一脚标指明这个元素所在行的行数，称为行标；第二脚标指明这个元素所在列的列数，称为列标. 在二阶行列式中，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线.

二阶行列式的计算，可以用画线的方法记忆，即二阶行列式等于主对角线(实线)上两个元素的乘积减去次对角线(虚线)上两个元素的乘积，如图 1-1.

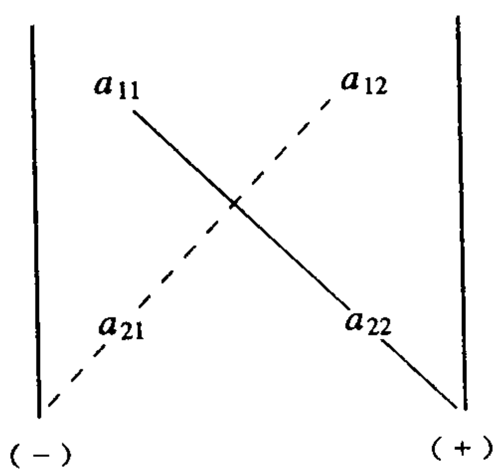

图 1-1

例 1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

例 2 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

例 3 已知 $D = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}$，问 k 为何值时，使得 $D = 0$.

解：计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4$$

令 $D = 0$，得到 $k = -2$ 与 $k = 2$.

所以 $k=-2$ 或 $k=2$ 时,使得 $D=0$.

类似的,为了解由三个线性方程式构成的三元线性方程组,引进三阶行列式的概念.

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$,称它为三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式共有 9 个元素,它们排成三行三列,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线.三阶行列式的计算,也可以用画线的方法记忆,如图 1-2.

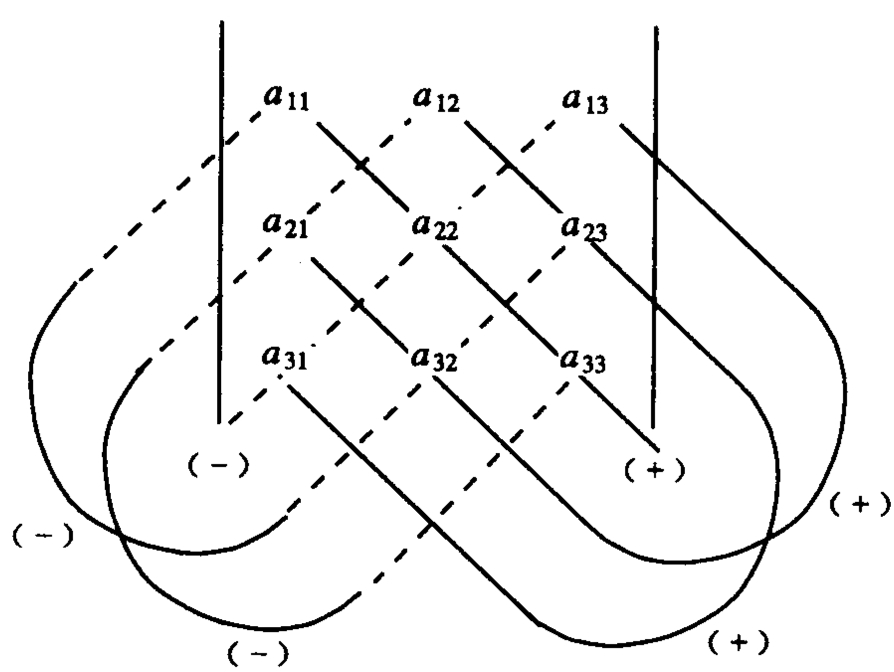

图 1-2

例 4 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \times 3 \times 5 + (-1) \times (-3) \times (-4) \\
&\quad + (-2) \times 2 \times 4 - (-2) \times 3 \times (-4) \\
&\quad - (-1) \times 2 \times 5 - 1 \times (-3) \times 4 \\
&= 15 + (-12) + (-16) - 24 - (-10) - (-12) \\
&= -15
\end{aligned}
$$

例 5 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}
\end{aligned}
$$

例 6　已知 $D = \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$，求 a 值.

解：计算三阶行列式

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \\
&= a^2 + 0 + (-4a) - 0 - (-3) - 0 \\
&= a^2 - 4a + 3
\end{aligned}
$$

由于 $D = 0$，所以 $a = 1$ 或 $a = 3$.

为了讨论 n 阶行列式，下面给出排列逆序数的概念. 考虑由前 n 个自然数组成的数字不重复的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中，若有较大的数排在较小的数的前面，则称它们构成一个逆序，并称逆序的总数为排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数，记作

$$N(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

容易知道，由 1,2 这两个数字组成排列的逆序数为

$$N(1\ 2)=0$$

$$N(2\ 1)=1$$

由 1,2,3 这三个数字组成排列的逆序数为

$$N(1\ 2\ 3)=0$$

$$N(2\ 3\ 1)=2$$

$$N(3\ 1\ 2)=2$$

$$N(3\ 2\ 1)=3$$

$$N(2\ 1\ 3)=1$$

$$N(1\ 3\ 2)=1$$

考察二阶行列式，它是 $2!=2$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 2 个元素乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 1 项，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，这时，若相应列标排列逆序数为零，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

再考察三阶行列式，它是 $3!=6$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 3 个元素乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 3 项，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列. 这时，若相应列标排列逆序数为零或偶数，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

根据上面考察得到的规律，给出 n 阶行列式的概念.

定义 1.1　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式，它是 $n!$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 n 个元素乘积，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，这时，若相应列标排列逆序数为零或偶数，则这项前面取正号；若相应列标

排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

n 阶行列式共有 n^2 个元素，它们排成 n 行 n 列，从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 容易知道：同一行的元素不可能乘在一起，同一列的元素也不可能乘在一起. 可以证明：在 n 阶行列式中，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 $\frac{n!}{2}$ 项.

行列式经常用大写字母 D 等表示，或记作 $|a_{ij}|$. 特别规定一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

例 7　乘积 $a_{34}a_{21}a_{42}a_{23}$ 是否为四阶行列式 D 中的项？

解：在乘积 $a_{34}a_{21}a_{42}a_{23}$ 中，元素 a_{21} 与 a_{23} 的行标同为 2，说明这两个元素皆来自第 2 行，因而乘积 $a_{34}a_{21}a_{42}a_{23}$ 不是四阶行列式 D 中的项.

例 8　在四阶行列式 D 中，项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取什么符号？

解：适当交换所给项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，得到

$$a_{31}a_{24}a_{43}a_{12} = a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$

这时，相应列标排列逆序数

$$N(2\ 4\ 1\ 3) = 3$$

是奇数，所以项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取负号.

例 9　确定元素列标 l,m 的值，使得乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 为五阶行列式 D 中前面取正号的项.

解：在乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 中，元素的行标各不相同，说明它们来自不同行，元素的列标分别为 $1,2,m,l,3$，欲使它们也来自不同列，必须 $l = 4, m = 5$ 或 $l = 5, m = 4$，这时，乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 才是五阶行列式 D 中的项.

当 $l = 4, m = 5$ 时，得到

$$a_{31}a_{22}a_{55}a_{14}a_{43} = a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}$$

这时,相应列标排列逆序数

$$N(4\ 2\ 1\ 3\ 5)=4$$

是偶数,所以项 $a_{31}a_{22}a_{55}a_{14}a_{43}$ 前面应取正号;

当 $l=5, m=4$ 时,得到

$$a_{31}a_{22}a_{54}a_{15}a_{43}=a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54}$$

这时,相应列标排列逆序数

$$N(5\ 2\ 1\ 3\ 4)=5$$

是奇数,所以项 $a_{31}a_{22}a_{54}a_{15}a_{43}$ 前面应取负号.

于是,当元素列标 $l=4, m=5$ 时,乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 为五阶行列式 D 中前面取正号的项.

定义 1.2　已知行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若将行列依次互换(第 1 行变成第 1 列,第 2 行变成第 2 列,…,第 n 行变成第 n 列),得到新的行列式,则称这个新的行列式为行列式 D 的转置行列式,记作

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D 与它的转置行列式 D^T 之间有什么关系呢?考察三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$
\begin{aligned}
&- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
D^T = &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
= &\ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
&- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}
$$

容易看出：$D^T = D$，可以证明这个结论对于 n 阶行列式也是成立的.

定理 1.1 转置行列式 D^T 的值与行列式 D 的值相等，即

$$D^T = D$$

定理 1.1 说明：在行列式中，行与列的地位是对等的. 即：凡有关行的性质，对于列必然成立；凡有关列的性质，对于行也必然成立.

最后讨论一类最基本也是最重要的行列式 —— 三角形行列式.

定义 1.3 若行列式 D 主对角线以上或以下的元素全为零，则称行列式 D 为三角形行列式.

考虑三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它当然等于 $n!$ 项代数和，其中含有零因子的项一定等于零，可以不必考虑，所以只需考虑可以不为零的项. 在这样的项中，必然有一个因子来自第 1 行，只能是元素 a_{11}；必然有一个因子来自第 2 行，有元素 a_{21}, a_{22} 可供选择，但元素 a_{21} 与元素 a_{11} 同在第 1 列，不能乘在一起，从而只能是元素 a_{22}；…；必然有一个因子来自第 n 行，有元素 $a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}$ 可供选择，但元素 a_{n1} 与元素 a_{11} 同在第 1

列，不能乘在一起，元素 a_{n2} 与元素 a_{22} 同在第 2 列，不能乘在一起，…，从而只能是元素 a_{nn}. 这说明可以不为零的项只有一项，它是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，由于列标排列逆序数

$$N(1\ 2\ \cdots\ n) = 0$$

所以项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 前面应取正号. 那么，三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，另一种三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

总之，三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

若行列式 D 主对角线以外的元素全为零，则称行列式 D 为对角形行列式，它是三角形行列式的特殊情况，它的值当然等于主对角线上元素的乘积，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 10　n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!$$

例 11　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=\underbrace{x\,x\cdots x}_{n\text{个}}=x^n$$

§1.2　行列式的性质

尽管在行列式定义中给出了计算行列式的具体方法，但工作量是很大的，因此有必要寻找计算行列式的其他方法.

根据 §1.1 的讨论可知，三角形行列式的计算非常简单，能够立即得到结果. 于是，计算行列式的思路之一就是将所计算的行列式通过恒等变形化为三角形行列式，其依据就是行列式的性质.

考虑三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

若将第 1 行与第 2 行交换，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad -a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= -D \end{aligned}$$

若将第 1 行乘以数 k，得到行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{12}a_{21}a_{33} - ka_{11}a_{23}a_{32}$$
$$= kD$$

若将第 1 行的 k 倍加到第 2 行上去，得到行列式

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}+ka_{12})a_{33} + a_{12}(a_{23}+ka_{13})a_{31}$$
$$+ a_{13}(a_{21}+ka_{11})a_{32} - a_{13}(a_{22}+ka_{12})a_{31}$$
$$- a_{12}(a_{21}+ka_{11})a_{33} - a_{11}(a_{23}+ka_{13})a_{32}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$= D$$

从上面观察得到的结论，可以证明对于 n 阶行列式在一般情况下也是成立的，于是得到行列式的以下性质：

性质 1　交换行列式的任意两行(列)，行列式变号；

性质 2　行列式的任意一行(列)的公因子可以提到行列式外面；

性质 3　行列式的任意一行(列)的 k 倍加到另外一行(列)上去，行列式的值不变.

读者自然会提出这样的问题：在什么情况下，行列式的值一定等于零. 作为行列式性质的推论回答了这个问题.

推论　行列式的值一定等于零的情况：

(1) 有一行(列)的元素全为零；

(2) 有两行(列)的对应元素相同；