

# 国外射流技术

第五辑

(射流线路分析专辑)

上海科学技术情报研究所

# 毛主席语录

备战、备荒、为人民。

抓革命，促生产，促工作，促战备。

自力更生，艰苦奋斗，破除迷信，解放思想。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

# 国外射流技术

## 第五辑

(射流线路分析专辑)

《国外射流技术》编译组编

### 目 录

1. 流体线路理论 ..... ( 1 )
2. 气动传输管路的线性特性 ..... ( 27 )
3. 流体管路的瞬态响应 ..... ( 40 )
4. 射流传输管路理论的实验评价 ..... ( 52 )
5. 具有矩形截面的射流传输管路的理论研究 ..... ( 67 )
6. 在射流交流网络中的传输管路与非线性部件 ..... ( 78 )
7. 在元件和线路中使用的图解法 ..... ( 98 )
8. 讨论在射流系统分析中采用的单位制 ..... (107)

(本辑译文由复旦大学数学系射流实验室供稿)

### 告 读 者

《国外射流技术》已出版了五本，以《射流线路分析专辑》作为最后一本。本不定期刊物自 1970 年出版以来，受到广大读者的大力支持，提出许多宝贵意见，在此特表谢意！

《国外射流技术》编译组

1974 年 5 月



# 流体线路理论

J. M. Kirshner 等

本文讨论在流体管路中波的传播、分叉管的影响以及匹配的方法。  
为了能够用电子线路相似的方法来分析射流线路,必须建立对于各个不同电量的比拟。

## 一、电流比拟

质量流量与体积流量两者都曾被不同的作者用于描述流体线路。虽然对于不可压的均匀流体来说,这区别是不重要的,而且对于密度的扰动与密度比起来是很小的情况,这差别也没什么重大意义。但流量的适当单位是质量流量,因为这个量服从连续性方程,而使用一个非守恒的量作为流量来发展线路理论看来是困难的。无疑,在分叉管中流进的流量应当等于流出的流量。

## 二、电压比拟

在绝大多数文章中,静压以电压比拟。有许多理由认为这是不妥当的,最明显的一个就是压力乘质量流量并不具有功率的单位。

为了决定电压的比拟,考虑管道流动的能量方程看来是合理的,因为能量方程关系到能量流的速率,这实际上是一个功率方程。

对于流经一段导管的流动,其能量方程为

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_A \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA = \int_V \rho \vec{f} \cdot \nabla dV + \int_V \Phi dV$$

其中  $V$ ——体积(如图1所示),  $A$ ——体积的周界表面,  $u$ ——单位质量的内能,  $\vec{v}$ ——速度矢量,  $\rho$ ——密度,  $\vec{q}$ ——通过管壁单位面积的热流,  $\vec{n}$ ——与表面垂直的单位矢量,  $\vec{f}$ ——在单位体积中单位质量的体积力,  $\Phi$ ——粘性损耗, 对于柱面对称时表示为

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2$$

此处  $v_r$  与  $v_z$  分别为沿  $r$  与  $z$  方向的速度分量,  $r$  是从圆导管对称轴出发的径向距离, 而  $z$  是沿导管轴向上的距离。

为了方便起见,在表示  $\Phi$  时选取为圆形导管,但结论对任意形状的导管都是成立的。

同时,为了方便起见,本文将只限于讨论理想气体,于是体积力项就消失了。

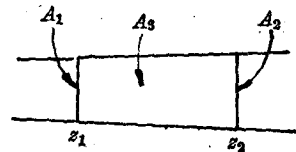


图1 在导管中的控制体积

现在考虑围绕体积的各个面积。在  $z=z_1$  处,  $A_1$  是在图1中左边的面积,假定流体在该

处流进；在  $z=z_2$  处， $A_2$  是流体流出时所通过的面积；又  $A_3$  是导管的表面积，热量由此进入。因此，可写：

$$\int_{A_1} \left( u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{A_2} \left( u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \int_V \Phi dV + \int_{A_3} \vec{q} \cdot \vec{n} dA$$

若  $z_1 - z_2 = \Delta z$  很小，则

$$d \int_{A'} \left( u + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = d \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \alpha dz - d \int_V \Phi dV$$

其中  $\alpha$  是单位时间单位长度中通过管壁的热量，又  $A'$  是在  $z$  处的横截面面积。

$\Phi$  的积分是功转化为内能的一个量，于是必定存在一个  $u'$  使得

$$d \int_{A'} u' \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = d \int_V \Phi dV$$

因此，对于定常状态，就有

$$d \int_{A'} \left( u + u' + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \alpha dz \quad (1)$$

而

$$u + u' + \frac{p}{\rho} = \int T d(S_r + S_i) + \int \frac{dp}{\rho}$$

其中  $dS_r$  与  $dS_i$  各为相应于热量与粘性效应的熵变化。

因此，将式(1)重新写为

$$d \int_{A'} \left( T \int dS_r + T \int dS_i + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \alpha dz$$

但是

$$d \int_{A'} \left( T \int dS_r \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \right) dA$$

是由于热加入而引起的能量改变，因而等于  $\alpha dz$ ，因此

$$d \int_{A'} \left( T \int dS_i + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2)$$

现在假定

$$J \equiv T \int dS_i + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} \quad (3a)$$

与  $r$  无关，同时对定常状态又假定

$$d \int_{A'} J \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = d \left( J \int_{A'} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \right) = d(J\dot{m}) = 0$$

因为对定常状态  $\dot{m}$  是常数，所以  $J$  也是常数，这就得出

$$d \left( \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + T \int dS_i \right) = dJ = 0 \quad (3b)$$

此处必须记住，虽然上述变量的和式( $J$ )被假定与  $r$  无关，但对个别的变量，这并不一定是正确的。

为了量度的方便，将所讨论的量对横截面面积求平均，于是除了利用  $\bar{v}^2$  及  $\bar{v}^2$  之外，基

本上就得到一维流动了。因此,机械功率改变  $dP_m$  (经过距离  $dz$ ) 为

$$dP_m = \dot{m} d \left( \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{\dot{m} f_v}{2} (\bar{v}^2 - \bar{v}^2) dz$$

其中,可置

$$d \left( T \int dS_i \right) = \frac{f_v}{2} (\bar{v}^2 - \bar{v}^2) dz \quad (4)$$

这是基于在内部熵的变化是由速度梯度所引起的,以及相信  $f_v$  应当是比通常所规定的摩擦系数更加接近于常数(不然的话,量度就很困难了)。

经过一个电路中的电阻所消耗的电功率是由

$$dP_e = i de_p$$

给出,其中  $i$  是电流,  $e_p$  是电势。已经选取  $\dot{m}$  表示  $i$  的比拟,现在选取

$$de = d \left( \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \quad (5)$$

作为  $de_p$  的比拟。

从形式上看,显然机械势\*的改变  $de$  依赖于状态改变的途径,于是应当写作  $\bar{de}$  以表示它不是一个全微分。当然,这就意味着借助于热力学变量机械势不存在唯一的表达式。

导管中摩擦的影响致使气体的温度沿下游距离增大而下降。因之,对于非绝缘壁,热量将逐渐流入导管。通常假定在管壁上为等温流(温度恒定)。为了决定状态如何进行内部变化,就必须解流体力学方程,对于一般情况,还留下巨大的工作要做。

然而,若假定压力、密度与速度只有微小变化,则得到相当简单的情形。对于这种情形,  $\int (dp)/\rho$  基本上等于  $(1/\bar{\rho}) dp'$ , 其中  $\bar{\rho}$  为平均密度,而  $p'$  是  $p$  对于其平均值的变化量。除了消除机械势对于不同路径间的区别之外,小扰动假定还将问题线性化。

若考虑以液体代替气体,容易看到其比拟是

$$e = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + G \quad (6)$$

其中  $G$  是由重力产生的势。

## 1. 紊流

除了考虑状态方程之外,理想流体线路理论还应考虑紊流。这一般意味着某种基于利用雷诺数的半经验研究。

## 2. 转弯

在转弯时,速度梯度增加将引起附加损耗,对于恒定截面积的导管,这主要体现为  $v^2$  的增加。

## 3. 非均匀截面、分叉点以及泄流

对于一个非均匀截面,沿一个方向的阻抗一般将与另一方向的阻抗不同,这是因为速度梯度具有不同的值。因此,必须用二极管来表示非均匀的截面,如图 2 所示。

\* 虽然这个量与电势相似,就规定它为机械势,但它包含有动能与势能。

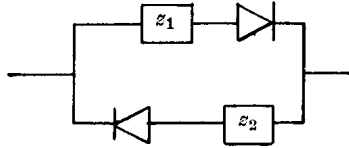


图2 导管非均匀截面的线路框图

机械势既含有压力/密度项，又含有速度项这个事实一般意味着当从不同分叉道来看时，势是变化的。例如，分叉管可以这样地插到主导管上，使得该分叉管通常只看到主导管的静压与密度，而在分叉管中只有很少或根本没有流动。然而，当主导管加载时（即部分或全部盲端），将致使静压随着从分叉管流出量的增加而上升。这个现象就使得为这一目的（泄流）而设置的分叉管在流体装置中成为非常有用。虽然不幸的是这会给分析造成困难。

可以用动量与由流体转弯所引起  $v^2$  的改变来说明这个影响。顺着线路方向，必须将两组二极管及非线性阻抗与每一分叉管联系起来。

### 三、线路与地势

流体线路的任一分叉管中的流量经过环形回路而流回，这是质量流量连续性方程的直接结果。例如，在开型装置中的泄流孔或排气孔同样必须考虑为线路的一部分，这确实相当于电子的级间耦合线路。

因之，各种元件在某些点的流出质量必须等于在另一些点流入的质量。

就整体来看，系统可以封闭在一个特定的环境中（在封闭的箱子中或在空气中）。这环境一般将构成该线路的地。然而，从系统到周围环境的孔口不必定为地势，这是因为假如有流量从孔口流出或流入，则流动的速度头 ( $v^2/2$ ) 使其势离开地势而变化。因之，管子的端点（以及其它的任何孔口）都具有与其相应的阻抗及二极管作用。正如在第八章\*所指出的，扩散的孔口可以减小对地的阻抗。

### 四、流体线路理论的状况

诸如必须利用二极管，必须考虑状态方程与紊流度，阻抗一般是非线性的，以及所包含量的测量比电路更为困难等这些实际情况都严重地阻碍了这个领域的发展。然而流体线路理论的概念及其所有缺点比起企图解决整个系统来说，似乎具有更大的希望。

如前面所指出的，当扰动很小时，许多困难就消失了。对于稳态理论可压缩流体可以当为不可压缩，即当扰动速度的量级与自由声速比较起来很小，基本上在这些相同的条件下，对于动态理论也可以认为扰动是很小的。

此外，若假定平均速度为零，则得到声学方程，此时流体线路与电路之间的比拟变得十分好。

本文将详细讨论小信号比拟。但先要略为离开本题提供一些介绍性的材料。

\* 见《Fluid amplifiers》一书的第八章（非均匀流动）。——译者注

## 五、传输管路方程

### 1. $n$ 极

系统的概念包含分解复杂的装置或线路成为较小的部件，然后决定这些部件的每一输出作为任一输入的函数，最后才作为一个整体来考虑该系统。

每一个部件一般将有  $n$  端，而每一端能够是输入或输出，与每一端相联系的有两个量(图 3)，第一个是势能  $e$ ，第二个是流量或运动的对应形式  $\dot{m}$ 。

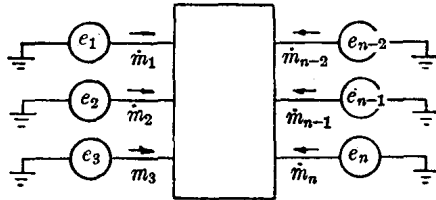


图 3  $n$  端网络



图 4 两端对

**两端对**  $n$  极的一个简单形式是如图 4 所示的两端对。这里将讨论两端对，这是因为首先它相对比较简单，其次它应用于传输管路。

在图 4 中的  $e$  与  $\dot{m}$  不必全是同一类量，例如， $e_1$  与  $\dot{m}_1$  可以是电量，而  $e_2$  与  $\dot{m}_2$  可以是流量量。

联系  $e$  与  $\dot{m}$  有两个方程，即

$$e_2 = g_{11}e_1 + g_{12}\dot{m}_1 \quad (7a)$$

$$\dot{m}_2 = g_{21}e_1 + g_{22}\dot{m}_1 \quad (7b)$$

一般说来， $g$  是积分微分算子，而且可以是时间与输入的函数。当这些系数是输入的函数时，方程是非线性的。这些量在频域中有对应的比拟量。对于线性系统，这些对应的量能够用标准的变换方法找到。

由于作者的主要兴趣是无可动部件，其参数一般与时间无关。下面的讨论只限于与时间无关的系统。

在时域中，方程(7)的  $g$  是依赖于输入的积分微分时间算子。在频域中，此参数是依赖于频率及输入的量。在频域中，对于任一特定频率系统部件的特性可以这样地由实验决定出来，这就是保持频率不变而改变输入幅值，并测量各种不同谐波的输出振幅。可比较的时域实验在于利用变动振幅的阶跃函数作为其输入。

对于线性系统，由于参数( $g$ )与输入无关就得到较为简单的结果。因之，在时域中对线性系统的任一幅值的阶跃函数将得到同样的特性曲线。在频域中，同样的结果也是正确的。所以无需变动正弦函数的幅度了。四个  $g$  或它们在频域中的对应量能够容易地测量出来，对于四个参数中的每一个，其结果是输出幅度与输入幅度之比对频率的一条曲线。然而对于非线性系统，输出-输入比是频率及输入幅度的函数。代替线性情况时的二维曲线，此时得到一个三维曲面。

然而，比对三维曲面工作更为困难的是如下事实：对于时间不变的线性系统，输出频率与输入频率相同。而在非线性系统中，其输出将出现输入频率的谐波。若两种频率同时置



于输入,此时不仅将得到输入频率,而且还将得到其谐波,即和频、差频以及和频与差频的谐波。

在时域中,线性意味着:若输入  $X_1(t)$  产生输出  $X_2(t)$ ,以及输入  $Y_1(t)$  产生输出  $Y_2(t)$ ,则对任意的  $X_1(t)$  与  $Y_1(t)$ ,若输入  $AX_1(t)+BY_1(t)$  将产生  $AX_2(t)+BY_2(t)$ 。对于非线性系统(除某些特殊情形之外),还将出现乘积项,如  $K_1[Y_2(t)]^2$  及  $K_2X_2(t)Y_2(t)$ ,其中  $K$  是常数。

虽然,用于某些特殊形式的非线性系统的方法已有所发展,但还没有解非线性方程的一般方法。因此,为了实用的目的,通常需要某些近似的方法,象图解法,利用计算机,或者若方程不是过份非线性,还可用线性化方法等。

弱非线性意味着乘积项与线性项比较起来相当小。在这种情况下,扰动法或分段线性化法被用于时域中,而描述函数法被用于频域中。描述函数法忽略谐波而只考虑基频。所有这些弱非线性方法的基本想法是将线性概念应用于非线性系统。

对于含有二阶或更低阶的系统,可以利用相平面分析的方法,此时将变量的导数看作变量的函数。

目前在流体放大系统中,通常实用的办法是利用频域法以得到在各种条件下的直流( $\omega=0$ )曲线组,并将这些静态特性用于直流匹配。这基本上就保证了一个单元的流出量能够供应到第二个单元,而且在很低频情况下还仍然保持正常工作。

然而,流体装置的瞬态效应绝大部分是在线性化假定下考虑的。不幸的是对大多数有趣的情形说来,这假定是不现实的。但它还是给我们某些响应的概念,并且对于信号充分小的情况,还给出与实验很符合的结果。

## 2. 变换方程

若方程(7)是线性的而且与时间无关,对它们进行拉普拉斯变换后,就能写成(在频域中类似方程成立):

$$E_2(s) = G_{11}(s)E_1(s) + G_{12}(s)M_1(s) \quad (8a)$$

$$M_2(s) = G_{21}(s)E_1(s) + G_{22}(s)M_2(s) \quad (8b)$$

若网络只由阻抗(即气容、气感和气阻)构成,则可典型化为如图5所示的T型网络。由于所获得结果可直接从方程(8)中导出,故这种表示主要是提供一种方便具体的表示。

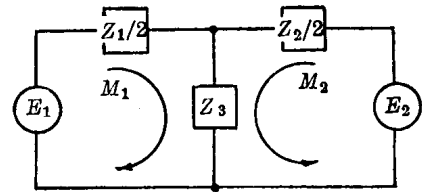


图5 T型阻抗网络

从图5可知

$$E_1 = \left(\frac{Z_1}{2} + Z_3\right)M_1 + Z_3M_2 \quad (9a)$$

$$E_2 = \left(\frac{Z_2}{2} + Z_3\right)M_2 + Z_3M_1 \quad (9b)$$

从式(9a)得

$$M_2 = -\frac{1}{Z_3}\left(\frac{Z_1}{2} + Z_3\right)M_1 + \frac{1}{Z_3}E_1 \quad (10a)$$

将上式代入式(9b)给出

$$E_2 = \frac{Z_2 + 2Z_3}{2Z_3}E_1 - \left[\frac{(Z_1 + 2Z_3)(Z_2 + 2Z_3)}{4Z_3} - Z_3\right]M_1 \quad (10b)$$

这就得出

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{Z_2 + 2Z_3}{2Z_3}, & G_{12} &= -\frac{(Z_1 + 2Z_3)(Z_2 + 2Z_3)}{4Z_3} + Z_3 \\ G_{21} &= \frac{1}{Z_3}, & G_{22} &= -\frac{Z_1 + 2Z_3}{2Z_3} \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

由于所有的  $G$  都能只通过三个阻抗表示出来, 这就说明各个  $G$  中存在着某种关系式, 实际上, 从式(11a)容易看到

$$G_{12}G_{21} - G_{11}G_{22} = 1 \quad (11b)$$

特别感兴趣的是对称网络, 因为它与传输管路有关。对于对称网络

$$Z_1 = Z_2$$

此时

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= -G_{22} = \frac{Z_1 + 2Z_3}{2Z_3} \\ G_{12} &= -\frac{Z_1}{4Z_3}(4Z_3 + Z_1) \\ G_{21} &= \frac{1}{Z_3} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

如图 6 所示, 若对称网络的终端连接一个负载阻抗  $Z_L$ , 则

$$E_1 = \frac{Z_1 + 2Z_3}{2} M_1 + Z_3 M_2 \quad (13a)$$

$$0 = \left( \frac{Z_1}{2} + Z_3 + Z_L \right) M_2 + Z_3 M_1 \quad (13b)$$

在式(13b)中解出  $M_2$ , 再代入式(13a), 就给出

$$E_1 = Z_I M_1 \quad (14)$$

其中  $Z_I$  是终接网络的输入阻抗, 它由下式给出

$$Z_I = \frac{Z_1^2 + 2Z_1Z_L + 4Z_1Z_3 + 4Z_3Z_L}{2(Z_1 + 2Z_3 + 2Z_L)} \quad (15a)$$

利用方程(12), 上式同样可写为

$$Z_I = \frac{Z_L G_{11} - G_{12}}{Z_L G_{21} + G_{11}} \quad (15b)$$

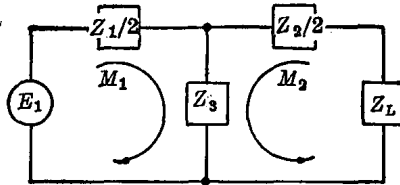


图 6 带负载的对称网络

现在假定有无限个相同的两端对连接在一起如图 7 所示。这网络对  $E_1$  将呈现某一输入阻抗, 它具有某一特性阻抗  $Z_C = Z_I$ 。假如在  $AA'$ 、 $BB'$ 、 $CC'$  等处切断该管路, 对无限网络的其余部分用一个等于特性阻抗  $Z_C$  的负载  $Z_L$  来代替, 对  $E_1$  的输入阻抗仍将保持相同, 即

$$Z_C = Z_I = Z_L$$

因此,在方程(15a)中用  $Z_C$  代替  $Z_I$  与  $Z_L$ , 就得到

$$Z_C^2 = \frac{Z_1^2 + 4Z_1Z_3}{4} = -\frac{G_{12}}{G_{21}} \quad (16a)$$

$$Z_C = \frac{1}{2} \sqrt{4Z_1Z_3 + Z_1^2} = \left(-\frac{G_{12}}{G_{21}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (16b)$$

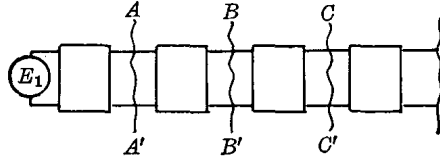


图7 无限节相同的两端对

### 3. 传递函数

已经看到,对于终端连接阻抗  $Z_L$  的管路给出一个关系式,它能用关于  $E_1$  与  $M_1$  的单个方程来代替(7)的两个方程。从方程(13),如果解出  $E_1$  与  $E_2$  之间的关系,其中

$$E_2 = Z_L M_2$$

那么就有

$$E_1 = -\left[\frac{Z_1 + 2Z_3}{2Z_3} + \frac{1}{Z_L} \frac{Z_1}{4Z_3} (4Z_3 + Z_1)\right] E_2 \quad (17a)^*$$

这也可写为

$$E_1 = \left(-G_{11} + \frac{G_{12}}{Z_L}\right) E_2 \quad (17b)$$

或者

$$E_2(s) = G(s) E_1(s) \quad (17c)$$

其中

$$G(s) = \frac{Z_L(s)}{G_{12}(s) - Z_L(s)G_{11}(s)} \quad (17d)$$

称为终接网络的传递函数。

## 六、流体传输管路

管子与导管的线性瞬时特性已经有许多工作出现在文献中<sup>[1~8]</sup>, 本节将详细地讨论较简单的情形,因为作者主要目的只在这里给出一般概念。将首先描述一根管子的传输性质,并利用这性质能够确定在必须用分布参数时不正确地用了集中参数给线路带来的影响。集中参数的线路较容易处理,因为可用常微分方程与其联系起来,而对于分布参数就必须用偏微分方程。集中参数联系着低频而分布参数联系着高频情况,其理由是因为若波长充分长,特定网络的所有部分差不多处于同一位相,以使得波幅只是时间的函数,而非位置的函数;当波长很短时,在一个短距离中幅度明显地发生变化,因此它是时间与位置的函数,因而就

\* 原书误写为  $E_1 = -\left[\frac{Z_1 + 2Z_3}{2Z_3} + \frac{1}{Z_L} \frac{Z_1}{4Z_3} (4Z_3 + Z_1)\right]$ ——译者注

需要分布参数的概念,并且要用偏微分方程来描述其信号。

传输管路可以看作许多无穷小 T 型网络的串联。在图 8 中,考虑了长为  $\Delta z$  的一个线路单元,单位长度的串联阻抗是  $z_1$ ,对于长为  $\Delta z$  的单元,有

$$Z_1 = z_1 \Delta z$$

同样可规定并联导纳为  $Y_3 = 1/z_3$ ,单位长度的并联导纳是  $y_3$ ,就有

$$Y_3 = y_3 \Delta z$$

若  $z$  处的势是  $E$ ,则  $z + \Delta z$  处的势将变为  $E + \Delta E$ ,这变化是通过串联阻抗  $Z_1$  发生的,于是

$$\Delta E = -M z_1 \Delta z$$

同样,在  $A$  点流量  $M$  将分为继续向前流动部分与流过导纳  $Y_3$  的并联部分;向前流动部分的减少等于并联部分,即

$$\Delta M = -E y_3 \Delta z$$

因之,当  $\Delta z$  趋于零时,就有

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -z_1 M \quad (18a)$$

与

$$\frac{\partial M}{\partial z} = -y_3 E \quad (18b)$$

如同有限 T 型网络的连接一样,传输管路的特性阻抗是无限长管路的输入阻抗。从传输管路方程或更简单地从方程 (18b),就能直接地而且毫无困难地找到:

$$Z_{cr} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} Z_C = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4z_1}{y_3} \frac{\Delta z}{\Delta z} + z_1^2 (\Delta z)^2} = \sqrt{\frac{z_1}{y_3}} \quad (19)$$

其中,  $Z_{cr}$  是传输管路的特性阻抗。

## 1. 一阶声学方程

对不定常流的非线性方程已有准确解的只是极少数情形,因而一般说来必须用特征线法或计算机。

当可以做小压力变化的假定时,方程可以被线性化。在线性化过程中若干阶修正项是能利用的,然而,在下面的讨论中,仅限于最简单的情形,即只利用一阶修正项,例如考虑平均值,而与此平均值的瞬时偏差假定是很小的,因之

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad v_z = \bar{v}_z + v_z' \quad (20)$$

等等,其中  $\rho$  是流体的密度,  $v_z$  是  $z$  方向的速度,且假定  $\bar{v}_z = 0$ 。

有关方程将对恒定截面积的圆形导管进行讨论。

在柱面坐标中,假定是轴对称的,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho r v_r + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z = 0 \quad (21a)$$

其中  $r$  是径向距离,  $v_r$  是径向速度。

若假设所关心频率的波长比管的半径大得多,则式 (21a) 的第二项与第三项比较起来是

可忽略的, 利用式(20)得到: 当

$$\lambda = \frac{2\pi|c|}{\omega} \gg r_w \quad (21a)$$

时, 有

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 \quad (21b)$$

成立, 其中  $|c|$  是管中波传播速度的量值, 通常情况下小于自由介质中的声速, 又  $\omega$  是角频率, 而  $r_w$  是管半径。对于直径为  $10^{-3}$  米量级的管子, 方程在  $\omega \ll 10^6$  弧度/秒时成立。

现在若假定绝热无摩擦流, 则  $p$  与  $\rho$  之间有

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{常数} \quad (22a)$$

然而, 若流动不是被认为无摩擦的, 则即使对于绝热流, 代替式(22a), 有(这可从方程(3.11)\*中看到)

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = B \exp \int \frac{ds_t}{c_v} \quad (22b)$$

另一方面, 由于假定速度扰动很小, 于是速度梯度很小。又由于速度梯度在熵中是作为平方项出现的, 它们是二阶的, 因之与一阶项比较起来可以被忽略。所以, 对于绝热小扰动流动, 方程(22a)近似成立, 而且可写为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \quad (23)$$

其中  $a = \sqrt{dp'/d\rho'}$  是声速。

利用式(23), 方程(21b)可写作

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

由于主要关心的是轴向速度  $v_z$ , 则所关心的动量方程是

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[ - \frac{2}{3r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{4}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

利用前述假设, 上式就成为

$$\rho \frac{\partial v'_z}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{4\mu}{3} \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right) \quad (25)$$

假定压力波是频率为  $\omega$  以速度  $c$  传播的正弦波, 即

$$p' = p_0 \sin \omega \left( t - \frac{z}{c} \right)$$

对  $t$  求导, 且在式(24)中解出  $\partial v'_z / \partial z$ , 就给出

$$\frac{\partial v'_z}{\partial z} = - \frac{p_0 \omega}{a^2 \rho} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right)$$

及

$$\frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2} = - \frac{p_0 \omega^2}{a^2 \rho c} \sin \omega \left( t - \frac{z}{c} \right)$$

\* 见《Fluid amplifier》一书的第三章(热力学)。——译者注

于是

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{p_0 \omega}{c} \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right)$$

因之, 在方程(25)中, 可以看到: 若

$$\frac{4\mu}{3} \frac{\omega}{a^2 \rho} \ll 1$$

时, 则有

$$\frac{4\mu}{3} \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2} \ll \frac{\partial p'}{\partial z}$$

对于室温下的空气, 有  $\mu \approx 1.8 \times 10^{-5}$  牛顿·秒/米<sup>2</sup>, 及  $\rho = 1.3$  千克/米<sup>3</sup>; 因之, 假如  $\omega \ll 10^9$  弧度/秒, 则  $(4\mu/3) \partial^2 v'_z / \partial z^2$  可忽略\*。

即使流动不是绝热的, 上面结果也是近似正确的。因而丢掉该项, 而剩下

$$\bar{\rho} \frac{\partial v'_z}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right) \quad (26)$$

最后, 需要能量方程, 它是[从(4.20)]

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla h - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = \nabla \cdot k \nabla T + \Phi$$

其中  $k$  是热传导系数, 而  $h$  是焓。

若  $\Phi$  是由速度梯度的平方项组成的, 而且有  $dh = c_p dT$ \*\* , 前述假设就给出

$$\bar{\rho} c_p \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} = k \nabla^2 T' \quad (27) ***$$

现在由于  $p = \rho R_g T$ , 就有

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = R_g \left( \bar{\rho} \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{T} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) \quad (28a)$$

将式(21b)代入式(21a), 则得

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = R_g \left( \bar{\rho} \frac{\partial T'}{\partial t} - \bar{T} \bar{\rho} \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right) \quad (28b)$$

将此代入式(27)给出

$$\bar{\rho} c_p \frac{\partial T'}{\partial t} + R_g \bar{T} \bar{\rho} \frac{\partial v'_z}{\partial z} = k \nabla^2 T' \quad (29)$$

方程(26)及其边界条件决定轴向速度在径向的分布。若对热流入管子作些假定, 则方程(29)就给出已知边界条件下径向温度分布的必要知识。

利用管壁保持等温的假设, 尼科耳<sup>[7]</sup>曾得到管子的频率响应, 又布朗<sup>[6, 8]</sup>得到过阶跃函数的响应。

为简单起见, 若假定流体与管壁绝缘(绝热流动), 则径向温度分布变成均匀的, 由于  $T'$  在轴向仅有缓慢的变化, 便能忽略方程(29)中的  $\nabla^2 T'$  项, 在这个假定下, 方程(29)就与方程(24)相同了。

\* 原书误为  $\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2}$ 。——译者注

\*\* 原书误为  $h = c_p dT$ 。——译者注

\*\*\* 原书误为  $\bar{\rho} c_p \frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial t} = k \nabla^2 T'$ 。——译者注



为了进一步简化解,当近似地把方程(26)对横截面求平均,则可忽略掉速度分布。

求平均以后,就给出

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}'_z}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial z} + \frac{1}{\pi r_w^2} 2\pi \mu \int_0^{r_w} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right) dr$$

其中  $r_w$  是管的半径。于是,由于

$$\mu \frac{\partial v'_z}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = -\tau_{r_w}$$

就有

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}'_z}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{r_w}}{r_w} \quad (30)$$

对于完全发展的不可压缩流,哈根-泊萧叶方程给出

$$\tau'_{r_w} (\text{完全发展}) = \frac{4\mu \bar{v}'_z}{r_w} \quad (31a)$$

假定式(30)中的  $\tau_{r_w}$  近似等于  $\tau'_{r_w}$ , 则

$$\tau_{r_w} = c_f \tau'_{r_w} \quad (31b)$$

其中  $c_f$  是近似等于 1 的数。将径向分布考虑在内的更精密的分析表明<sup>[6,7]</sup>: 这里作为纯气阻出现的这一项正如人们所想象的应该是频率的函数。只有对层流, 这些方程才能被线性化而且成立; 然而, 在实验中气阻也将是紊流度与信号幅度的函数。

从方程(30)与(31), 可以得到

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}'_z}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial z} - \frac{8c_f \mu \bar{v}'_z}{r_w^2} \quad (32a)$$

也可以写作

$$L_l \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = -\frac{\partial e}{\partial z} - R_l \dot{m} \quad (32b)$$

$$\dot{m} = \bar{\rho} A \bar{v}'_z \quad (32c)$$

$$e = \frac{\bar{p}'}{\rho} \quad (32d)$$

$$L_l = \frac{1}{\rho A} = \text{单位长度气感} \quad (32e)$$

$$R_l = \frac{8c_f \mu \pi}{\rho^2 A^2} = \text{单位长度气阻} \quad (32f)$$

及

$$A = \pi r_w^2 \quad (32g)$$

于式(24)上取平均, 且代以(32)上的各式, 可得

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{C_l} \frac{\partial \dot{m}}{\partial z} = 0 \quad (33a)$$

其中

$$C_l = \frac{\bar{\rho} A}{a^2} = \text{单位长度气容} \quad (33b)$$

在上述方程中, 已利用  $e$  作为机械势, 这在前面已导出为

$$e = \int \frac{d\bar{p}}{\rho}$$

它与状态变化的途径有关。然而,对于小扰动,这就变为

$$e = \frac{\bar{p}'}{\rho}$$

除了气容、气阻与气感的来源有些不同外,若以压力替代机械势,以体积流量替代质量流量,则对于小扰动来说,其结果并没什么根本的差别。

由于所有被引证的作者宁愿用压力而不用机械势,故他们所得到的  $R_l$ 、 $C_l$  与  $L_l$  的单位与这里所给出的不同;然而量  $R_l C_l$ 、 $L_l C_l$  与  $R_l/L_l$  是大致上一样的。

对式(32b)与(33b)取拉普拉斯变换,就给出

$$\frac{\partial E}{\partial z} + (R_l + s L_l) M = 0 \quad (34a)^*$$

及

$$\frac{\partial M}{\partial z} + s C_l E = 0 \quad (34b)$$

将上两式与式(18)比较一下,可以看到单位长度中的串联阻抗  $z_1$  是由

$$z_1 = R_l + s L_l \quad (34c)$$

给出,而单位长度的并联导纳  $y_3$  是由

$$y_3 = s C_l \quad (34d)$$

给出。

替代式(34c),考虑到速度分布的更精确分析,尼科耳<sup>[7]</sup>与布朗<sup>[6]</sup>给出了:

$$z'_1 = \frac{L_l s}{1 - \frac{2J_1(jr_w \sqrt{s\rho/\mu})}{jr_w \sqrt{s\rho/\mu} J_0(jr_w \sqrt{s\rho/\mu})}} \quad (35a)$$

其中  $J_1$  与  $J_0$  是贝塞尔函数,又  $j = \sqrt{-1}$ 。关系式(35a)似乎原先由 Crandall<sup>[9]</sup>在他作的书的附录中导出过。在该附录中指出:在管壁邻近的薄层内粘性产生阻力效应,在流体粗略地象活塞一样运动的核心区内产生气感效应。尼科耳<sup>[7]</sup>在他的文章中对这种“趋肤效应”建立了关系式,从而定量地说明了这一点。

在频域中,对于低频情况,式(35a)变成(这正如 Crandall 与尼科耳所指出的)

$$z'_1 = R_l + \frac{4}{3} j \omega L_l \quad (35b)$$

因之,对于低频由于  $R_l$  比  $\omega L_l$  大得多,故这个较精确的等式与式(34c)比起来只产生相当小的变化。然而,这个差别对于当气阻影响(即相位影响)与气感影响比起来可忽略时的频率情况,就变得相当明显。

对于高频,布朗得到

$$z'_1 = L_l s \left[ 1 + 2 \left( \frac{\mu}{\rho s r_w^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 3 \left( \frac{\mu}{\rho s r_w^2} \right) + \dots \right] \quad (35c)$$

在能量方程中利用等温壁的假设,就给出

$$y'_3 = s C_l \left[ 1 + 2(\gamma - 1) \frac{J_1(jr_w \sqrt{s c_p \rho / k})}{jr_w \sqrt{(s c_p \rho / k)} J_0(jr_w \sqrt{s c_p \rho / k})} \right] \quad (36)$$

\* 原书误为  $\frac{\partial E}{\partial z} = (R_l + s L_l) M = 0$ 。——译者注

其中  $c_p$ ——定压比热,  $\gamma$ ——比热比,  $k$ ——热传导系数。

## 2. 传输管路的四极单元

现在回到方程(18a)与(18b), 为了方便起见, 重写一遍:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -z_1 M \quad (37a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = -y_3 E \quad (37b)$$

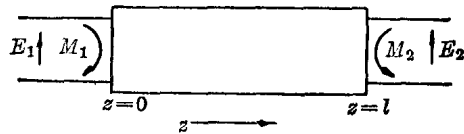


图9 传输管路

将式(37a)微分, 并且以式(37b)代入, 就可得到

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = z_1 y_3 E$$

这方程的解是

$$E = A_1 e^{\Gamma z} + A_2 e^{-\Gamma z} \quad (38a)$$

其中

$$\Gamma = \sqrt{z_1 y_3} \quad (38b)$$

将式(38a)微分, 并代到式(37a)中, 就可得到

$$M = -A_1 \sqrt{\frac{y_3}{z_1}} e^{\Gamma z} + A_2 \sqrt{\frac{y_3}{z_1}} e^{-\Gamma z} \quad (38c)$$

在图9中, 令始端值为  $E_1$ 、 $M_1$ , 而终端值为  $E_2$ 、 $M_2$ , 又令管路长度为  $l$ , 则在  $z=0$  处

$$E_1 = A_1 + A_2$$

与

$$M_1 = -A_1 \sqrt{\frac{y_3}{z_1}} + A_2 \sqrt{\frac{y_3}{z_1}}$$

由此得

$$A_1 = \frac{E_1}{2} - \frac{M_1}{2} \sqrt{\frac{z_1}{y_3}} \quad (38d)$$

$$A_2 = \frac{E_1}{2} + \frac{M_1}{2} \sqrt{\frac{z_1}{y_3}} \quad (38e)$$

将这些值代入式(38a)中, 就得出

$$E = E_1 \cosh \Gamma z - M_1 \sqrt{\frac{z_1}{y_3}} \sinh \Gamma z \quad (39a)$$

及

$$M = -E_1 \sqrt{\frac{y_3}{z_1}} \sinh \Gamma z + M_1 \cosh \Gamma z \quad (39b)$$

这就给出了与输入端距离为  $z$  处任一点的势与流量。特别在输出端  $z=l$  处, 有

$$E_2 = E_1 \cosh \Gamma l - M_1 \sqrt{\frac{z_1}{y_3}} \sinh \Gamma l$$