21世纪高等医药院校教材

张春华
严云良 主编

医药数理统计

科学出版社

21世纪高等医药院校教材

医药数理统计

张春华　严云良　主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本教材是根据卫生部1982年以来颁布的有关数学教学计划的要求、1998年10月教育部高等教育司举办的“数学教育在大学教育中作用研讨会”的会议精神、以及目前教学改革的新情况，由全国18所中医药院校长期从事数学教学和科研工作的教师编写的数学系列教材（医药高等数学、医药数理统计、医药数学实验和线性代数）之一。全书分10章，内容主要包括数理统计所需的概率论基本知识、统计的几个重要概念及分布、医药学中常用的统计方法及正交试验设计和均匀分布试验设计。重点介绍方法和在医药学中的应用，而不是数学的推导证明。

本书可供医药院校各专业各层次的学生使用，也可作为医药工作者做统计处理的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

医药数理统计/张春华，严云良主编 .-北京：科学出版社，2001.6

21世纪高等医药院校教材

ISBN 7-03-009227-9

Ⅰ.医… Ⅱ.①张… ②严… Ⅲ.数理统计-应用-医药学-医学院校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第07044号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年6月第 一 版 开本：850×1168 1/16

2001年6月第一次印刷 印张：18

印数：1—12 000 字数：363 000

定 价：22.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

《医药数理统计》编写人员

主　编：张春华　严云良

副主编：王建生　别雪君　马志庆　于鹤丹　何　雁
封　峰　李秀昌　刘明芝

主　审：周永治

编　委：（按姓氏笔画为序）

马光菊　王世钦　王淑媛　邓　超　闫雪隐
李和伟　汪旭升　苏　越　陈　勇　范　颖
周介南　周　喆　金善玉　赵文峰　高敏艳
钱微微　崔红新　崔相学　黄　浩

编写说明

数理统计方法是研究随机现象统计规律的一门学科，它所建立的方法广泛应用于自然科学，社会科学和工农业生产，特别在医药学中它已成为一种不可缺少的工具，从而使医药数理统计成为中医药专业的一门重要基础课。

本教材是根据卫生部1982年以来颁布的有关数学教学计划的要求、1998年10月教高司举办的"数学教育在大学教育中作用研讨会"的会议精神以及目前教学改革的新情况，由全国18所中医院校长期从事数学教学和科研的教师编写的数学系列教材(医药高等数学、医药数理统计、医药数学实验和线性代数)之一。

全书共分10章，内容主要包括数理统计所需的概率论基本知识、统计的几个重要概念及分布、医药学中常用的统计方法及正交试验设计和均匀分布试验设计。重点介绍方法和在医药学中的应用，而不是数学的推导证明。

本书可作为高等医药院校的"医药数理统计"教材，也可作为医药人员自学统计方法的用书，对缺乏微积分知识的读者，可略去有关数学证明而直接使用结论，并可通过示范性的例子掌握方法的应用。

本教材约需60学时，如删去(*)号的内容及概率论知识，40～50学时也能讲授。书后配有习题答案，供教师和读者参考选用。

参加本教材编写的有：黑龙江中医药大学、长春中医学院、辽宁中医学院、甘肃中医学院、天津中医学院、北京中医药大学、河南中医学院、山东中医药大学、上海中医药大学、南京中医药大学、浙江中医学院、江西中医学院、福建中医学院、湖北中医学院、湖南中医学院、成都中医药大学、广西中医学院、贵阳中医学院。

由于我们水平有限，书中定有不少不当与错误之处，恳请读者与同行批评指正。

编　者

2001年

目　录

第三章　随机抽样和抽样分布

第四章　连续型随机变量的参数估计与检验

第五章　方差分析

第六章 离散型变量的参数估计与检验

*第七章 非参数检验

第八章 相关与回归

第九章 正交试验设计

第十章 均匀试验设计

第一章

事件与概率

数理统计方法是以概率论为理论基础,通过一定的设计来收集数据和进行整理分析,以部分资料推断总体的一种方法论.用它去研究大量随机现象的规律性,由于概率和随机事件是联系在一起的,因此事件和概率都是数理统计中最基本的概念.

本章将介绍随机事件,事件的概率及其运算.

§1-1 随机事件及其运算

1-1.1 随机事件

当我们多次观察自然现象和社会现象后,会发现许多事情在一定条件下必然会发生或者必然不会发生,例如,纯净的水,在一个大气压下,温度是 0℃ 时必然结冰,在 20℃ 时必然不会结冰,在 100℃ 时必然沸腾,在 80℃ 时必然不会沸腾;再比如,附子里必然含有乌头碱,黄连里必然提不出青霉素.这种完全可以预言其结果的现象,是一种确定性现象,叫**必然现象**.

另一类现象,在一定条件下都不可能事前完全准确地预言其结果,也就是它有多种可能发生的结果,是一种不确定性现象,这类现象称为**偶然现象**,例如,抛起一枚硬币究竟哪一面落地时朝上?从一批针剂中抽取一支来检验,其结果可能是正品,也可能是次品,在抽取之前是无法肯定的.偶然现象也称为**随机现象**.

对各种现象的“观察”称为试验,对随机现象的“观察”就称为**随机试验**.随机试验具有下列特征:

(1) 在相同条件下,可以重复进行;

(2) 各次试验结果不一定相同,而且每次试验之前不能预先判断哪一个结果发生;

(3) 所有可能的试验结果是预先可以明确的，并且在每一次试验中必有其中一个结果出现.

对某种现象的“观察”试验而得到的结果就称为**事件**.在一定条件下，试验结果中必然出现的事件，称为**必然事件**，记为 Ω.例如，{纯净的水，在一个大气压下，加热到 100℃ 沸腾} = Ω，{附子含有乌头碱} = Ω.反之，那种在一定条件下，试验结果中必然不出现的事件，称为**不可能事件**，记为 Φ.例如，{$x^2+1=0$ 有实数解} = Φ；{黄连内提出青霉素} = Φ 等.

随机试验观察的是随机现象，在一定条件下，试验结果中可能出现，也可能不出现的事件，称为**随机事件**，简称**事件**.随机事件一般用大写字母 A、B、C 等表示.例如，投掷一个硬币，这个随机试验中有两个事件 A = {出正面} 和 B = {出反面}.必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了研究方便起见，把必然事件与不可能事件作为随机事件的两个极端来统一处理.

1-1.2 事件之间的关系及运算

在各种现象中，往往要求我们同时考察几个在同样条件下的事件及它们之间的联系，下面我们就来讨论事件的关系及运算：

一、包含

设有事件 A 及 B，如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B 或事件 B 包含事件 A.并记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

二、等价

若事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，即 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，就称事件 A 与 B 等价(或称相等)，记作 $A = B$.

三、并事件

若事件 C = {A 或 B 中至少有一个发生}，则称 C 为 A、B 两事件的并事件，记为 $C = A + B$.n 个事件的并事件记为 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

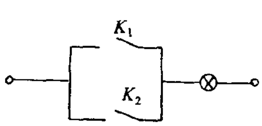

图 1-1

如把两个开关 K_1 和 K_2 并联后接入电路(图 1-1)，设 A = {电路接通}，A_1 = {K_1 闭合}，A_2 = {K_2 闭合}，那么 $A = A_1 + A_2$.

四、交事件

若事件 C = {A 与 B 同时发生}，则称 C 为 A、B 两事件的交事件，记为 $C = AB$.n 个事件的交事件记为 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

如把两个开关 K_1 和 K_2 串联后接入电路(图 1-2),那么 $A = A_1A_2$.

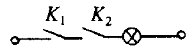

图 1-2

五、互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,则称 A 与 B 为**互不相容事件**,记作 $AB = \Phi$. 互不相容事件也称为**互斥事件**. n 个事件互斥,是指它们两两互斥.

若 n 个互斥事件的并事件是必然事件,即 $A_iA_j = \Phi(1 \leqslant i < j \leqslant n)$,且 $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,则称这 n 个事件构成**互斥完备群**.

例如,治疗某种疾病,其疗效标准分为四个等级:痊愈、显效、微效和无效. 那么,就一次试验(治疗一个患者的结果)而言,事件{痊愈}、{显效}、{微效}、{无效}是互斥事件,而且这四个事件构成互斥完备群.

六、对立事件

若在任一次试验中,事件 A 与事件 B 二者必有一个发生,且仅有一个发生,亦即 A、B 同时满足 $A + B = \Omega$ 及 $AB = \Phi$ 两个条件,也就是互斥完备群仅由两事件 A 与 B 构成,则称**事件 A 与事件 B 对立,或事件 B 是事件 A 的对立事件**,当然**事件 A 也是事件 B 的对立事件**. A 的对立事件记作 $\overline{A}$,那么就有 $\overline{A} = B$,或 $A = \overline{B}$.

如果治疗某种疾病,只考虑有效和无效两个等级,那么事件{有效}与{无效}就是对立事件.

不难理解,对立事件必为互斥事件,而互斥事件不一定对立.

例如,投掷一枚骰子,事件{出 1 点}与{出 2 点}互斥,但不对立. 而事件{出偶数点}与{出奇数点}对立且互斥.

对任一事件 A,都有 $A\overline{A} = \Phi$, $A + \overline{A} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.

事件之间的这些关系,读者可以通过熟知的韦恩图作直观理解,图 1-3 给出几

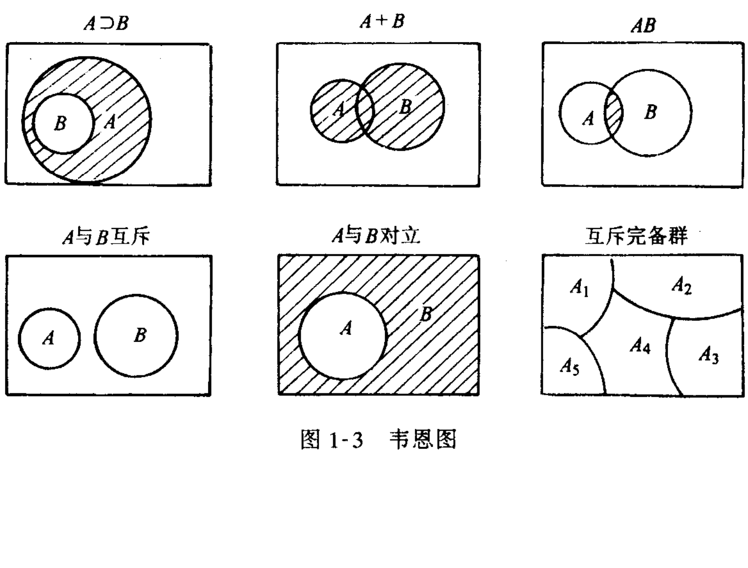

图 1-3　韦恩图

种常见情况.

对于事件的运算方法我们不但要学会用概率论的语言来解释这些关系及运算,并且应当逐步熟悉在不甚复杂的情况下,把一个事件化成其他事件的并、交或混合形式以及找出构成互斥完备群的全部事件,因为这是讨论事件间关系进而施行运算的重要途径.

例　大黄、黄连、黄芩是组成泻心汤的主要成分,依次检查它们的质量算一次试验,令 $A=\{$大黄质量合格$\}$, $B=\{$黄连质量合格$\}$, $C=\{$黄芩质量合格$\}$. 试用三个事件表示下列在一次试验中出现的事件:

(1) 只有大黄质量合格;

(2) 只有一种成分质量合格;

(3) 每一种成分质量都不合格;

(4) 至少有一种成分质量合格;

(5) 构成互斥完备群的全部事件.

解　设 $\bar{A}=\{$大黄质量不合格$\}$, $\bar{B}=\{$黄连质量不合格$\}$, $\bar{C}=\{$黄芩质量不合格$\}$.

(1) $\{$只有大黄质量合格$\}=\{$大黄质量合格且黄连、黄芩质量不合格$\}=A\bar{B}\bar{C}$.

(2) 因为 $\{$只有大黄质量合格$\}=A\bar{B}\bar{C}$;

$\{$只有黄连质量合格$\}=\bar{A}B\bar{C}$;

$\{$只有黄芩质量合格$\}=\bar{A}\bar{B}C$;

所以, $\{$只有一种成分合格$\}=A\,\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$.

(3) $\{$每种成分质量都不合格$\}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(4) $\{$至少有一种成分质量合格$\}=A+B+C$,

或者 $\{$至少有一种成分质量合格$\}=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$.

(5) 构成互斥完备群的全部事件有八个,即 $\Omega=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$.

注意,把一个事件化成若干个事件的并事件时,必须明白是有交并(不互斥),还是无交并(互斥),这对后面的计算尤为重要.如本例的问题(2)表示成三个事件的无交并;问题(4)可表示成三个事件的有交并,或者七个事件的无交并;问题(5)构成互斥完备群的八个事件当然是无交并.

§1-2　事件的概率

通俗的说,所谓概率是某一随机事件在试验中发生的可能性大小的数值表示,通常用 $P(A)$ 来表示事件 A 的概率. $P(A)$ 越大,说明事件 A 发生的可能性越大.下面给出概率论中概率的两个定义,从中可以了解概率的特性和计算方法.

1-2.1 频率与概率(统计定义)

人们在长期的实践中认识到:随机事件发生的可能性大小可以在大量重复试验中显示出来.

若进行条件相同的 n 次试验,事件 A 出现 m 次,则称 m 为事件 A 的**频数**,称比值 m/n 为事件 A 的**频率**,记为

$$f(A) = \frac{m}{n} \tag{1-1}$$

显然,事件的频率是通过特定的试验获得的,每作 n 次试验,所得到的频率可以各不相同.但经验证明,在同一条件下进行多次重复试验时,事件出现的频率会在某一常数附近左右摆动,这种性质,叫做**频率的稳定性**.

在历史上,这种频率的稳定性是在人口统计方面最先注意到的.如世界上一些国家通过多年观察,发现男婴的出生率稳定在 22/43 附近,而女婴的出生率稳定在 21/43 附近.

再如著名的投币试验,表 1-1 列出试验记录,容易看出,投掷次数逐渐增多时,{出现正面}这个事件的频率 $\frac{m}{n}$ 总是在 0.5 这个数附近摆动而逐渐稳定于 0.5.所以 0.5 这个数能反映事件{出现正面}发生的可能性的大小.

表 1-1

试验者	投掷次数 n	正面次数 m	频率 m/n
德莫根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由此可见,频率的稳定性充分说明随机事件发生的可能性大小是事件本身固有的一种客观属性,并为我们衡量一个随机试验中随机事件发生的可能性提供了客观的基础.

概率的统计定义　在条件相同的 n 次试验中事件 A 发生 m 次,如果加大 n 时,A 的频率 m/n 逐渐稳定在一个常数附近,就把这个常数称为事件 A 的概率.在此定义下有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(\Phi) = 0 \tag{1-2}$$

概率的统计定义实际上给出了一个近似的计算随机事件的概率的方法,即当试验次数 n 足够大时,一个事件的频率与概率应充分接近,所以用事件的频率作为概率的近似值.在医药学中,这种估计经常用到.需要注意的是不要把频率和概率相混淆.频率是我们已经进行的试验的结果,其数值随着试验次数的不同而变

化,具有偶然性,而概率是一种客观存在,是个确定的数值,具有必然性.

例 1 在某地区40 岁以上的男子中进行心血管疾病的调查,结果在 4000 名男子中发现患高血压的有 132 人,求该地 40 岁以上男子患高血压病的概率.

解 由于 $n=4000$,这个数字比较大,故可以用频率作为患病(记为 A)的概率,于是得:

$$P(A)\approx\frac{132}{4000}=3.30\%$$

1-2.2 古典概率

如果构成互斥完备群的各个事件具有等可能性,则这些事件称为**基本事件**.所以今后凡说基本事件,就当然地具有等可能性而且它们的全部构成互斥完备群.

我们再次研究投掷一枚硬币出现正面的概率.由于掷币实验全部可能的结果,即总的基本事件只有两个:{正面}和{反面},而且硬币的物理和几何对称性导致出现正面和反面具有等可能性.因此不必按统计定义去作大量试验,掷币一次就可以直接判断出现正面的概率是 1/2.

长期的经验使人们注意到有一类特殊的随机现象:每次试验,基本事件只有有限个,而且各基本事件出现的可能性相等,我们称它为等可能概型.经过归纳(从个别到一般),在概率论的早期就提出了关于概率的第二个定义:

概率的古典定义 如果互斥完备群由有限的 n 个基本事件构成,而事件 A 包含 m 个基本事件,那么事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-3}$$

且有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1,\quad P(\Omega)=1,\quad P(\Phi)=0$

一般把古典定义下关于事件概率的数学模型称为古典概型.古典概型的大部分问题都能形象化地归结为抽球问题.

例 2 瓶中装有 50 片药,其中有 3 片次品,求

(1) 一次取一片,取得次品的概率;

(2) 一次取 5 片,5 片中有 2 片是次品的概率.

解 (1) 50 片药中取一片,其可能结果有 50 个基本事件(每片药被取到的可能性相等),即 $n=50$.

设 $A=\{$取到次品$\}$,则 A 包含 3 个基本事件,即 $m=3$,由古典定义得

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{50}=0.06$$

(2) 50 片药中任取 5 片,其可能结果有 C_{50}^5个基本事件(C_{50}^5种机会均等的取法),即 $n=C_{50}^5$.

设 $B=\{$5 片中有 2 片次品$\}$,则事件 B 包含的基本事件数 $m=C_3^2C_{47}^3$,故所

求概率

$$P(B)=\frac{C_3^2C_{47}^3}{C_{50}^5}=\frac{9}{392}=0.023$$

例 3　袋中有 2 个白球和 8 个黑球，现在无放回地一个个抽出来，求第 k 次抽到的是白球的概率($1\leqslant k\leqslant 10$).

解法一　把 10 个球当作是有区别的，即设想把它们按 1, 2, …, 10 进行编号，若将抽出的球依次排成一排，则全部可能的结果相当于把 10 个元素进行全排列，即全部基本事件数为 10!.

第 k 次抽到白球，即排在第 k 号位置上的那一个白球，只能在 2 个白球中取得，故有 2 种抽法. 而另外 9 次抽的球，可在余下的 9 个中任取，故有 9！种抽法. 所以事件{第 k 次抽到白球}包含的基本事件数为 $2\times 9!$，故第 k 次抽到白球的概率 $p=\frac{2\times 9!}{10!}=\frac{2}{10}$.

解法二　把 2 个白球看成一样，8 个黑球看成一样，把抽出的球仍依次放在 10 个位置上，由于白球看成一样，黑球看成一样，所以当白球位置选好，其他位置必放黑球，故总的排法即总的基本事件数为 C_{10}^2，而事件{第 k 次抽到白球}所包含的基本事件数为 $C_{10-1}^{2-1}=C_9^1$(因为 2 个位置中已有 1 个位置即第 k 号位置固定放了白球)所以

$$p=\frac{C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{10}.$$

两种解法结果一样，抽到白球的概率 $p=2/10$，与次数无关，这正好说明广泛应用于生产和生活中的抽签方法是公平合理的，先抽后抽都一样，机会均等.

需要说明的是，无论是概率的统计定义，还是古典定义，都在概率计算中起一定的作用，但又有着各自的局限性. 古典概率是以试验的所有可能结果只有有限个且具有等可能性为基础，实际上这种条件很难满足，至于统计概率，则要求试验次数 n 充分大，并以事件频率的稳定值近似地作为该事件的概率，这里的 n 大到什么程度，稳定值是什么都是不确切的，因此，人们需要对概率有个严格的定义，使之能适用于一般的随机试验. 经过人们的不断地探索和总结，终于在 1933 年，由前苏联数学家柯尔莫戈洛夫提出了概率公理化结构，明确定义了基本概念，使概率论成为严谨的数学分支. 关于公理化体系的内容，有兴趣的读者可参阅概率论专著，此处不再赘述.

§1-3　概率的运算

把复杂事件的概率分解成简单事件的概率来计算，可以借助于概率的运算法则.