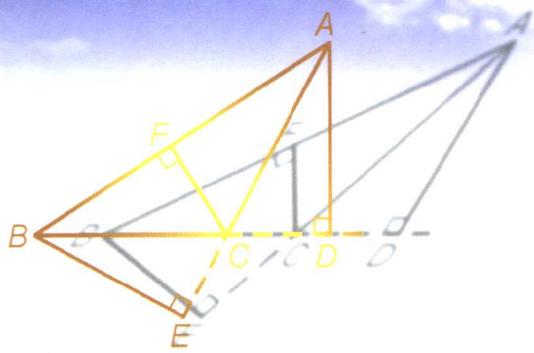


龙门考题

南秀全 主编

三角形和相似形

(修订版)



龙门书局

三角形和相似形



(修订版)

主 编 南秀全
本册主编 肖九河



龙门书局

版权所有 翻印必究

**本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。**

举报电话:(010)64033640 13501151303(打假办)

邮购电话:(010)64000246



(修订版)

三角形和相似形

南秀全 主编

责任编辑 王 敏 乌 云

龙门书局 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国人民解放军第 1201 工厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2002 年 3 月修 订 版 开本:890×1240 A5

2002 年 7 月第五次印刷 印张:8 1/2

印数:80 001~100 000 字数:314 000

ISBN 7-80160-126-2/G·162

定 价:9.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计 55 种,其中初中数学 12 种,高中数学 12 种,初中物理 5 种,高中物理 7 种,初中化学 4 种,高中化学 10 种,高中生物 5 种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“知识点精析与应用”着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“视野拓展”则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为“拓展”,但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行“3+X”高考模式以后,这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以“专”为先 本套书共计 55 种,你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆。

3. 省时增效 由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编 者

2001年11月1日

编委会

(初中数学)

(修订版)

总 策 划



策 划

龙门书局

主 编

南秀全

副 编

肖九河

付东峰

委 员

余曙光

黄振国

余石

南山

执行编委

王 敏

南 山

目 录

第一篇 基础篇	(1)
第一章 三角形	(2)
1.1 关于三角形的一些概念	(3)
1.2 三角形三条边的关系	(10)
1.3 三角形的内角和	(22)
1.4 全等三角形	(35)
1.5 三角形全等的判定(一)	(41)
1.6 三角形全等的判定(二)	(54)
1.7 三角形全等的判定(三)	(63)
1.8 直角三角形全等的判定	(73)
1.9 角的平分线	(81)
1.10 基本作图	(88)
1.11 作图题举例	(93)
1.12 等腰三角形的性质	(98)
1.13 等腰三角形的判定	(111)
1.14 线段的垂直平分线	(121)
1.15 轴对称和轴对称图形	(130)
1.16 勾股定理	(137)
1.17 勾股定理的逆定理	(147)
中考热点题型分析	(152)
第二章 相似形	(166)
2.1 比例线段	(166)
2.2 平行线分线段成比例定理	(174)

2.3 相似三角形	(189)
2.4 三角形相似的判定	(195)
2.5 相似三角形的性质	(210)
中考热点题型分析	(222)
第二篇 综合应用篇	(238)
一、几何分类与讨论	(238)
二、计算与证明	(240)
三、几何应用	(243)
四、方案设计	(244)
五、旋转、折叠问题	(245)
综合能力训练	(248)

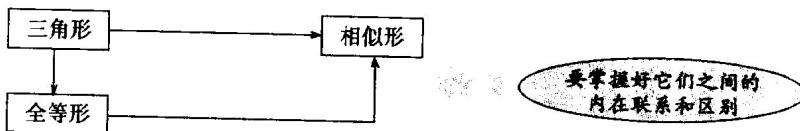
第一篇 基础篇

本书各章节知识在全国各地的中考试题中所占分数比例大约如下表：

内 容	三 角 形 全等三角形	等 腰 三 角 形	直 角 三 角 形	比 例 线 段	相 似 三 角 形
所占分数 百分 比	2.9% ~ 7.9%	2.5% ~ 5%	5.8% ~ 6.7%	1.3% ~ 2.5%	2.7% ~ 5.3%

三角形、相似三角形是几何知识的重要内容，从三角形这章开始，同学们开始学习几何命题的证明，而考查逻辑推理能力的题型在各地中考中属热点题型，这就要求我们一定要多加练习，积极思考。应加强训练

全书知识框图如下：



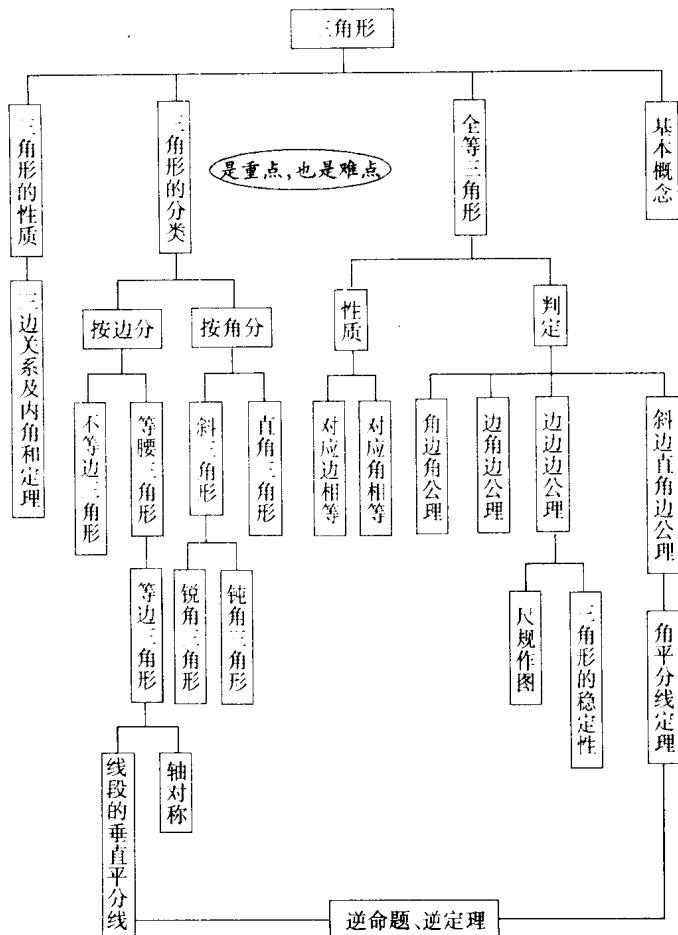
三角形的知识不仅是进一步学习四边形和圆的知识的基础，而且很多几何问题都要转化为三角形问题来处理。因此，学好本书的知识对今后的学习乃至将来的工作都会起到很重要的作用。

在相似形一章中，掌握学习方法比掌握某些具体知识更为重要，我们要遵循这一原则来学好本章知识。例如，直角三角形相似的判定定理，运用了代数方法来证明，即应用比例的性质和勾股定理、几何问题代数值法，这是一种重要的数学思想方法，体现了数形结合的思想，等等。



第一章 三角形

本章知识框图





1.1 关于三角形的一些概念

知识梳理

本节重点是正确理解三角形的边、顶点、内角、角平分线、中线、高的概念；难点是如何正确地画出三角形的角平分线、中线和高，并用符号语言表示一个三角形的三条主要线段：角平分线、中线、高。了解三角形的稳定性。

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 三角形的概念

由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫三角形。关于三角形的定义应掌握：

- (1) 三条线段；
- (2) 不在同一直线上的；
- (3) 首尾顺次相接；

以上三点表明三角形是封闭图形。如图 1-1 就不是三角形。

(4) 三角形的表示。

三角形有三条边，三个内角，三个顶点，每条边对的角是三角形内角，简称为角。通常用大写字母 A、B、C 表示顶点，如图 1-2，记该三角形为 $\triangle ABC$ 。每个内角在不发生混淆时记作 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ ，每个内角的对边用小写字母表示，如 a 、 b 、 c ，或用线段 BC 、 CA 、 AB 表示。

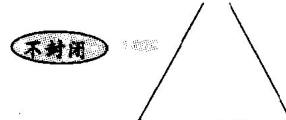


图 1-1

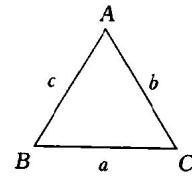


图 1-2

2. 三角形中的三种重要线段

三角形的角平分线、中线、高是三角形中的三种重要线段。

都是线段

(1) 三角形的角平分线：三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线。

注意：①三角形的角平分线是一条线段，可以度量，而角的平分线是经过角的顶点且平分此角的一条射线，不可度量。

②三角形有三条角平分线且相交于一点，这一点一定在三角形内部。

③三角形的角平分线画法与角平分线的画法相

同，可以用量角器画。要注意要求画哪个角平分线就画哪个角的平分线。如画 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD ，就应画 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线，其 D 点就是 $\angle A$ 的平分线与 BC 的交点。如图 1-3， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线就可表述为 AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D 或 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$ 。

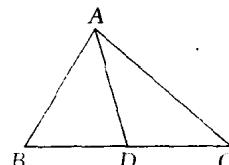


图 1-3

(2) 三角形的中线：在一个三角形中，连结一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线。

注意：①三角形有三条中线，且它们交于三角形内部一点；

关键是找中点

②画三角形中线时只需连结顶点及对边的中点即可，如图 1-4， D 为 BC 的中点， AD 就是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线。有时也可表述为 $BD = DC = \frac{1}{2} BC$ ，则 AD 就是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线。

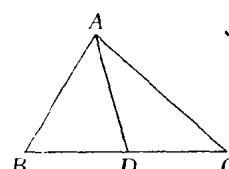


图 1-4

(3) 三角形的高线：从三角形一个顶点向它的对边作垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高线，简称三角形的高。

注意：①三角形的三条高是线段；

②三角形的三条高交于一点，锐角三角形的三条高都在三角形内部、三条高的交点也在三角形内部；如图 1-5，钝角三角形的高线中有两个垂足落在边的延长线上，这两条高落在三角形的外部，如图 1-6，高 AD 在 $\triangle ABC$ 的内部，高 BE 、 CF 在 $\triangle ABC$ 外部；在直角三角形中，有两条高恰好是它的两条直角边；

反之也成立

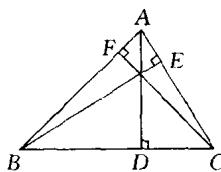


图 1-5

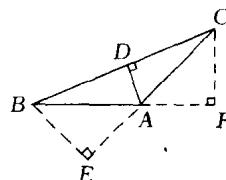


图 1-6

③画三角形的高时，只需要向对边或对边的延长线作垂线，连结顶点与垂足的线段就是该边上的高。如图 1-6， $AD \perp BC$ ， D 为垂足， AD 就是 BC 边上的高，同理 BE 是 AC 边上的高， CF 是 AB 边上的高；

④高与垂直、直角紧密相连,如图1-6,AD是BC边上的高,D为垂足,则 $AD \perp BC$, $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$.

3. 三角形的稳定性

三角形三边确定了,那么它的形状、大小都确定了,三角形的这个性质就叫三角形的稳定性.例如起重机的支架采用三角形结构就是这个道理.

【解题方法指导】

[例1] 如图1-7,

- (1) 图中有几个三角形?请把它们表示出来.
- (2) D为AC边上的中点,则AC边上的中线是哪条线段?

- (3) $\triangle ABF$ 的三个内角分别是什么?请表示出来.BF是哪个三角形的边?

- (4) F、E分别为BD、BC上的点,若 $\angle BAF = \angle DAF$,则AF是哪个三角形的角平分线?线段AE是什么?

解 (1) 图中有八个三角形,分别是 $\triangle ABF$ 、 $\triangle AFD$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle AFC$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BEF$ 、 $\triangle BDC$.

- (2) D为AC边上的中点,则AC边上的中线是线段BD.
- (3) $\triangle ABF$ 的三个内角分别是 $\angle BAF$ 、 $\angle ABF$ 、 $\angle AFB$,BF既是 $\triangle ABF$ 的一条边,也是 $\triangle BFE$ 的一条边.
- (4) 因为 $\angle BAF = \angle DAF$,所以AF是 $\triangle ABD$ 的角平分线.线段AE是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

说明 (1) 数一个图形中三角形的个数,通常固定一个顶点,变换另两个顶点,这样才能达到不重不漏,像第(1)小题中先固定A点数得六个三角形,再固定B点,数得二个三角形,共数得八个三角形.

(2) 一个图中给出的线段和角相等,应想到中点、中线、角平分线.如图1-7中若D为AC的中点,则BD为 $\triangle ABC$ 的中线,连结DE,则DE为 $\triangle AEC$ 中AC边上的中线;同样AF为 $\triangle ABD$ 的角平分线,则AE为 $\triangle ABC$ 的角平分线.这种转化思想,同学们一定要注意.

灵活运用

[例2] 如图1-8,填空

- (1) AD是 $\triangle ABC$ 的角平分线,则 $\angle \underline{\quad} = \angle \underline{\quad} = \frac{1}{2}\angle \underline{\quad}$.

- (2) AE是 $\triangle ABC$ 的中线,则 $\underline{\quad} = \underline{\quad} = \frac{1}{2}\underline{\quad}$.

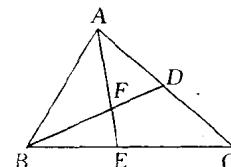


图1-7

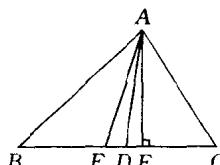


图1-8

(3) AF 是 $\triangle ABC$ 的高, 则 $\angle \underline{\quad} = \angle \underline{\quad} = 90^\circ$.

解 (1) AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 则 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$;

(2) AE 是 $\triangle ABC$ 的中线, 则 $BE = CE = \frac{1}{2} BC$;

(3) AF 是 $\triangle ABC$ 的高, 则 $\angle AFB = \angle AFC = 90^\circ$.

【达标跟踪训练】

一、判断题 (正确的打“√”, 错误的打“×”)

1. 三角形的高、中线是线段, 它的角平分线是射线. ()
2. 三角形的三条高线中, 至少有一条在三角形的内部. ()
3. 三角形的三条中线都在三角形内部. ()
4. 钝角三角形的三条角平分线在三角形的外部. ()
5. 在三角形中, 连结一个顶点和它对边中点的直线叫三角形的中线. ()

二、填空题

1. 如图 1-9,

(1) 图中共有 个三角形, 它们是

(2) 以 AD 为边的三角形有 .

(3) $\angle C$ 分别为 $\triangle AEC$ 、 $\triangle ADC$ 、 $\triangle ABC$ 中
____、____、____ 边的对角.

(4) $\angle AED$ 是____、____ 的内角.

(5) $\triangle AED$ 的三条边是____、____、____ 三内角是____、
____、____.

2. 如图 1-10,

(1) $AD \perp BC$, 垂足为 D , 则 AD 是____的高,
 $\angle \underline{\quad} = \angle \underline{\quad} = 90^\circ$.

(2) AE 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于 E 点, 则 AE
叫____, $\angle \underline{\quad} = \angle \underline{\quad} = \frac{1}{2} \angle \underline{\quad}$;
 AH 叫_____.

(3) 若 $AF = FC$, 则 $\triangle ABC$ 的中线是_____.

(4) 若 $BG = GH = HF$, 则 AG 是____的中线, AH 是____的中线.

三、选择题

1. 如图 1-11, 其中三角形的个数是 ()

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

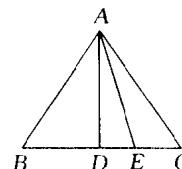


图 1-9

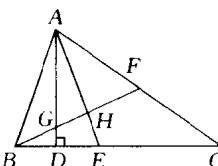


图 1-10

2. 三角形的角平分线是 ()

- A. 直线 B. 射线 C. 线段 D. 以上均不对

3. 如图 1-12, D 、 E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AC 、 BC 的中点, 则下列说法不正确的是 ()

- A. DE 是 $\triangle BDC$ 的中线 B. BD 是 $\triangle ABC$ 的中线
C. $AD = DC$, $BE = EC$ D. 图中 $\angle C$ 的对边是 DE

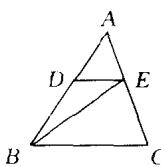


图 1-11

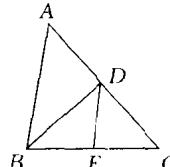


图 1-12

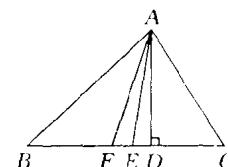


图 1-13

四、解答题

1. 任意画一个钝角三角形, 分别画出它的所有角平分线, 中线.

2. 如图 1-13, AD 是 $\triangle ABC$ 的高, AE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, AF 是 $\triangle ABC$ 的中线, 写出图中所有相等的角和相等的线段.

【答案与提示】

- 一、1. \times (三角形的角平分线也是线段) 2. \checkmark (锐角三角形的三条高在三角形内部, 直角三角形、钝角三角形分别有一条高在三角形内部) 3. \checkmark
4. \times (三角形三条角平分线一定在三角形内部) 5. \times (连结一个顶点和它对边中点的线段叫三角形的中线.)

注意

- 二、1. (1) 六, $\triangle BAD$, $\triangle BAE$, $\triangle BAC$, $\triangle DAE$, $\triangle DAC$, $\triangle EAC$;
(2) $\triangle ADB$, $\triangle ADE$, $\triangle ADC$; (3) AE , AD , AB ; (4) $\triangle AED$, $\triangle AEB$;
(5) AD , DE , EA , $\angle ADE$, $\angle DEA$, $\angle EAD$ 2. (1)
 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADE$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle AEC$ 、 $\triangle ADC$ 、 $\triangle ABC$, $\angle ADB$, $\angle ADC$;
(2) $\triangle ABC$ 的角平分线, $\angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC$, $\triangle ABF$ 的角平分线;
(3) BF ; (4) $\triangle ABH$, $\triangle AGF$

- 三、1. A ($\triangle ADE$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BDE$ 、 $\triangle BEC$ 共五个) 2.
C 3. D (在 $\triangle DEC$ 中, $\angle C$ 的对边是 DE , 在 $\triangle BDC$ 中, $\angle C$ 的对边是 BD , 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 的对边是 AB , 在复杂的图形中, 要指明在哪个三角形中的角及边.)

一定要牢记

四、1. 略 2. 相等的角有 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ 、 $\angle BAE = \angle CAE$ ，相等的线段有 $BF = EC$.

视野拓展

【释疑解难】

本节中最难理解的是直角三角形和钝角三角形的高.

1. 弄清三条高的位置

是画三角形高的关键

(1) 直角三角形的两条直角边是互相垂直的，所以两直角边就是它的高；

(2) 钝角三角形只有钝角的对边上的高在三角形内部，其余两边上的高均在三角形外部.

2. 会画三角形的三条高

(1) 直角三角形只需过直角顶点向斜边作垂线，垂足与直角顶点之间的线段就是斜边上的高，另两直角边分别是另两边上的高.

(2) 画夹钝角的两边上的高时，需注意是过哪一点作哪一边延长线的垂线. 如图 1-14 中， $\triangle ABC$ 是钝角三角形， $\angle BAC$ 是钝角，先画 $\angle BAC$ 的对边上的高 AD ，再画夹 $\angle BAC$ 的两边 AB 、 AC 上的高，画 AC 边上的高时，先延长 CA ，再过 B 点作 CA 的延长线上垂线 BE ；画 AB 边上的高时，先延长 BA ，再过 C 点作垂线 CF . 若垂足分别为 E 、 F ，则 BE 、 CF 分别为 CA 、 AB 边上的高.

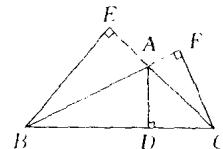


图 1-14

3. 画三角形的高线时注意标明直角符号和垂足

【典型例题导析】

[例 3] 三角形一边上的高

()

A. 在三角形的内部

B. 在三角形的外部

C. 在三角形的一边上

D. 以上三种情况都有可能

分析 锐角三角形三条高都在三角形内部，直角三角形斜边上的高在三角形内部，两条直角边分别是对边上的高，钝角三角形有一条高在三角形内部，两条高在三角形外部，故选 D.

[例 4] 已知：如图 1-15，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，周长为 16cm， AC 边上的中线 BD 把 $\triangle ABC$ 分成周长差为 2cm 的两个三角形. 求三角形 ABC 各边的长.

分析 BD 为 $\triangle ABC$ 的中线，故有 $AD = DC$ ， BD

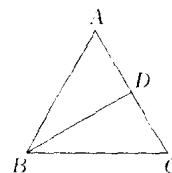


图 1-15

分 $\triangle ABC$ 的两个三角形 ABD 、 BDC' 的周长之差为 2cm , 题中并未给定是 $\triangle ABD$ 的周长 $- \triangle BDC'$ 的周长 $= 2\text{cm}$ 还是 $\triangle BDC'$ 的周长 $- \triangle ABD$ 的周长 $= 2\text{cm}$, 因此应分两种情况进行讨论.

(注意领会)

解 因为 $AD=DC'$,

(1) 当 $\triangle ABD$ 的周长 $- \triangle BDC'$ 的周长 $= 2\text{cm}$ 时, 即 $(AB+BD+AD)-(BC'+BD+CD)=AB-BC'+(AD-CD)=AB-BC'=2$ (1)

又 $AB+AC+CB=16$, 而 $AB=AC$, 故 $2AB+BC=16$ (2) 解(1)、(2)得 $AB=6$, $BC=4$.

此时 $\triangle ABC$ 各边的长为 $AB=AC=6\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$.

(2) 当 $\triangle BDC'$ 的周长 $- \triangle ABD$ 的周长 $= 2\text{cm}$ 时, 即 $BC'-AB+2$ (3)

$2AB+BC=16$ (4) 解(3)、(4)得 $BC'=\frac{20}{3}$, $AB=\frac{14}{3}$.

此时 $\triangle ABC$ 各边的长为 $AB=AC=\frac{14}{3}\text{cm}$, $BC=\frac{20}{3}\text{cm}$.

说明 本题渗透了分类讨论思想, 应考虑 $AB>BC$ 或 $BC>AB$ 两种情况(即周长之差为 2). 事实上, 在后面还要学到, 求得的 $\triangle ABC$ 的三边长是否符合题意, 本题两种结果都符合要求, 这一点将在后面讨论.

【思维拓展训练】

一、选择题

1. 如果一个三角形的三条高的交点恰是三角形的一个顶点, 那么这个三角形是 ()

A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 不能确定

2. 钝角三角形的高在形外的数目是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 已知一个三角形的周长为 15cm , 且其中的两边都等于第三边的 2 倍, 那么这个三角形最短边的长为 ()

A. 1cm B. 2cm C. 3cm D. 4cm

4. 至少有两条高在三角形内部的三角形是 ()

A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 以上都有可能

5. 下列说法中正确说法的个数是 ()

①钝角三角形有两条高在三角形内部

②三角形三条高至多有两条不在三角形内部

③三角形三条高的交点不在三角形内部, 就在三角形外部

④钝角三角形三内角的平分线的交点一定不在三角形内部

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个