XINSHIJIBAN

新世纪版

ABC

中学学科同步训练ABC丛书

主编　仇炳生

编者　卢固华　周　俊

初中（二年级用）

几何

上海科学技术出版社

新世纪版中学学科同步训练ABC丛书

ABC

初中几何

主编　仇炳生

编者　卢固华　周　俊

上海科学技术出版社

二年级用

内 容 提 要

本丛书是根据九年义务教育全日制初级中学的教学大纲分学科编写而成的。本丛书符合各学科的教学目的和要求。

本书是供初中二年级学生使用的初中几何，根据课本内容按章编写。每一章分设“知识要点与学习水平”、“典型例题”、“练习”及“单元自测”。“知识要点与学习水平”归纳了对学生不同要求的知识点；“典型例题”使学生深入理解并灵活运用所学的知识；“练习”及“单元自测”帮助考察学生学习的效果并训练学生解决问题的能力。另外，书中设有“阶段自测”及两个学期的期末自测。书末附有答案。

责任编辑　周玉刚

新世纪版中学学科同步训练ABC丛书
初 中 几 何
（二年级用）
主编　仇炳生
编者　卢固华　周　俊
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路450号　邮政编码200020）
新华书店上海发行所经销　　上海商务联西印刷厂印刷
开本787×1092　1/16　印张8.5　字数195 000
2001年6月第1版　　2002年6月第4次印刷
印数26201-37200
ISBN7-5323-5964-6/G · 1330
定价：9.50元

出 版 说 明

新世纪版中学学科同步训练ABC丛书是以九年义务教育全日制初级中学语文、数学、英语、物理、化学教学大纲为依据分学科编写的学习辅导参考用书。它与当前的教学有一定的同步性，并符合以上五门学科的教学目的和要求，成为教师指导学生学习的极好助学手段。

本丛书的特点是用A、B、C三级训练方式，体现教材单元的知识坡度；体现学生学习过程的自我评价和循序渐进。

A级——一般学生学习标准达成的自测，面向全国各地区的学生。这一级训练的水平体现九年义务教育大纲中最基本的要求。

B级——用以提高学生综合应用知识的能力。这一级训练是体现培养能力和发展智力，体现大多数学生应达到的水平。

C级——配有适当比例的竞赛类、趣味类、智力训练等题目，以开拓学生的知识面，提高灵活解题的技巧和能力。

整套丛书训练题的设计特色，既体现知识体系，又符合学生实际水平与认识规律，重视直观性与操作性，书末均附有答案，可供学生在练习后进行自测检查。

本书由仇炳生统稿，我们表示衷心感谢。

上海科学技术出版社

2001年春

目　　录

第三章　三角形 …… 1
知识要点与学习水平 …… 1
一、三角形 …… 2
典型例题 …… 2
练习(A级) …… 4
单元自测(A级) …… 5
单元自测(B级) …… 7
二、全等三角形 …… 9
典型例题 …… 9
练习一(A级) …… 11
练习二(A级) …… 12
单元自测(A级) …… 14
单元自测(B级) …… 16
阶段自测 …… 18
A级(90分钟) …… 18
B级(90分钟) …… 20
C级(90分钟) …… 23
三、等腰三角形 …… 25
典型例题 …… 25
练习一(A级) …… 26
练习二(A级) …… 27
单元自测(A级) …… 28
单元自测(B级) …… 29
四、直角三角形 …… 31
典型例题 …… 31
练习一(A级) …… 33
练习二(A级) …… 34
单元自测(A级) …… 35
单元自测(B级) …… 36
五、轴对称 …… 38
典型例题 …… 38

练习(A 级) …… 40
单元自测(A 级) …… 41
单元自测(B 级) …… 42
第一学期期末自测 …… 45
A 级(90 分钟) …… 45
B 级(90 分钟) …… 47
C 级(90 分钟) …… 49
六、基本作图 …… 51
典型例题 …… 51
练习(A 级) …… 52
单元自测(A 级) …… 53
单元自测(B 级) …… 54
第四章　四边形 …… 55
知识要点与学习水平 …… 55
一、四边形 …… 56
典型例题 …… 56
练习(A 级) …… 57
单元自测(A 级) …… 58
单元自测(B 级) …… 59
二、平行四边形 …… 60
典型例题 …… 60
练习一(A 级) …… 62
练习二(A 级) …… 64
练习三(A 级) …… 65
单元自测(A 级) …… 67
单元自测(B 级) …… 68
阶段自测 …… 71
A 级(90 分钟) …… 71
B 级(90 分钟) …… 73
C 级(90 分钟) …… 76
三、梯形 …… 79
典型例题 …… 79
练习一(A 级) …… 81
练习二(A 级) …… 82
单元自测(A 级) …… 84
单元自测(B 级) …… 86
第五章　相似三角形 …… 88
知识要点与学习水平 …… 88
一、比例与比例线段 …… 89

典型例题 …… 89
练习一(A 级) …… 90
练习二(A 级) …… 92
单元自测(A 级) …… 94
单元自测(B 级) …… 95
二、相似三角形 …… 97
典型例题 …… 97
练习一(A 级) …… 99
练习二(A 级) …… 101
单元自测(A 级) …… 102
单元自测(B 级) …… 104
第二学期期末自测 …… 107
A 级(90 分钟) …… 107
B 级(90 分钟) …… 109
C 级(90 分钟) …… 111
参考答案 …… 116

第三章 三 角 形

知识要点与学习水平

单元	节 次	知识要点和难点	学习水平			
			识记	理解	应用	综合
一、三角形	3.1 关于三角形的一些概念	(1) 三角形的概念		✓		
		(2) 三角形的角平分线、中线、高的概念		✓		
		(3) 三角形的稳定性	✓			
	3.2 三角形三条边的关系	(4) 三角形三边间的不等关系		✓		
		(5) 按边长的关系对三角形分类			✓	
	3.3 三角形的内角和	(6) 三角形的内角和定理及两个推论			✓	
		(7) 按角的大小对三角形的分类			✓	
二、全等三角形	3.4 全等三角形	(8) 全等形、全等三角形的概念和性质	✓			
	3.5 三角形全等的判定(一)	(9)“边、角、边”公理				✓
	3.6 三角形全等的判定(二)	(10)“角、边、角”公理和“角、角、边”公理				✓
	3.7 三角形全等的判定(三)	(11)“边、边、边”公理				✓
三、等腰三角形	3.8 等腰三角形的性质	(12) 等腰三角形的性质				✓
		(13) 等边三角形的性质				✓
	3.9 等腰三角形的判定	(14) 等腰三角形的判定				✓
		(15) 等边三角形的判定				✓
四、直角三角形	3.10 余角	(16) 余角的概念		✓		
		(17) 余角的性质			✓	
	3.11 直角三角形的判定	(18)“斜边、直角边”定理				✓
	3.12 逆命题和逆定理	(19) 逆命题和逆定理的概念	✓			
	3.13 勾股定理	(20) 勾股定理			✓	
	3.14 勾股定理的逆定理	(21) 勾股定理的逆定理			✓	

（续表）

单元	节　　次	知识要点和难点	学习水平			
			识记	理解	应用	综合
五、轴对称	3.15　角平分线	(22) 角平分线的性质定理及其逆定理			✓	
	3.16　线段的垂直平分线	(23) 线段垂直平分线	✓			
		(24) 线段垂直平分线性质定理及其逆定理			✓	
	3.17　轴对称和轴对称图形	(25) 轴对称、轴对称图形的概念	✓			
		(26) 成轴对称的两个图形的性质	✓			
六、基本作图	3.18　基本作图	(27) 五种基本作图			✓	
	3.19　利用基本作图作三角形	(28) 利用基本作图作三角形			✓	
		(29) 尺规作图的步骤	✓			

一、三　角　形

典型例题

例1　如图 3.1 所示，已知：AD 是$\triangle ABC$ 的中线，AE、AF 分别是$\triangle ABD$、$\triangle ADC$ 的角平分线.

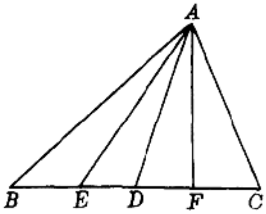


图　3.1

(1) 图中共有多少个三角形？写出它们的名称；

(2) 图中有多少条相等的线段？写出它们之间的关系；

(3) 图中有多少个相等的角？写出它们之间的关系.

解　(1) 图中共有 10 个三角形. 它们是：

$\triangle ABE$、$\triangle ABD$、$\triangle ABF$、$\triangle ABC$、$\triangle AED$、$\triangle AEF$、$\triangle AEC$、$\triangle ADF$、$\triangle ADC$、$\triangle AFC$.

(2) 图 3.1 中有两条相等的线段. 关系是 $BD=DC=\frac{1}{2}BC$.

(3) $\angle BAE=\angle EAD=\frac{1}{2}\angle BAD$；$\angle DAF=\angle FAC=\frac{1}{2}\angle DAC$.

评注　在复杂的图形中寻找所有的三角形时，应注意的是不要重复、不要遗漏. 为此要有清晰地寻找思路，如顺序找出以 AB 为一边的四个三角形，以 AE 为一边的三个三角形，以 AD 为一边的两个三角形和以 AF 为一边的一个三角形.

例2　如图 3.2 所示，已知：$\triangle ABC$ 中，BD 平分$\angle ABC$，$CE\perp AB$ 于点 E，$\angle ACB=78°$，$\angle BAD=\angle ABD$. 求$\angle ADB$ 和$\angle BCE$ 的度数.

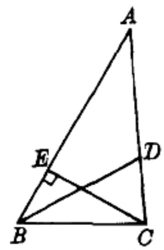


图　3.2

解　设$\angle BAD=\angle ABD=x$，则$\angle BDC=\angle BAD+\angle ABD=2x$，$\angle DBC=x$.

在$\triangle BDC$ 中，

∵　$\angle DCB=78°$(已知)，

∴　$2x+x+78°=180°$(三角形内角和定理).

∴　$x=34°$.

在$\triangle ABD$中，$\angle ADB=180°-34°-34°$(三角形内角和定理)，

$\therefore\quad \angle ADB=112°$.

在$\triangle BCE$中，$\because\quad \angle BEC=90°,\angle EBC=2x=68°$，

$\therefore\quad \angle BCE=180°-90°-68°$(三角形内角和定理).

$\therefore\quad \angle BCE=22°$.

评注 通过设未知数列方程(组)求解角或线段的大小，是几何中常用的一种方法.

例3 一个等腰三角形的周长为16cm，一腰上的中线把等腰三角形分成的两个三角形的周长之差为4cm. 求等腰三角形的各边长.

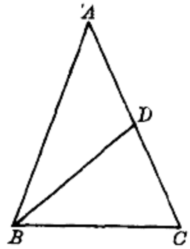


图 3.3

解 如图3.3所示，设等腰三角形ABC中，$AB=AC$，腰AC上的中线BD把$\triangle ABC$分成$\triangle ABD$和$\triangle CBD$. 因为$AD=CD$，所以两个三角形的周长之差等于腰AB与底BC之间的差. 这里要分两种情况来计算.

(1) $AB-BC=4$cm，设$BC=x$cm，则$AB=AC=(x+4)$cm.

由 $2(x+4)+x=16$， 得 $x=\frac{8}{3}$.

$\therefore\quad EC=\frac{8}{3}$cm，$AB=AC=\frac{20}{3}$cm.

(2) $BC-AB=4$cm. 设$BC=x$cm，则$AB=AC=(x-4)$cm.

由 $2(x-4)+x=16$， 得 $x=8$.

$\therefore\quad BC=3$cm，$AB=AC=4$cm.

因为$4+4=8$，所以第二种情况结果不能组成三角形，从而这个等腰三角形的三边长分别是$\frac{8}{3}$cm，$\frac{20}{3}$cm，$\frac{20}{3}$cm.

评注 解几何问题必须全面考虑问题，把握几何图形和数量之间的关系特点.

例4 如图3.4所示，已知：$\triangle ABC$的角平分线AD、BE、CF相交于点O，$\angle ACB=50°$.

(1) 求$\angle AOB$的度数；

(2) 如果$OH\perp BC$于点H，求$\angle COH$的度数.

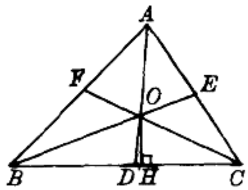


图 3.4

解 (1) $\because\quad \angle BAC+\angle ABC=180°-\angle ACB$(三角形内角和定理)，$\therefore\quad \angle BAC+\angle ABC=180°-50°=130°$.

$\therefore\quad \frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC=65°$.

$\because\quad AD$、BE分别平分$\angle BAC$和$\angle ABC$，

$\therefore\quad \angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAC,\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\therefore\quad \angle BAO+\angle ABO=65°$.

$\because\quad \angle AOB=180°-(\angle BAO+\angle ABO)$(三角形内角和定理)，

$\therefore\quad \angle AOB=180°-65°=115°$.

(2) $\because\quad CF$平分$\angle ACB$，$\therefore\quad \angle OCH=\frac{1}{2}ACB=25°$.

又 $\because\quad \angle OHC=90°$(已知)，$\therefore\quad \angle COH=180°-90°-25°$(三角形内角和定理).

$\therefore\quad \angle COH=65°$.

评注 从求解第(1)题的过程中可以得到$\angle BOD=\angle BAO+\angle ABO=65°$,因此得出$\angle BOD=\angle COH$.若舍去条件$\angle ACB=50°$,这个结论是否仍成立?请你证明.

例5 如图3.5所示,已知:P为$\triangle ABC$内一点.

求证:$AB+AC>PB+PC$.

证明 延长BP交AC于点D.

在$\triangle ABD$中,$AB+AD>BD$(三角形两边的和大于第三边).

即 $AB+AD>BP+PD$.

在$\triangle DPC$中,$PD+DC>PC$(三角形两边的和大于第三边).

∴ $(AB+AD)+(PD+DC)>(BP+PD)+(PD+DC)>(BP+PD)+PC$(不等式的性质).

∴ $AB+AD+DC>PB+PC$(不等式的性质),

即 $AB+AC>PB+PC$.

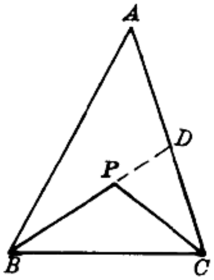
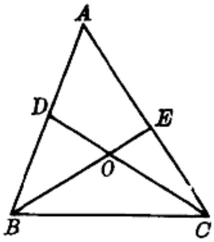


图 3.5

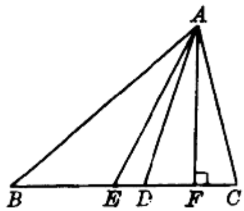
评注 证明线段和的不等式时,往往应用几个同向不等式相加而得,而这些不等式可以通过三角形三边关系定理得到.

练 习(A级)

1. 图中有几个三角形?说出这些三角形,并分别说出它们的边和角.



(第1题)



(第2题)

2. 如图,在$\triangle ABC$中,AD是角平分线,AE是中线,AF是高.写出图中相等的线段、相等的角.
3. **填空题** 如果三角形三边的长度一定,这个三角形的形状大小就完全确定,三角形的这个性质,叫做三角形的________.
4. **填空题** 已知三角形的三边为3、$2a-1$,8,则a的取值范围是________________.
5. **填空题** 在$\triangle ABC$中,

   (1) $\angle A=102°$, $\angle B=24°17'$, 则$\angle C=$____________;

   (2) $\angle A=50°$, $\angle B-\angle C=30°$, 则$\angle B=$____________;

   (3) $2\angle A=\angle B+\angle C$, 则$\angle A=$____________;

   (4) $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$, 则$\angle A=$________, $\angle B=$________, $\angle C=$________.
6. **选择题** 下列长度的三条线段能组成三角形的是(   ).

   (A) 3cm,6cm,10cm; (B) 3cm,7cm,10cm;

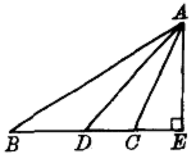
   (C) 5cm,7cm,3cm; (D) 5cm,1cm,3cm.
7. 适合下列条件的$\triangle ABC$是锐角三角形、直角三角形、还是钝角三角形?

(1) $\angle A=30°$，$\angle B=\angle C$；　　　(2) $\angle B=\angle C-\angle A$；

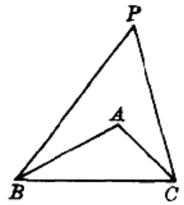
(3) $\angle A=\frac{1}{2}\angle B,\angle B=\frac{1}{3}\angle C$；　　　(4) $\angle A-\angle B=31°,\angle C-\angle A=10°$.

8. 已知：等腰三角形的周长为 24cm，底边比腰长 3cm，求各边长.

9. 如图，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\angle ABC$，AD 平分 $\angle BAC$，AE 垂直 BC 的延长线于点 E，$\angle DAE=42°$. 求 $\angle ACB$ 的度数.



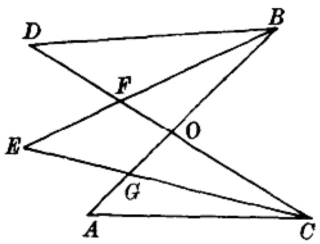
（第 9 题）



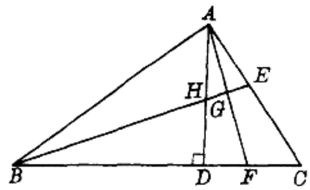
（第 10 题）

10. 如图，已知：P 为 $\triangle ABC$ 外一点. 求证：$\angle BAC>\angle BPC$.

11. 如图，已知：BE 平分 $\angle ABD$ 交 CD 于点 F，CE 平分 $\angle ACD$ 交 AB 点 G，AB、CD 交于点 O，且 $\angle A=48°$，$\angle D=46°$，求 $\angle BEC$ 的度数.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，AD 为 BC 边上的高，BE 为 $\angle B$ 的平分线，$\angle CAD$ 的平分线 AF 交 BC 于 F，BE 交 AD、AF 于 H、G. 求证：$BE\perp AF$.

单元自测（A 级）

1. 填空题（每小题 4 分，共 32 分）

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle B=120°$，$\angle A+\angle C=160°$，则 $\angle A=$ ________ °，$\angle B=$ ________ °.

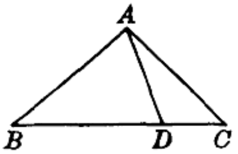
(2) 等腰三角形中，如果底边长为 6cm，则腰长 x 的取值范围是 ______，如果腰长为 6cm，则底边长 m 的取值范围是 ________.

(3) 一个三角形三个内角中至少有 ________ 个锐角，三个外角中至少有 ________ 个钝角.

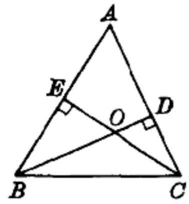
(4) 三角形的一个外角等于和它相邻的内角的 $\frac{1}{2}$，则此三角形是 ________ 三角形.

(5) 如图，点 D 在 BC 上，$\angle C=45°$，$\angle CAD=25°$，$\angle BAD=\angle BDA$，则 $\angle B=$ ________ °.

(6) 如图，$\triangle ABC$ 中，$BD\perp AC$ 于点 D，$CE\perp AB$ 于点 E，BD、CE 相交于点 O，$\angle ABC=65°$，$\angle ACB=55°$. 则 $\angle BOC=$ ________ °.



［第(5)题］



［第(6)题］

(7) $\triangle ABC$ 的周长是一个偶数，且 $AB=9$，$BC=2$，则 $AC=$ ________.

(8) 等腰三角形一腰上的中线长的 2 倍________腰长的 3 倍.（填“>”、“<”或“=”）

2. 选择题（每小题 5 分，共 20 分）

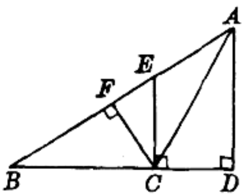
(1) 如图，$AD\perp BC$，$EC\perp BC$，$CF\perp AB$，D、C、F 是垂足，下列说法中错误的是（　　）

(A) $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高.

(B) $\triangle ABC$ 中，EC 是 BC 边上的高.

(C) $\triangle EBC$ 中，EC 是 BC 边上的高.

(D) $\triangle EBC$ 中，CF 是 BE 边上的高.



［第(1)题］

(2) 以下列长度的三条线段为边，能组成三角形的组数是（　　）

① 1、2、3　② 2、3、4　③ 4、5、6　④ $m+n$，n，$m-n$ $(m>n>0)$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(3) 等腰三角形的两边分别是 5cm 和 7cm，则这个等腰三角形的周长是（　　）.

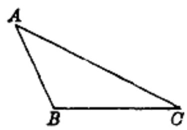
(A) 17cm.　　(B) 19cm.　　(C) 17cm 到 19cm 之间.　　(D) 17cm 或 19cm.

(4) 一个三角形中，至少有一个角（　　）.

(A) 大于或等于 90°.　　(B) 大于 60°.

(C) 小于 60°.　　(D) 不小于 60°.

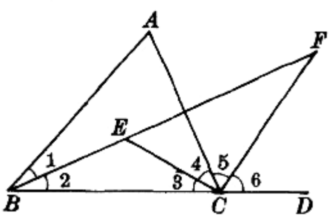
3. (12 分)　在图中画出 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高 AH，$\triangle ABC$ 的角平分线 BT，AB 边上的中线 CM.



（第 3 题）

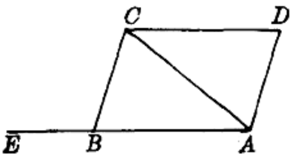
4. (12 分)　已知：等腰三角形的周长为 19cm，其中一边长为 4cm，求其他两边长.

5. (12 分)　如图，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，$\angle A=60°$，求 $\angle ECF$、$\angle FEC$ 的度数.



（第 5 题）

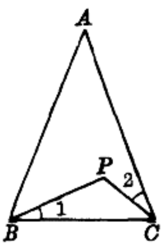
6. （12 分） 如图，已知：$BA \parallel CD$，$BC \parallel AD$，E 是 AB 延长线上一点．
求证：$\angle CBE = \angle DAC + \angle ACD$．



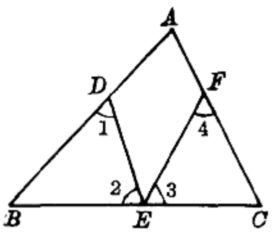
（第 6 题）

单元自测（B 级）

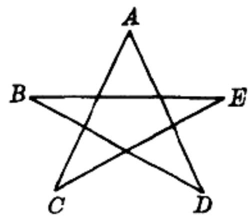
1. **判断题**[*]（每小题 3 分，共 12 分）
（1）平分三角形内角的射线，叫做三角形的角平分线． （ ）
（2）用线段 $a,b,c(a<b<c)$ 为边组成三角形的条件是 $a+b>c$． （ ）
（3）只有两边相等的三角形叫做等腰三角形． （ ）
（4）三角形的外角大于它的任何一个内角． （ ）
2. **填空题**（每小题 4 分，共 32 分）
（1）五条线段的长分别为 1cm，2cm，3cm，4cm，5cm ，以其中三条线段为边长可以构成__________个三角形．
（2）一个等腰三角形的周长为 5cm，如果它的三边长都是整数，那么它的腰长为__________cm，底边长为__________cm．
（3）$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 2\angle B = 3\angle C$，则 $\triangle ABC$ 是__________三角形．
（4）不等边三角形的最小内角的取值范围是__________．
（5）如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 40°$，$\angle ABC = \angle ACB$，点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle 1 = \angle 2$，则 $\angle BPC =$__________°．



［第(5)题］



［第(6)题］



［第(7)题］

（6）如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 70°$，点 D、E、F 分别在边 AB、BC、CA 上，且 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，则 $\angle DEF =$__________°．
（7）如图，$\angle B = 31°$，$\angle C = 33°$，$\angle D = 33°$，$\angle E = 31°$，则 $\angle A =$__________°．
（8）$\triangle ABC$ 的三边长 a、b、c 都是正整数，且满足 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$，如果 $b=4$，那么这样的三角

---

* 本书中的判断题，正确的在题后的括号内打“√”，错误的打“×”，下同．

形共有__________个.

3. 选择题(每小题 5 分,共 20 分)

(1) 满足下列条件的三条线段 a,b,c 中,不能组成三角形的是(　　).

(A) $a=m+1$, $b=m+2$, $c=m+3$ $(m>0)$.

(B) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{4}{3}$.

(C) $a:b:c=2:3:5$.

(D) $2a$, $3a$, $5a-1$ $(a\geqslant 1)$.

(2) $\triangle ABC$ 中, $a=3x$, $b=4x$, $c=14$,则 x 的取值范围是(　　).

(A) $2<x<14$.　　(B) $x>2$.　　(C) $x<14$.　　(D) $7<x<14$.

(3) 在具备下列条件的$\triangle ABC$ 中,不是直角三角形的是(　　).

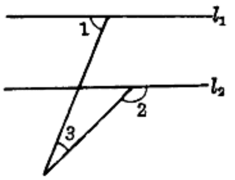
(A) $\angle A-\angle B=\angle C$.　　(B) $\angle A=3\angle C, \angle B=2\angle C$.

(C) $\angle A=\angle B=2\angle C$.　　(D) $\angle A=\angle B=\frac{1}{2}\angle C$.

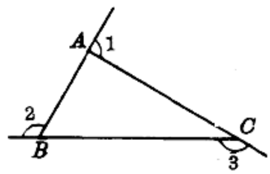
(4) 如图, $l_1 /\!/ l_2$,下列式子等于 180°的是(　　).

(A) $\angle 1+\angle 2+\angle 3$.　　(B) $\angle 1-\angle 2+\angle 3$.

(C) $\angle 1+\angle 2-\angle 3$.　　(D) $-\angle 1+\angle 2+\angle 3$.



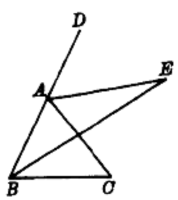
[第(4)题]



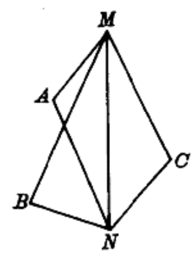
(第 4 题)

4. (12 分)　如图,已知: $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 是$\triangle ABC$ 的三个外角,且$\angle 1:\angle 2:\angle 3=3:4:5$. 求$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 的度数.

5. (12 分)　如图,已知: BE、AE 分别是$\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 和$\angle A$ 的外角的平分线. 求证: $\angle C=2\angle E$.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. (12 分)　如图,已知: MN 为$\triangle MNA$、$\triangle MNB$ 和$\triangle MNC$ 的公共边. 求证: $MN<\frac{1}{3}(MA+MB+MC+NA+NB+NC)$.

二、全等三角形

典型例题

例1 如图3.6所示，已知：$\triangle ABC$与$\triangle ADE$为顶角$\angle BAC$与$\angle DAE$相等的等腰三角形.

求证：$\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

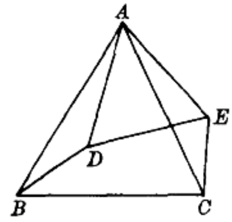


图 3.6

证明 由 $\angle BAC=\angle DAE$，得

$\angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$(等式的性质)，

即 $\angle BAD=\angle CAE$.

在$\triangle ADB$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases} AB=AC(\text{已知}), \\ AD=AE(\text{已知}), \\ \angle BAD=\angle CAE(\text{已证}), \end{cases} \quad \therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle ACE(SAS).$$

评注 (1) 图中由点A引出的四条线段构成了6个角，简称为四线六角. 在四线六角问题中，若$\angle BAD=\angle CAE$，则$\angle BAC=\angle DAE$，反过来也对. 这也是证明两角相等的常用方法之一.

(2) $\triangle CAE$可看成由$\triangle BAD$以顶点A为中心旋转而成，这是一种全等变换.

例2 判断$\triangle ABC$和$\triangle DEF$满足下列条件时是否全等.

(1) $AB=DE$，$BC=EF$，$\angle A=\angle D$；

(2) $AC=DF$，$BC=DE$，$\angle C=\angle D$；

(3) $\angle A=\angle E$，$\angle B=\angle F$，$AB=EF$；

(4) $\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle F$，$AC=EF$；

(5) $\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle F$，$AB=EF$；

(6) $AB=DE$，$BC=DF$，$\triangle ABC$的周长$=\triangle DEF$的周长.

解 如图3.7所示，对照以上条件，从$\triangle ABC$到$\triangle DEF$

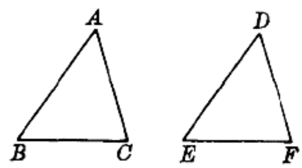


图 3.7

(1) 是“边、边、角”对应相等，不能判定全等.

(2) 是“边、角、边”对应相等，能判定全等.

(3) 是“角、边、角”对应相等，能判定全等.

(4) 是“角、边、角”到“角、角、边”，显然不对应相等，不能判定全等.

(5) 是“角、角、边”到“角、角、边”，但$\triangle ABC$中AB与$\angle A$相邻，而$\triangle DEF$中EF不与$\angle D$相邻，实际上它们也不是对应相等，不能判定全等.

(6) 由已知可以得到$CA=EF$，它们就是“边、边、边”对应相等，能判定全等.

评注 判定两个三角形全等的方法有：“SAS”，“ASA”，“AAS”和“SSS”. 解题时一定要从实际图形出发，弄清它们的对应关系.

例3 如图3.8所示，已知：$CD\perp AB$于点D，$EF\perp AB$于点F，$CD=EF$，$AF=BD$，CD、BE相交于点P，EF、AC相交于点Q.

求证：$EQ=CP$.

证明 ∵ $AF=BD$(已知),

∴ $AF+FD=BD+FD$(等式性质),

即 $AD=BF$.

∵ $CD\perp AB$ 于点 D,$EF\perp AB$ 于点 F(已知),

∴ $\angle CDA=\angle CDB=90°$, $\angle EFB=\angle EFA=90°$ (垂直定义).

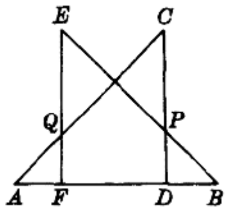


图 3.8

在△AOC 和△BFE 中,$\begin{cases}AD=BF(\text{已证}),\\ \angle CDA=\angle EFB(\text{等量代换}),\\ CD=EF(\text{已知}),\end{cases}$

∴ $\triangle ADC\cong\triangle BFE(SAS)$. ∴ $\angle A=\angle B$(全等三角形对应角相等).

在△AFQ 和△BDP 中,$\begin{cases}\angle A=\angle B(\text{已证}),\\ AF=BD(\text{已知}),\\ \angle AFQ=\angle BDP(\text{等量代换}),\end{cases}$

∴ $\triangle AFQ\cong\triangle BDP(ASA)$. ∴ $FQ=DP$(全等三角形对应边相等).

又 ∵ $EF=CD$(已知), ∴ $EF-FQ=CD-DP$(等式性质).

即 $EQ=CP$.

评注 利用全等三角形证明线段相等、角相等,是一种常用的方法.

例4 如图 3.9 所示,已知:△ABC 和△ADE 都是等腰直角三角形. 求证:(1) $BD=CE$;(2) $BD\perp CE$.

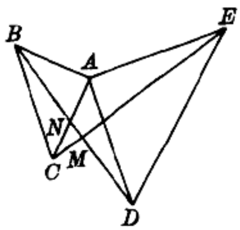


图 3.9

证明 (1) ∵ △ABC 和△ADE 都是等腰直角三角形(已知),

∴ $AB=AC$,$AD=AE$,$\angle BAC=\angle DAE=90°$(等腰直角三角形的定义)

∴ $\angle BAC+\angle CAD=\angle DAE+\angle CAD$(等式性质).

即 $\angle BAD=\angle CAE$.

在△BAD 和△CAE 中,$\begin{cases}AB=AC(\text{已证}),\\ \angle BAD=\angle CAE(\text{已证}),\\ AD=AE(\text{已证}).\end{cases}$

∴ $\triangle BAD\cong\triangle CAE(SAS)$. ∴ $BD=CE$(全等三角形对应边相等).

(2) ∵ $\triangle BAD\cong\triangle CAE$(已证), ∴ $\angle ABD=\angle ACE$(全等三角形对应角相等).

设 BD、CE 相交于点 M,BD、AC 相交于点 N.

在△CMN 中,$\angle CMN=180°-\angle NCM-\angle MNC$(三角形内角和定理).

又 ∵ $\angle MNC=\angle ANB$(对顶角相等),

∴ $\angle CMN=180°-\angle ABD-\angle ANB$(等量代换).

而在△ABN 中,$\angle BAN=180°-\angle ABN-\angle ANB$(三角形内角和定理).

∴ $\angle CMN=\angle BAN$(等量代换).

∵ $\angle BAN=90°$(已证), ∴ $\angle CMN=90°$(等量代换).

∴ $BD\perp CE$(垂直定义).

评注 本题利用计算两直线的夹角是 90°而证得两直线垂直,这是证明两直线互相垂直的基本方法之一.