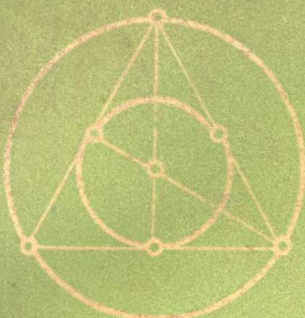
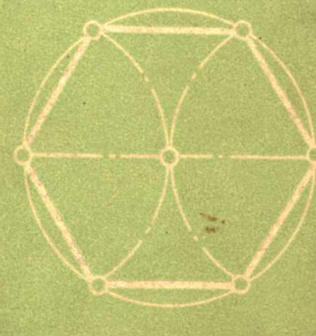


姜康甫 吉 星 编著

几何画的原理和作法



上海科学技术出版社

几何画的原理和作法

姜康甫　吉　星　編著

上海科学技术出版社

內容提要

本书就平面几何画的作法和原理作了比較全面的介紹，并着重說明各种画法的数学論証．可供制图教师及学生作参考．

本书初版于 1957 年，1963 年增补了几种常用曲綫及其切綫的作法和原理等内容，作第二版发行．

几何画的原理和作法

（第二版）

姜康甫 吉 星 編著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷六厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印张 9 20/32 排版字数 235,000

（原科技版印 5,200 册 1957 年 9 月第 1 版）

1959 年 6 月新 1 版印 2 次共印 2,500 册

1964 年 4 月第 2 版 1966年 1 月第 2 次印刷 印数 7,001—9,000

統一书号 13119·91 定价（科三）1.00 元

編者的話

随着祖國社会主义建設的需要,鑽研制圖的同志日益增多,大家都在尋求参考讀物,而一般的参考讀物中都是而且也应該是以画法为主,对于各种画法的原理很少全面介紹. 本書为了節省同志們的鑽研时間,着重闡明各种画法的数学論据,以供参考.

本書的特点:

(一) 編寫順序和一般制圖教材的系統基本吻合,以便于教师和学生参考.

(二) 每种画法都与数学的理論根据緊密結合,对于画法的正确性都作了証明或演算.

(三) 对同一种圖形的作法編撰的材料較多. 有的是搜集于他書,有的是作者的創作,有的是將既有的方法化繁为簡,以便讀者比較和选擇.

(四) 各章節后均举出作法的实用示例,并附有参考圖例.

由于作者的教学經驗及实际生產斗爭的經驗都还缺乏,書中缺点或錯誤的地方,倘希指正.

編　者 1957.

再版前言

本书自1957年9月初版以来，承各方对本书提出了許多宝貴意見，謹表謝意！

为了滿足讀者的需要，这次再版时，在原有版面的基础上作了部分增訂，除了增补几种常用曲綫及其切綫的作法和原理而外，幷充实了綫連接的部分內容。

虽然我們在本书內容上作了一定的充实和修訂，但缺点仍然是难免的，尙請讀者批評和指正。

姜康甫　吉　星　1963年12月修訂。

目　錄

第一章　圓周的等分和正多边形

圓周的等分和作正多边形法，在制圖中应用的地方是很廣泛的．如机械圖中的法蘭盤、离合器等，日常生活中所習見的國旗上的五角星、鐘表面等，及建筑器材中的瓷磚塊、窗花圖案等，常要用到圓周的等分或作正多边形法．

§1. 正多边形

(1·1) 正多边形定义

正多边形(又称正多角形)是由若干綫段首尾相連組成的平面封閉几何圖形．它必需具备两个条件：各边相等和各內角相等．

例如　矩形的各角都是 90°，但不是各边都相等；菱形的四边虽然相等，但不是各內角都相等，因此它們都不是正多边形．

(1·2) 正多边形和圓的关系

如果把圓分成 n 等分 $(n>2)$，則連接每相鄰两分点的 n 条弦可組成一个內接正 n 边形；切于各分点的 n 条切綫，可組成一个外切正 n 边形．反之，对于每一个正多边形，均可作其外接圓和內切圓．

例如　(I) 已知定圓 O，將圓周四等分，可作內接及外切于此圓的正四边形．

作法　(圖 1–1)

自圓心 O 作相互垂直的二直徑，$\overline{AC}$ 及 $\overline{DB}$．連 AB、BC、CD 及 DA，即得此圓的內接正四边形 $ABCD$．过 A、B、C、D 各点作圓 O 的切綫，則每

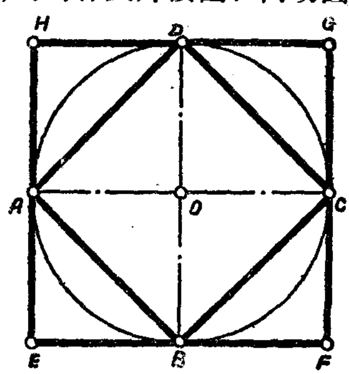


圖 1-1

两相鄰切綫分别相交于 E、F、G、H 各点，即得此圓的外切正四边形 $EFGH$.

例如 (II) 已知正三角形 ABC，可作 $\triangle ABC$ 的內切圓及外接圓.

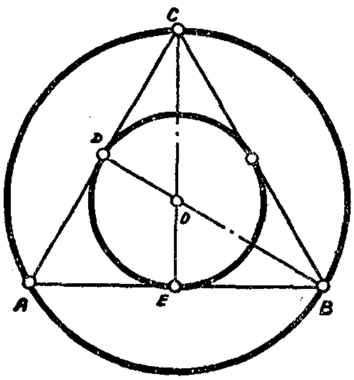


圖 1-2

作法 (圖 1-2)

分别自 $\angle B$ 及 $\angle C$ 的頂点 B 及 C 作对边的垂綫 $\overline{BD}$ 及 $\overline{CE}$ 相交于 O. 以 O 为圓心，$\overline{OE}=\overline{OD}$ 为半徑規圓，即得 $\triangle ABC$ 的內切圓. 若以 O 为圓心，$\overline{OC}=\overline{OB}$ 为半徑規圓，即得 $\triangle ABC$ 的外接圓.

(1·3) 正多边形的角度計算公式簡介

(I) 正 n 边多边形各內角和为：$(n-2)180^\circ$. 因自正 n 边多边形任一頂点引各頂点的連綫，必分此正多边形为 $(n-2)$ 个三角形. 而每个三角形的三內角和为 180°，則 $(n-2)$ 个三角形諸內角和必为 $(n-2)180^\circ$.

(II) 正 n 边多边形的一內角为：$\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$.

(III) 过正 n 边多边形任一頂点的半徑与相鄰一边的夾角为：$\dfrac{(n-2)180^\circ}{2n}$.（因正 n 边多边形的半徑平分頂角）.

(IV) 正 n 边多边形任意一边所对的中心角为：$\dfrac{360^\circ}{n}$.

(V) 正 n 边多边形任一內角与其任一边所对的中心角互补.

(VI) 正 n 边多边形任一外角与其任一边所对的中心角相等.

(1·4) 若圓周的 n 等分为可作，則圓周的 $n\cdot 2^m$ 等分亦为可作. (m 为 0 及自然数).

例如 (I) 圓周的三等分为可作，

則圓周的 3，→6，→12，→24.……等分亦为可作.

即$(3\cdot 2^0)$，→$(3\cdot 2)$，→$(3\cdot 2^2)$，→$(3\cdot 2^3)$，……$(3\cdot 2^m)$等分亦为可作.

(II) 圓周的四等分为可作，

則圓周的 4. →8，→16，→32，……等分亦为可作.

即$(4\cdot 2^0)$，→$(4\cdot 2)$，→$(4\cdot 2^2)$，→$(4\cdot 2^3)$，……$(4\cdot 2^m)$等分亦为可作.

(III) 圓周的五等分为可作，

則圓周的 5，→10，→20，→40，……等分亦为可作.

即$(5\cdot 2^0)$，→$(5\cdot 2)$，→$(5\cdot 2^2)$，→$(5\cdot 2^3)$，……$(5\cdot 2^m)$等分亦为可作.

(IV) 圓周的十五等分为可作，

則圓周的 15，→30，→60，→120，……等分亦为可作.

即$(15\cdot 2^0)$，→$(15\cdot 2)$，→$(15\cdot 2^2)$，→$(15\cdot 2^3)$，……$(15\cdot 2^m)$等分亦为可作.

上面所列举的圓周的 3,6; 4,8; 5,10 及 15 等分都是可以正确作圖的. 其余的等分圓周的方法，有的虽可正确作圖，但作法很繁，实际应用不多，(如圓周的 17 等分法等)，有的根本不能正确作圖，制圖中常采用近似作法. 今分别在以下各節中研究之.

§ 2. 圓周的三，六等分$(3\cdot 2^m)$及正三，六边形

(2·1) 分已知圓为三等分，作內接正三边形法

作法 (圖 2-1)

过圓心 O，作任意直徑 $\overline{3a}$，以 a 为圓心，$\overline{ao}$ 为半徑規弧交圓周于 1、2 两点，連接 1 2，2 3，3 1，則 △123 即为所求正三边形.

解說 若連 $o2$，$2a$ 則 $\triangle a\,o2$ 为等边三角形，$\therefore\ \angle ao2=60^\circ$，即 $\widehat{a2}=60^\circ$. 同理 $\widehat{a1}=60^\circ$，而 $\widehat{23}=\widehat{a3}-\widehat{a2}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. 同

理 $\overset{\frown}{13}=120°$. $\therefore$ $\overset{\frown}{12}=\overset{\frown}{23}=\overset{\frown}{31}=120°$. 故圆周被分为三等分，则 $\triangle 123$ 为内接正三边形.

(2·2) 已知一边，作正三边形法

作法 (圖 2–2)以已知边 $\overline{ab}$ 的两端点 a, b 各为圆心，以 $\overline{ab}$ 为

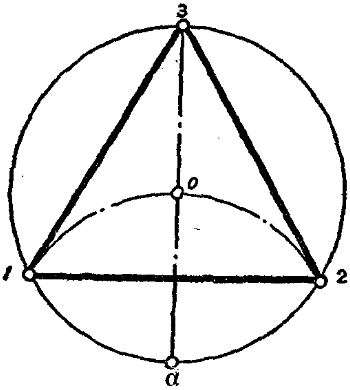


圖 2–1

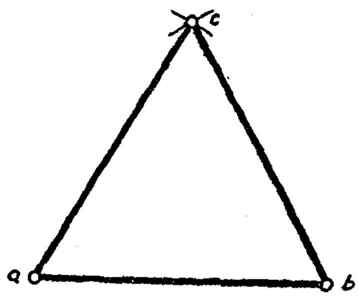


圖 2–2

半徑分别作弧，两弧相交于 c，連接 ac 及 bc，則 $\triangle abc$ 卽为所求正三边形.

解說 三边相等，三角必等，故为正三角形.

(2·3) 分已知圆为六等分，作內接正六边形法

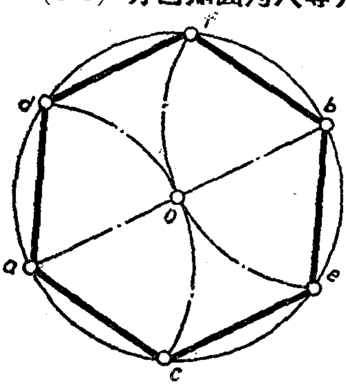


圖 2–3

作法 (圖 2–3)

过圆心 O 作任意直徑 $\overline{ab}$，以 a, b 各为圆心，以 $\overline{ao}$ 为半徑分別規弧交圆周于 c、d、e、f 各点，則 a、c、e、b、f、d 各点分圆周为六等分，依次連接各分点，則得內接正六边形 $acebfd$.

解說 若連 eo，則 $\triangle beo$ 为等边三角形，$\therefore$ $\overset{\frown}{be}=60°$. 同理 $\overset{\frown}{bf}$, $\overset{\frown}{ad}$, $\overset{\frown}{ac}$ 均为 $60°$. 又 $\overset{\frown}{ce}=180°-2\times 60°=60°$，同理 $\overset{\frown}{df}=60°$，故圆周被分为六等分，依次連接各分点．卽得所求正六边形.

(2·4) 已知一边，作正六边形法

作法　(圖 2-4)

以已知边 $\overline{ab}$ 的两端 a, b 各为圆心,以 $\overline{ab}$ 为半徑分別規 ac 及 bd 弧,两弧相交于 o,連接 ao 及 bo 并適当延長之,再以 o 为圓心,以 $\overline{ao}$ 为半徑,規圓与上述两延長綫交于 e, f 点;与 $\widehat{ac}$ 及 $\widehat{bd}$ 分别交于 c 及 d 点,依次連接各分点,卽得所求正六边形.

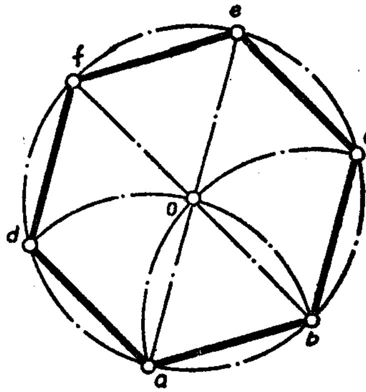


圖 2-4

解說　若連 oc,則 $\triangle obc$ 及 $\triangle oab$ 均为正三边形,$\therefore \widehat{ab}=\widehat{bc}=60^\circ$,那末 $\widehat{ce}=\widehat{ae}-(\widehat{ab}+\widehat{bc})=60^\circ$. 同理可証得 $\widehat{ad}=\widehat{df}=\widehat{fe}=60^\circ$,故輔助圓周被六等分,依次連接各分点,卽得所求正六边形.

(2·5) 用 30°—60° 三角板分圓周为三,六等分和作正三,六边形法

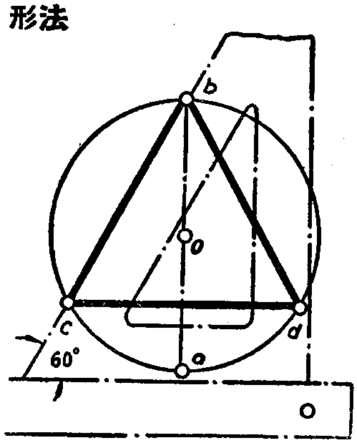


圖 2-5

(1) 已知圓 O,作內接正三边形法(圖 2-5)

作法　先在已知圓外平置丁字尺,过圓心 O,用 30°—60° 三角板作直徑 $\overline{ab}$ 垂直于丁字尺边緣. 平移三角板使斜边过 b 点,作 bc 弦. 翻轉三角板,使斜边过 b 点,作 bd 弦. 連接 cd,則 $\triangle bcd$ 为圓的內接正三边形.

解說　$\because \angle abc=\angle abd=30^\circ$,則 $\widehat{ac}=\widehat{ad}=60^\circ$,故 $\widehat{bc}=\widehat{bd}=120^\circ$. 所以,圓周被三等分.

(2) 已知一边 $\overline{ab}$,作正三边形法(圖 2-6)

作法　使丁字尺边緣平行于已知边 $\overline{ab}$. 使 30°—60° 三角板

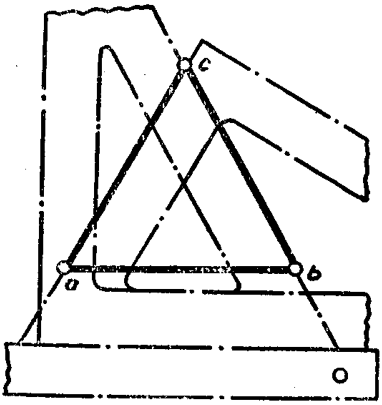


圖 2-6

斜边密合丁字尺，較短直角边过点 a 画直綫．然后轉移三角板如圖，使斜边过点 b 画直綫，两直綫相交于点 c，則 $\triangle abc$ 为所求正三边形．

解說　各內角均为 $60°$，故为等边三角形．

(3) 已知圓 O，作內接正六边形法(圖 2-7)

作法　过圓心 O 作直徑 $\overline{ab}$ 垂直丁字尺边緣．將三角板一直角边与丁字尺边緣密合．然后平移三角板使斜边分別过 a, o, b 三点画相平行直綫，則各平行直綫分別交圓周于 e, c, d 及 f 各点．連接 ec, cb, fd, da 則得所求內接正六边形．

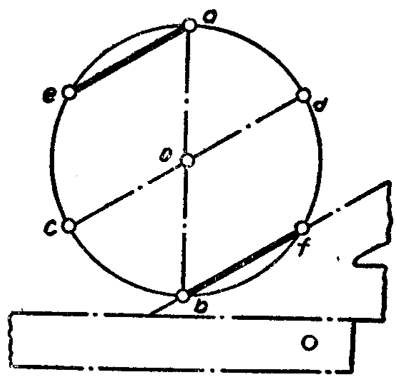


圖 2-7

解說　$\overset{\frown}{ad}=\overset{\frown}{cb}=60°$，又 $\angle eao=\angle aod=60°$，(內錯角相等)．$\therefore\ \overset{\frown}{eb}=120°$．而 $\overset{\frown}{ec}=\overset{\frown}{eb}-\overset{\frown}{cb}=120°-60°=60°$，$\therefore$ 各弧段均为 $60°$．

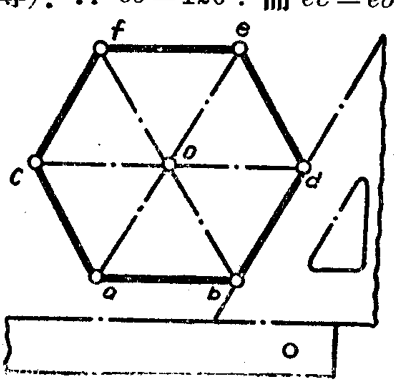


圖 2-8

(4) 已知一边 $\overline{ab}$，作正六边形法(圖 2-8)

作法　以丁字尺边緣密合(或平行)于 $\overline{ab}$，用三角板的較短直角边与丁字尺边緣密合，使斜边过 a 及 b 画綫 ae 及 bd．翻轉三角板同法画綫 ac 及 bf，ac 及

bf 相交于 O，平移丁字尺过 O 点画 $\overline{ab}$ 的平行綫交 ac 于 c，交 bd 于 d. 再使三角板之斜边过 c，作 $\overline{bd}$ 的平行綫交 bf 于 f，过 d 作 $\overline{ac}$ 的平行綫交 ae 于 e，連接 ef，則 $abdefc$ 为所求正六边形.

解說 顯然 $\triangle oab$ 为正三边形. 由于 $\overline{bd}\|\overline{ao}$, $\overline{od}\|\overline{ab}$ 則 $\triangle bod$ 亦为正三边形. 同理可証得其余諸三边形皆为正三边形. 則六边形 $abdefc$ 各边相等，各內角均为 $120°$，必为正六边形.

(5) 已知圓 O，作內接正十二边形法(圖 2-9)

作法 过圓心 O，作互垂二直徑 $\overline{ab}$ 及 $\overline{cd}$，將丁字尺边緣平行于 $\overline{cd}$ 置于圓外，使 $30°$—$60°$ 三角板的較長直角边密合于丁字尺，使其斜边过 O 点画直綫交圓周于 e, f，翻轉三角板同法作得 g, h. 然后再使較短直角边密合于丁字尺边緣，使其斜边过 O 点画直綫交圓周于 j, k，又翻轉三角板同法作得 m, n. 則圓上的各点分圓为 12 等分.

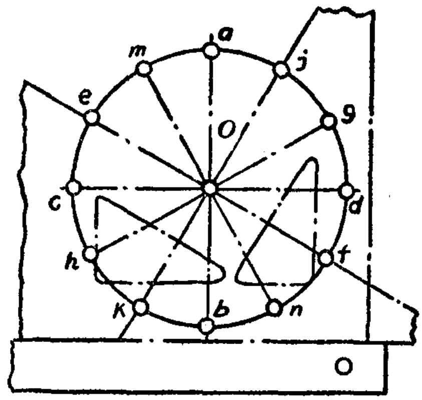


圖 2-9

解說 因为丁字尺边緣平行于 $\overline{cd}$，則 $\widehat{gd}=30°$, $\widehat{jd}=60°$，而 $\widehat{jg}=60°-30°=30°$. $\widehat{aj}=90°-60°=30°$. 同理可証得其余各弧段均为 $30°$，故圓被分为 12 等分.

(6) 已知一边，作正十二边形法(圖 2-10)

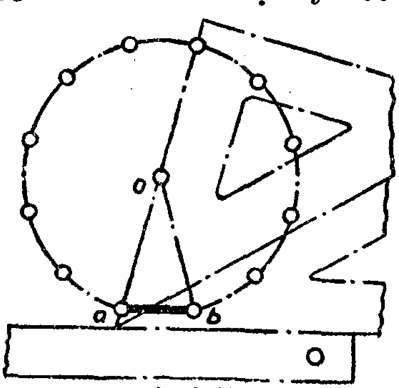


圖 2-10

作法 分别自已知边的两端 a, b 画与 $\overline{ab}$ 夾角为 $75°$ 的直綫(作 $75°$ 夾角可利用 $45°$ 及 $30°$ 三角板拼合而得)，此二直綫相交于 O，以 O 为圓心 $\overline{ao}=\overline{bo}$ 为半徑

规圆，若以 $\overline{ab}$ 为半徑遞截圓周，必得 12 个等分点．依次連接各分点，則得正十二边形．

解說 $\angle oba=\angle oab=75°$，則 $\angle aob=180°-75°\times 2=30°$，$\therefore \widehat{ab}=30°\left(\text{为圓周的 }\frac{1}{12}\right)$.

§ 3. 圓周的四，八等分 $(4\cdot 2^m)$ 及正四，八边形

(3·1) 分已知圓为四等分，作內接正四边形法

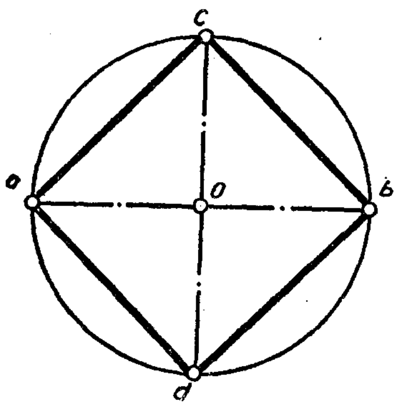


圖 3-1

作法 （圖 3-1）

过圓心 O，作相互垂直的二直徑，交圓周于 a, b, c, d 四点．依次連接各点，則成內接正四边形．

解說 各弧段皆为 90°．故 a, b, c, d 分圓为四等分．

(3·2) 已知一边，作正四边形法

作法 (1) （圖 3-2）

作已知边 $\overline{ab}$ 的中垂綫 of 交 $\overline{ab}$ 于 f，以 f 为中心，$\overline{bf}$ 为半徑作半圓交 of 于 O，連接 ao, bo 并延長之．以 O 为圓心，$\overline{ao}$ 为半徑，作圓分別交 $\overline{ao}$ 及 $\overline{bo}$ 的延長綫于 c 及 d 点，若依次連接 bc, cd, da，即得所求正四边形．

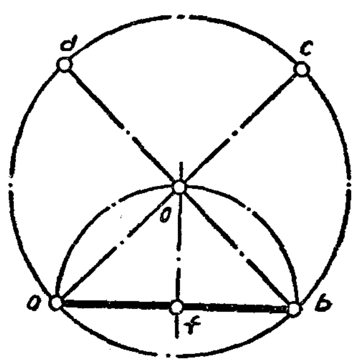


圖 3-2

解說 $\because \widehat{aob}$ 为半圓．$\therefore \angle aob=90°$，又因 $oa=ob$，故輔助圓必过 a 及 b．則 $\widehat{ab}=\widehat{bc}=\widehat{cd}=\widehat{da}=90°$

作法 (2) （圖 3-3）