高等财经院校试用教材

经济应用数学

基础（下册）

主　编　刘雨泽
副主编　袁世栋　齐　毅

中国商业出版社

（京）新登字073号

责任编辑：于清良

封面设计：杨振宇

责任校对：袁世栋　齐　毅

高等财经院校试用教材
经济应用数学基础（下）
刘雨泽　主编
*
中国商业出版社出版发行
（北京广安门内报国寺1号）
邮政编码：100053
新华书店总店科技发行所经销
吉林商业高等专科学校印刷厂印刷
*
850×1168毫米　32开　12.75印张　297千字
1993年10月第1版　1993年10月第1次印刷
印数1—3500册
ISBN 7—5044—1968—O／G·155

定价：9.80元

397

前　　言

《经济应用数学基础》是根据国家教委和商业部教育司颁发的经济类专科学校教学大纲和教学计划编写的数学试用教材。它可供经济类专科学校数学课程的教学之用，也可为经济类各专业的大专函授、夜大学及职业大专院校用作教材或教学参考书。

本书分上、下两册。上册编入了微积分和概率论与数理统计的基本内容。下册编入了线性代数、线性规划等基本内容。

本书由刘雨泽副教授任主编，袁世栋、齐毅任副主编，参加编写的还有白岩、官忠莲、张天纪、张福生、国春光、赵景悦、姜兴武。

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者不吝赐教。

编者

1993 年 5 月

目　录

线性代数

线性规划

线性代数

第一章　行列式

在生产经营管理活动中，在商品的流通和交换过程中，以及人们日常的活动中所碰到的问题，有许多可以直接或近似地表示成一些变量的线性关系。因此，研究变量间的线性关系是一个非常重要的问题。行列式是研究它们的一种重要的工具。本章从解二阶、三阶行列式出发，进而讨论 n 阶行列式以及如何用 n 阶行列式解 n 元线性方程组。

§1.1　行列式定义

为了定义 n 阶行列式，我们首先讨论排列、逆序等有关知识。

(一) n 级排列及其逆序数

定义 1.1　由自然数 1,2,3,……,n 组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列。

例如，231，312，123 都是 3 级排列。

三级排列的总数为 $3!=3\times2\times1=6$，即 123，132，213，231，312，321

n 阶排列的总数为 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1$

定义 1.2　在一个排列中，如果有较大的数排在较小数的前边，则称这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总和，称为这个排列的逆序数，记作

$$N(i_1, i_2 \cdots i_n)\text{，或简记为 } N$$

例如：

排列	逆　序	逆序数
213	21	N(213)＝1
4231	42,43,41,21,31	N(4231)＝5
34251	32,31,42,41,21,51	N(34251)＝6

定义 1.3　逆序数为奇数的排列称为奇排列。逆序数为偶数的排列称为偶排列。

例如，排列 213，4231 为奇排列。

排列 34251 为偶排列。

排列 1 2 3…n 叫标准排列，其逆序数为零。我们规定标准排列为偶排列。

在一切 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半。以一切 3 级排列为例：

N(123)＝0　　N(132)＝1　　N(213)＝1

N(231)＝2　　N(312)＝2　　N(321)＝3

偶排列有 3 个，奇排列也有 3 个。

（二）n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，先找出二、三阶行列式的规律。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

规律:1. 二阶行列式的展开式有 2! =2 项,三阶行列式有 3! =3×2×1=6 项。

2. 二阶、三阶行列式的每一项分别由位于不同行,不同列的二个、三个元素组成。

3. 二、三阶行列式的正号项与负号项各占一半,各项中元素的行标按标准排列,列标是任意排列。当列标的排列是奇排列时,该项取负号,列标是偶排列时,该项取正号。

据以上分析,三阶行列可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的三级排列求和。

定义 1.4　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为行,纵排称为列。它表示所有取自不同行,不同列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列,则该项取正号,如果是奇排列则取负号。因此,n 阶行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.2}$$

其中,$j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时,则得到 n 阶行列式表示的所有项。

规定 n 阶行列式(1.1)的值等于

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

一阶行列式 $|a|$ 就是 a。

行列式简记为 $|a_{ij}|$。

例如，由 n 阶行列的定义知四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

共有 4! = 24 项。$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 列标排列是 4312 所以它是其中一项。由于 N(4312) = 5，该项应取负号。

$a_{11}a_{23}a_{31}a_{44}$ 列标的排列是 1314，由于它有两个元素同时取自第一列，故不是 D 的一项。

例 1. 用定义计算下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值。

解：D 的展开式一般项的形式为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

共有 n! 项，其中有很多项为零。我们只要求出其中不为零的项。

由于 a_{1j_1} 取自第一行，而第一行中只有 a_{11} 不为零，因此 $a_{1j_1} = a_{11}$。a_{2j_2} 取自第二行，第二行中有两个元素不为零 a_{21}、a_{22}，但第一行已取了第一列的元素 a_{11}，因而不能再取 a_{21}，于是 $a_{2j_2} = a_{22}$。依次类推，可知 D 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为零。

由于 N(123⋯n) = 0 故，该项前面取正号。因此，可得 $D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特殊情况，对角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上、下三角形行列式统称为三角形行列式。行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线。

从而得出重要结论：

三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线上各元素的乘积。

此结论为行列式的计算提供了一个途径。但需注意：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{N(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2n}\cdots a_{nn}$$

定理 1.1. n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.3}$$

其中 $i_1i_2\cdots j_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列(证明略)。

例 2. 乘积 $a_{13}a_{45}a_{22}a_{51}a_{34}$是否是五阶行列式中的一项？如果是，该项应取什么符号？

解：因为这五个元素的行标和列标分别组成 5 级排列 14253 和 35214；所以它们的乘积是 5 阶行列式中的一项。

$$N(14253)+N(35214)=3+6=9$$

故该项前面取负号。

§1.2 行列式的性质

按 n 阶行列式的定义计算行列式，当 n 较大时是很麻烦的，如果能化成下(或上)三角形行列式计算则省力，这就需要研究行列式的性质(所给性质不做严格证明)。

定义 1.5 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^T 或 D'。即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1. 将行列式转置，行列式不变，即 $D=D^T$。

例如：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}=10 \qquad D^T=\begin{vmatrix}2&-4&2\\1&3&3\\2&1&5\end{vmatrix}=10$$

该性质说明，在行列式 D 中，行具有的性质，它的列也具有相同的性质。

性质 2. 交换行列式的两行(列)，行列式变号。

$$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}\text{交换一、二两行得 }D_1=\begin{vmatrix}-4&3&1\\2&1&2\\2&3&5\end{vmatrix}=-D$$

推论：如果行列式中有两行(列)对应元素相同，则此行列式为零。

例如：

$$D=\begin{vmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&3&5\end{vmatrix}=0$$

性质 3. 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用这个数乘此行列式。即，如果设 $D=|a_{ij}|$，则

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ka_{i_1}&ka_{i_2}&\cdots&ka_{i_n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=kD$$

推论 1：行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式外面。

例如：$$\begin{vmatrix}2&3&4\\4&8&8\\-1&0&3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&2\\-1&0&3\end{vmatrix}$$

推论 2：行列式中有两行(列)对应元素成比例，则此行列式等于零。

例如：
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

推论 3：如果行列式中有一行(列)元素全为零，则此行列式等于零。

例如：
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

性质 4. 如果行列式的某一行(列)的每一元素都可写成两个数的和，由此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素，其它位置的元素与 D 相同。即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$。

推论：如果行列式某一行(列)的每个元素都可分成 m 个数(m 为大于 2 的整数)的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和。

性质 5. 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 1. 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+0 & 1+0 & 0+1 & 1+0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+1=1$$

计算行列式时,常利用性质把它化为三角形行列式来计算。

说明:行变换写在等号上面,列变换写在等号下面。

例 2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{①②交换}]{} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①\times 2+④} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②\times 2+④]{②\times 2+③} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & 9 \\ 0 & 0 & 12 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{③\times(-\frac{12}{14})+④} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 14 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{7} \end{vmatrix}$$

$$= -\left[1 \times (-1) \times 14 \times \frac{23}{7}\right] = 46$$

例 3. 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

解：

$$D\xlongequal[\text{各列乘1加到第一列}]{}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[]{①\times(-1)+②,③,\cdots,ⓝ}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 4. 证明

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证：

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}\xlongequal[①\times(-1)+②]{}\begin{vmatrix} b_1+c_1 & a_1-b_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & a_2-b_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & a_3-b_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$