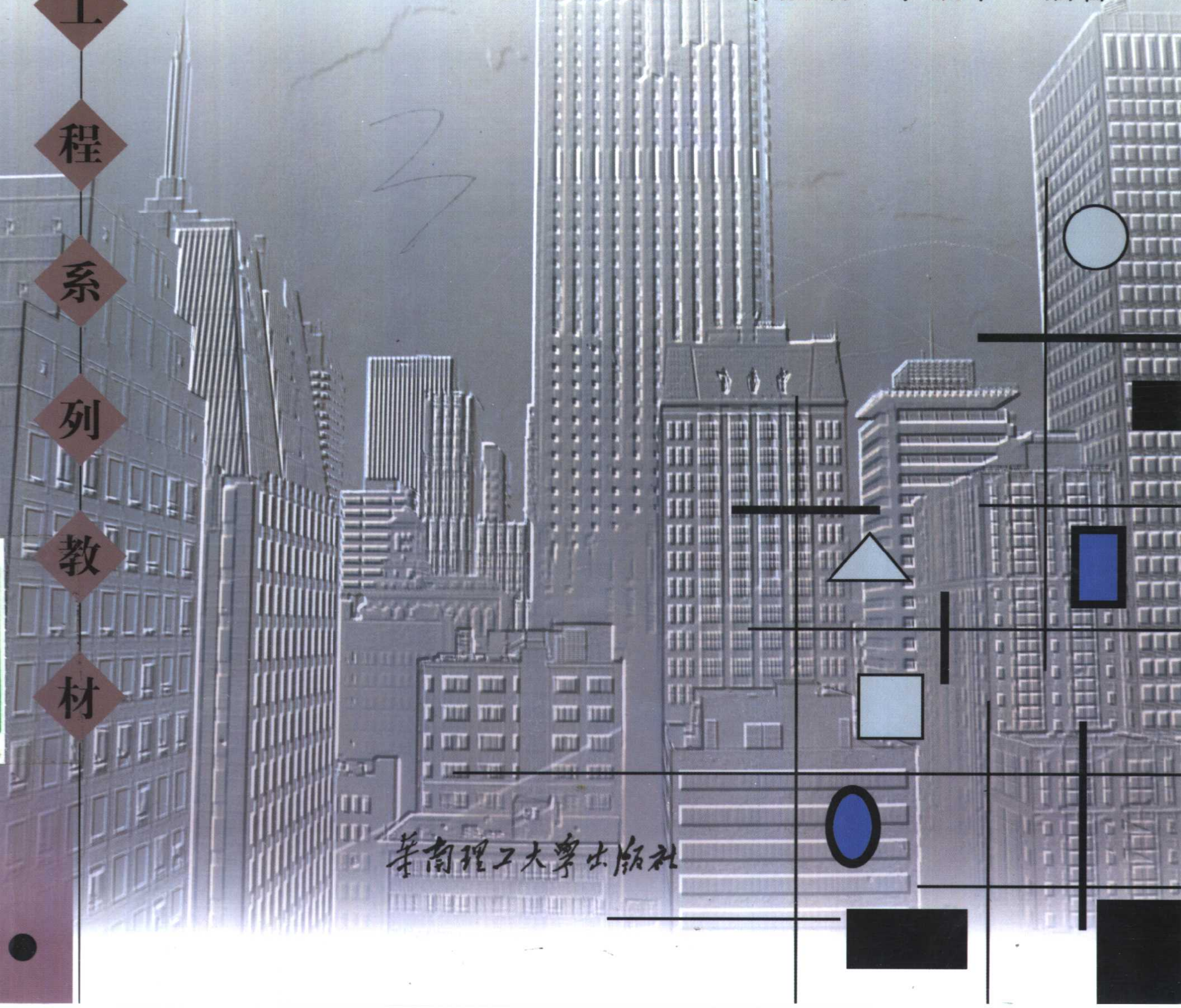
土木工程系列教材

有限元法基础与程序设计

王元汉　李丽娟　李银平　编著



华南理工大学出版社

土木工程系列教材

有限元法基础与程序设计

王元汉　李丽娟　李银平　编著

華南理工大學出版社
·广州·

内容提要

本书系华南理工大学出版社组织编写的“土木工程系列教材”之一，目的是使读者较好地掌握有限元法的基本原理、编程方法和在工程实际中的初步应用。

本书共9章，包括弹性力学平面问题的常应变单元、平面有限元法程序设计、高阶单元、空间问题、杆系结构、板的弯曲、动力问题、弹塑性问题的有限元法，最后介绍了大型通用有限元程序的使用和前后处理方法。

本书取材适宜，内容完整，简明易懂。在介绍有限元法原理的基础上，配备了各种问题的计算程序，便于应用和编程参考。各章还列举了丰富的算例和习题，便于理论的学习、理解。

本书可作为高等院校土木工程专业本科生的教材，同时可供其他专业的本科生和研究生选用，也可供有关工程技术人员和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法基础与程序设计/王元汉，李丽娟，李银平编著 .—广州：华南理工大学出版社，2001.2

ISBN 7-5623-1599-X

Ⅰ. 有…

Ⅱ. ①王… ②李… ③李…

Ⅲ. ①结构分析-有限元法 ②结构分析-程序设计

Ⅳ. O342

华南理工大学出版社出版发行

（广州五山 邮编 510640）

责任编辑 欧建岸

各地新华书店经销

中山市新华印刷厂印装

*

2001年2月第1版 2001年2月第1次印刷

开本：787×1092 1/16 印张： 13.5 字数： 324千

印数：1—3000册

定价：20.00元

前　言

随着计算技术的发展，有限元法在土木工程及其他许多工程领域中得到了越来越广泛的应用。有限元法研究对象广泛，不仅可解决杆系结构分析问题，而且能进行平面、空间连续体、板壳及各种复杂组合结构的计算；不仅可分析结构的弹性性能，而且能应用于弹塑性等复杂力学性能问题；不仅适用于静力分析，而且适用于动力分析。有限元法在许多领域取得了巨大的进展，利用它成功地解决了一大批有重大意义的实际问题。

有限元法的广泛应用要求正在从事和即将从事工程建设的技术人员、担任研究任务的科技人员能够较好地掌握有限元法的基本原理和编程技巧，以便能有效地利用现有结果和计算程序，并提高改进和发展新的数值方法。

本书正是为了适应上述要求，为土木工程及相近专业的本科生和研究生学习有限元法而编写的教材，目的是让读者通过学习，熟练掌握有限元法，并使之成为工程应用和科学研究的一个强有力的工具。

必须指出的是，有限元法作为一种数值计算工具，在应用于某一领域时，应先掌握该领域的基本理论。例如，如果用有限元法分析杆系结构，应先学习材料力学和结构力学；在分析平面和空间弹性体时，应先学习弹性力学；在应用于结构动力分析时，应先学习结构动力学；在应用于塑性分析时，应先学习塑性力学。掌握了有关基础理论，就不难按照“结构离散→单元分析→整体分析→解方程组”这一有限元法通用途径进行结构分析。

有限元法是一种理论性和实践性都很强的计算方法。在掌握基本理论的同时，还要提高手算和上机计算问题的能力。本书提供了不少例题和习题供读者练习，以便熟练掌握有限元法的原理和方法。同时，书中配备了不同问题的计算程序，这些程序可供直接上机使用，也可作为编程和扩展之用。源程序可通过 Email 提供，有兴趣的读者请与作者联系(yhwang@fm365.com 或 lilj@scnu.edu.cn)。

本书可作为土木工程专业 40 学时有限元法与程序设计课程教材，也可供一般工科专业本科生或研究生开设有限元法课程使用。教学内容可以根据教学时数及专业、层次的需要而适当取舍。

本书由华中科技大学王元汉教授、广东工业大学李丽娟教授、岳阳师范学院李银平老师共同编写，最后由王元汉教授统稿。本书在编写过程中得到了华中科技大学教务处、广东工业大学教务处、华南理工大学出版社的大力支持，以及研究生许迎年、尹一平、余飞、赵峰等同学的协助，本书部分工作得到广东省自然科学基金资助，在此一并表示诚挚的感谢。

限于作者水平，书中如有缺点、疏漏，敬请读者指正。

作　者

2000 年 6 月

编辑委员会

顾　问：

容柏生　（工程院院士、设计大师，广东省建筑设计研究院总工程师、高工）
何镜堂　（工程院院士、设计大师，华南理工大学教授、博导）
曾庆元　（工程院院士，长沙铁道学院教授、博导）
方秦汉　（工程院院士，华中科技大学教授、博导）
陈宗弼　（设计大师、高工，广东省建筑设计研究院副总工程师）
陈家辉　（高工，广东省建筑工程总公司总工程师）
江见鲸　（清华大学教授、博导，全国土木工程专业教学指导委员会副主任）
蒋永生　（东南大学教授、博导，全国土木工程专业教学指导委员会副主任）
沈浦生　（湖南大学教授、博导，全国土木工程专业教学指导委员会委员）
钟善桐　（哈尔滨工业大学教授、博导）
吴仁培　（华南理工大学教授）
姚玲森　（同济大学教授）
秦　荣　（广西大学教授、博导）
叶国铮　（广州大学教授）
卢　谦　（清华大学教授）

主　任：蔡　健

副主任：卫　军　张学文

委　员：（以姓氏笔划为序）

于　布　文鸿雁　王元汉　王仕统　王　勇　王祖华
邓志恒　叶伟年　叶作楷　刘玉珠　李汝庚　李丽娟
李惠强　杨小平　杨昭茂　杨　锐　张中权　张　原
吴瑞麟　陈存恩　陈雅福　陈超核　罗旗帜　周　云
金仁和　金康宁　资建民　徐礼华　梁启智　梁昌俊
覃　辉　谭宇胜　裴　刚　熊光晶

策划编辑：赖淑华　杨昭茂

项目执行：赖淑华

出版说明

为了适应高等学校专业调整后教学改革的需要，我社在华南理工大学土木工程系的协助下，组织出版这套适合大土木专业本科使用的“土木工程系列教材”。本系列教材按教育部颁布的专业目录中土木工程专业课程设置要求编写，以土木工程专业指导委员会 1999 年 10 月定稿的教学大纲为依据，立足华南，面向全国。整套书的编写讲求完整性和系统性，相关课程的内容经过充分的讨论，在此基础上进行了整合和优化，力求做到课程内容完整、信息量大。在参编作者的选择上尽量考虑中南地区的区域特色，也充分考虑了大土木专业的特点，以求本系列教材真正适合大土木专业的教学要求。

首批出版书目如下：

《土木工程材料》(陈雅福主编)

《土木工程测量》(刘玉珠主编)

《土力学》(杨小平主编)

《水力学》(于布主编)

《混凝土结构理论》(蔡健主编)

《混凝土结构设计》(王祖华主编)

《钢结构基本原理》(王仕统主编)

《钢结构设计》(王仕统主编)

《砌体结构》(卫军主编)

《土木工程荷载及设计方法》(张学文主编)

《高层建筑结构设计》(梁启智主编)

《土木工程施工》(叶作楷主编)

《土木工程项目管理》(李惠强主编)

《土木工程概预算》(张原主编)

《建筑结构选型》(张学文主编)

《钢-混凝土组合结构》(蔡健主编)

《基础工程》(杨小平主编)

《桥梁工程》(罗旗帜主编)

《道路勘察设计》(吴瑞麟主编)

《路基路面工程》(资建民主编)

《房屋建筑学》(裴刚　沈粤编著)

《土木工程防灾减灾学》(周云主编)

《有限元法基础与程序设计》(王元汉主编)

《结构分析的计算机方法》(王勇主编)

《国际工程合同管理》(李惠强主编)

首批教材侧重于专业技术基础课程，以后将在专业课程上加以拓展。

华南理工大学出版社

2001 年 2 月

目　　录

第 1 章　平面问题的常应变单元

1.1　弹性力学经典解法与有限元法的不同特点

1.1.1　弹性力学经典解法

弹性力学的任务是研究弹性体在外力作用下而产生应力、应变和位移的规律。解弹性力学问题，必须考虑平衡微分方程、几何方程、物理方程和边界条件。问题归结为偏微分方程的边值问题。

以平面弹性力学问题为例，弹性力学的基本方程共 8 个：2 个平衡方程，3 个几何方程，3 个物理方程。这 8 个基本方程中包含 8 个未知函数，即：2 个位移分量，3 个应变分量，3 个应力分量。基本方程的数目等于未知函数的数目。弹性力学的任务，就是在适当的边界条件下，从基本方程中求解这些未知函数。

弹性力学问题的基本解法有三种，即按位移求解、按应力求解和混合求解。用弹性力学经典解法解决实际问题的主要困难在于求解偏微分方程的复杂性。区域内各点的位移、应变、应力都是待求的，因此未知数有无穷多个。所求解满足弹性力学基本方程的位移函数、应变函数、应力函数的表达式要覆盖整个区域，而且还要满足边界条件，因此求解这样的函数形式是十分困难的。

1.1.2　有限元法

有限元法是近 40 年来随着电子计算机的广泛应用而发展起来的一种数值方法。它具有极大的通用性和灵活性，可以用来求解弹性力学中的各种复杂边界问题。

用有限元法分析弹性力学问题，首先是把原来连续的弹性体离散化。如图 1-1a 所示的悬臂梁，采用最简单的三角形单元对弹性体进行分割，形成一个如图 1-1b 所示的单元集合体。

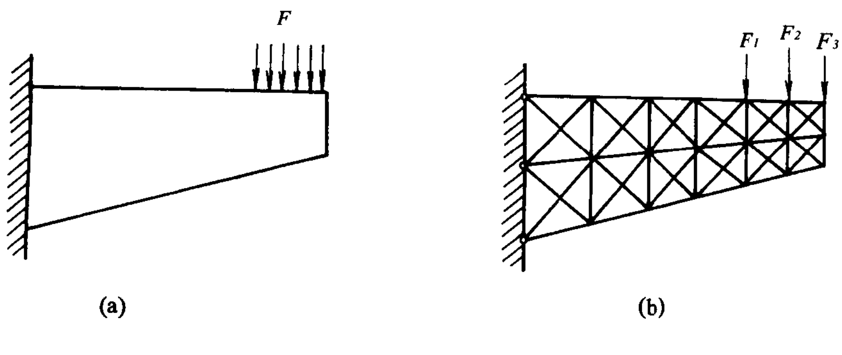


图 1-1　悬臂梁弹性体和有限元模型

对于每个三角形单元，可选择最简单的线性函数为位移模式，即分片插值的方法。单元中任一点的位移可通过 3 个结点的位移进行插值计算。因此，整个区域中无穷多个未知位移量可以用有限多个结点位移来表示。这样就避免了求解覆盖整个区域的位移函数的困难。

用三角形单元的结点位移，可以表示单元中的应变、应力、结点力。将各个单元集合成离散化的结构模型进行整体分析，问题最后归结为求解以结点位移为未知量的线性方程组。有限元法中求解这种线性方程组比弹性力学经典解法中求解偏微分方程要容易得多。

1.2 基本未知量和基本方程的矩阵表示

在有限元法中，为了简洁、清晰地表示各个基本量以及它们之间的关系，也为了便于应用计算机进行实际计算，广泛采用矩阵表示和矩阵运算。

在平面问题中，物体所受的体积力可用列阵表示为

$$\{p_{\mathrm{V}}\}=\begin{Bmatrix} p_{\mathrm{V}x} \\ p_{\mathrm{V}y} \end{Bmatrix}=[p_{\mathrm{V}x} \quad p_{\mathrm{V}y}]^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

式中上标 T 表示矩阵转置。

同样，物体所受的表面力可用列阵表示为

$$\{p_{\mathrm{S}}\}=[p_{\mathrm{S}x} \quad p_{\mathrm{S}y}]^{\mathrm{T}} \tag{1-2}$$

一点的位移可用列阵表示为

$$\{f\}=[u \quad v]^{\mathrm{T}} \tag{1-3}$$

一点的应变分量可用列阵表示为

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{1-4}$$

一点的应力分量可用列阵表示为

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{1-5}$$

由几何方程，式(1-4)所表示的应变分量可以写为

$$\{\varepsilon\}=\left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}} \tag{1-6}$$

弹性力学中，平面问题可划分为平面应力问题和平面应变问题。对于弹性力学的平面应力问题，物理方程可用矩阵形式表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \text{对} & \\ \mu & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1-7}$$

式中 E、μ 分别为弹性模量和泊松比。上式可简写为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{1-8}$$

其中

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \text{对} & \\ \mu & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

称为平面应力问题的弹性矩阵。对于平面应变问题，物理方程也可以用式(1-8)表示，但需将式(1-9)所示的弹性矩阵$[D]$中的 E 换为$\dfrac{E}{1-\mu^2}$，μ 换为$\dfrac{\mu}{1-\mu}$。

1.3　位移模式

图 1-1 所示弹性体用三角形单元进行离散以后，取任一单元进行分析。图 1-2 表示一个典型的三结点三角形单元，其结点 i，j，m 按逆时针方向排列。每个结点位移在单元平面内有两个分量：

$$\{\delta_i\} = [u_i \quad v_i]^{\mathrm{T}} \quad (i,\ j,\ m) \tag{1-10}$$

式中 u_i，v_i 为结点 i 的沿 x 轴和 y 轴方向的位移分量。记号(i, j, m)表示其他结点的位移可以按下标 i，j，m 轮换得到。

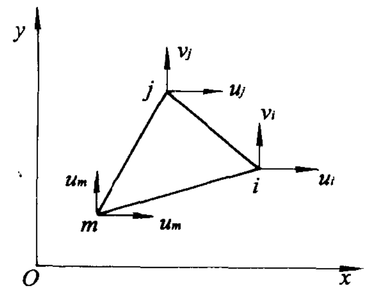


图 1-2　三角形单元的结点位移

一个三角形单元有 3 个结点，共有 6 个结点位移分量。它们可用列阵表示为

$$\{\delta\}^e = [\delta_i^{\mathrm{T}} \quad \delta_j^{\mathrm{T}} \quad \delta_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^{\mathrm{T}} \tag{1-11}$$

单元体中任意一点的位移分量是 x，y 的函数。选择最简单的线性函数作为位移模式，即

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \tag{1-12}$$

式中 α_1，α_2，…，α_6 为待定常数，可以由单元的结点位移确定。

设结点 i，j，m 的坐标分别为(x_i, y_i)、(x_j, y_j)、(x_m, y_m)，结点位移为(u_i, v_i)、(u_j, v_j)、(u_m, v_m)。将它们代入式(1-12)，有

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \qquad & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m & v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{aligned} \tag{1-13}$$

联立求解上述公式左边的 3 个方程，可以求出待定系数 α_1，α_2，α_3 为

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix} \quad \alpha_3 = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix} \tag{1-14}$$

式中 A 为三角形单元 ijm 的面积，

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{1-15}$$

为使求得面积的值为正值，结点 i，j，m 的次序必须是逆时针转向，如图 1-2 所示。至于将哪个结点作为起始结点 i，则没有关系。

将式(1-14)代入式(1-12)的第一式，整理后得

$$u=\frac{1}{2A}[(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+c_my)u_m] \tag{1-16a}$$

同理可得

$$v=\frac{1}{2A}[(a_i+b_ix+c_iy)v_i+(a_j+b_jx+c_jy)v_j+(a_m+b_mx+c_my)v_m] \tag{1-16b}$$

式中

$$\begin{aligned} a_i &= x_jy_m + x_my_j \\ b_i &= y_j - y_m \qquad (i,j,m) \\ c_i &= -x_j + x_m \end{aligned} \tag{1-17}$$

如令

$$N_i=\frac{1}{2A}(a_i+b_ix+c_iy) \quad (i,j,m) \tag{1-18}$$

则位移模式(1-16)可以简写为

$$u=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m \quad v=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m \tag{1-19}$$

式中 N_i，N_j，N_m 是坐标的函数，反映了单元的位移形态，因而称为位移函数的形函数。其性质将在下面进一步讨论。

由式(1-19)和(1-3)，单元中一点的位移可用结点位移表示为下列矩阵形式

$$\{f\}=[N]\{\delta\}^e \tag{1-20}$$

式中[N]称为单元形函数矩阵，其维数为 2×6，进一步可写为分块形式

$$[N]=[N_i \quad N_j \quad N_m] \tag{1-21}$$

其中子矩阵

$$[N_i]=\begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}=N_iI \quad (i,j,m) \tag{1-22}$$

式中 I 为2阶单位矩阵。

根据形函数的定义式(1-18)，容易证明形函数具有以下性质：

(1)形函数 N_i 在结点 i 上的值等于1，在其他结点上的值等于0，即

$$N_i(x_i,y_i)=1 \quad N_i(x_j,y_j)=0 \quad N_i(x_m,y_m)=0$$

对于 N_j，N_m 也有同样的表达式。

(2)在单元中任一点，三个形函数之和等于1，即

$$N_i(x,y)+N_j(x,y)+N_m(x,y)=1$$

(3)在三角形单元边界 ij 上一点(x，y)，有形函数公式

$$N_i(x,y)=1-\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad N_j(x,y)=\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad N_m(x,y)=0$$

(4)形函数 N_i 在单元上的面积分和边界 ij 上的线积分公式为

$$\iint_A N_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{A}{3} \qquad \int_{ij}N_i\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\overline{ij} \tag{1-23}$$

式中$\overline{ij}$为 ij 边的长度。

1.4　单元应变和应力

有了单元的位移模式，就可以应用几何方程求得单元的应变。将式(1-16)代入式(1-6)，得到应变和结点位移的关系式

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{cc:cc:cc} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \hdashline u_j \\ v_j \\ \hdashline u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \tag{1-24}$$

上式简写为

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^{e} \tag{1-25}$$

式中$[B]$为单元应变矩阵，其维数为 3×6。它可以写成分块形式

$$[B] = [B_i \quad B_j \quad B_m]$$

其中子矩阵

$$[B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \tag{1-26}$$

式(1-24)是用结点位移表示的单元应变的矩阵方程。由于 A，b_i，c_i，b_j，c_j，b_m，c_m 与 x，y 无关，都是常量，因此$[B]$矩阵也是常量。单元中任一点的应变分量是$[B]$矩阵与结点位移的乘积，因而也都是常量。因此，这种单元被称为常应变单元。

在平面问题的物理方程式(1-7)中，将式(1-25)代入，得

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^{e} \tag{1-27}$$

上式也可写为

$$\{\sigma\} = [S]\{\delta\}^{e} \tag{1-28}$$

这就是应力与结点位移的关系式。其中$[S]$称为单元应力矩阵，并且

$$[S] = [D][B] \tag{1-29}$$

因为$[D]$是 3×3 矩阵，$[B]$是 3×6 矩阵，因此$[S]$也是 3×6 矩阵。它可写为分块形式

$$[S] = [S_i \quad S_j \quad S_m] \tag{1-30}$$

由式(1-9)所表示的平面应力问题的弹性矩阵，以及由式(1-26)所表示的应变矩阵，可得式(1-30)中应力矩阵的子矩阵

$$[S_i] = [D][B_i] = \frac{E}{2(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \tag{1-31}$$

对于平面应变问题，只要将上式中的 E 换成$\frac{E}{1-\mu^2}$，μ 换成$\frac{\mu}{1-\mu}$，就得到应力矩阵的子矩阵

$$[S_i]=\frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)A}\begin{bmatrix} b_i & \frac{\mu}{1-\mu}c_i \\ \frac{\mu}{1-\mu}b_i & c_i \\ \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_i & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_i \end{bmatrix} \quad (i,j,m) \tag{1-32}$$

由于同一单元中的$[D]$、$[B]$矩阵都是常数矩阵，所以$[S]$矩阵也是常数矩阵。也就是说，三角形三结点单元内的应力分量也是常量。当然，相邻单元的 E，μ，A 和b_i，$c_i(i,j,m)$一般是不完全相同的，故它们将具有不同的应力，这就造成在相邻单元的公共边上存在着应力突变现象。但是随着网格的细分，这种突变将会迅速减小，有限元法的解答将收敛于正确解答。

1.5 单元平衡方程

有限元法的任务是要建立和求解整个弹性体的结点位移和结点力之间关系的平衡方程。为此首先要建立每一个单元体的结点位移和结点力之间关系的平衡方程。本节先讨论单元的应变能和外力势能的计算公式，再建立单元总势能泛函的表达式，利用变分原理或最小势能原理，求总势能泛函的极值，最后得到单元的平衡方程。

1.5.1 单元的应变能

在平面应力状态下，厚度为 h 的三角形单元的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\iint_A(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\iint_A\{\sigma\}^{\mathrm{T}}\{\varepsilon\}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

将式(1-25)和(1-27)代入上式，应用矩阵的运算法则，并注意到弹性矩阵$[D]$的对称性，有

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\iint_A\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon\}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\iint_A\{\delta\}^{e\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\{\delta\}^e h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

由于$\{\delta\}^e$和$\{\delta\}^{e\mathrm{T}}$是常量，因此可以提到积分号的外面，所以

$$U=\frac{1}{2}\{\delta\}^{e\mathrm{T}}\left(\iint_A[B]^{\mathrm{T}}[D][B]h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\{\delta\}^e$$

令

$$[k]=\iint_A[B]^{\mathrm{T}}[D][B]h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1-33}$$

从而单元的应变能可写成

$$U=\frac{1}{2}\{\delta\}^{e\mathrm{T}}[k]\{\delta\}^e \tag{1-34}$$

1.5.2 单元的外力势能

单元受到的外力通常包括体积力、表面力和集中力。设单位体积中的体积力 $\{p_V\}$ 如式(1-1)所示。注意到式(1-20)，单元上体积力具有的势能为

$$
\begin{aligned}
V_V &= -\iint_A \{f\}^T\{p_V\}h\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iint_A ([N]\{\delta\}^e)^T\{p_V\}h\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\{\delta\}^{eT}\iint_A [N]^T\{p_V\}h\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

单元上的表面力可能有分布载荷如风力、压力，以及相邻单元互相作用的内力。由于单元之间公共边上互相作用的内力成对出现，集合时互相抵消，故在进行弹性体整体分析时可以不加考虑，因此亦可在进行单元特性分析时就不予考虑。这样，把表面力看作仅包含弹性体外边界上的分布载荷并不影响计算结果。设单位边界长度上所受到的表面力如式(1-2)所示，则单元表面力的势能为

$$
\begin{aligned}
V_S &= -\int_l \{f\}^T\{p_S\}h\mathrm{d}l \\
&= -\{\delta\}^{eT}\int_l [N]^T\{p_S\}h\mathrm{d}l
\end{aligned}
$$

式中 l 表示单元的边界长度。

如果弹性体受到集中力，通常在划分单元网格时可将集中力的作用点设置为结点。于是单元集中力的势能是

$$V_C = -\{\delta\}^{eT}\{P_C\}^e$$

综合以上诸式，单元外力的势能为

$$
\begin{aligned}
V &= V_V + V_S + V_C \\
&= -\{\delta\}^{eT}\left(\iint_A [N]^T\{p_V\}h\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_l [N]^T\{p_S\}h\mathrm{d}l + \{P_C\}^e\right)
\end{aligned}
\tag{1-35}
$$

如果引进单元体积力的等效结点力

$$\{P_V\}^e = \iint_A [N]^T\{p_V\}h\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-36}$$

单元表面力的等效结点力

$$\{P_S\}^e = \int_l [N]^T\{p_S\}h\mathrm{d}l \tag{1-37}$$

则单元总的等效结点力为

$$\{F\}^e = \{P_V\}^e + \{P_S\}^e + \{P_C\}^e \tag{1-38}$$

因此，单元外力势能式(1-35)可写为

$$V = -\{\delta\}^{eT}\{F\}^e \tag{1-39}$$

1.5.3 单元的总势能泛函和最小势能原理

由单元的应变能和外力势能，可得单元的总势能泛函的表达式

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e - \{\delta\}^{eT}\{F\}^e \tag{1-40}$$

若取结点位移为未知量，从弹性力学最小势能原理出发，总势能的极值问题就变成了一个多元函数的极值问题。根据总势能求极值的条件，应有

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}^e}=0$$

将式(1-40)代入上式，可得单元平衡方程

$$[k]\{\delta\}^e=\{F\}^e \tag{1-41}$$

这就建立了单元结点力与结点位移之间的关系。

1.6 单元刚度矩阵

在式(1-33)定义的单元刚度矩阵公式中，[B]是一个 3×6 的矩阵，$[B]^T$ 是一个 6×3 的矩阵，[D]是一个 3×3 的矩阵，因此[k]是一个 6×6 的矩阵。对于三结点三角形单元，应变矩阵[B]是常数矩阵，同时弹性矩阵[D]也是常数矩阵，于是式(1-33)可以化简为

$$[k]=[B]^T[D][B]hA \tag{1-42}$$

式中 A 表示三角形单元的面积。

将式(1-9)和 (1-26)代入上式，即得平面应力问题的三结点三角形单元刚度矩阵。写成分块形式，有

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \tag{1-43}$$

式中子矩阵为 2×2 矩阵，对于平面应力问题，有

$$[k_{rs}]=[B_r]^T[D][B_s]hA=\frac{Eh}{4(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} b_rb_s+\frac{1-\mu}{2}c_rc_s & \mu b_rc_s+\frac{1-\mu}{2}c_rb_s \\ \mu c_rb_s+\frac{1-\mu}{2}b_rc_s & c_rc_s+\frac{1-\mu}{2}b_rb_s \end{bmatrix}$$

$$(r,s=i,j,m) \tag{1-44}$$

对于平面应变问题，须将上式中的 E 换为$\frac{E}{1-\mu^2}$，μ 换为$\frac{\mu}{1-\mu}$，于是有

$$[k_{rs}]=\frac{E(1-\mu)h}{4(1+\mu)(1-2\mu)A}\begin{bmatrix} b_rb_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_rc_s & \frac{\mu}{1-\mu}b_rc_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_rb_s \\ \frac{\mu}{1-\mu}c_rb_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_rc_s & c_rc_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_rb_s \end{bmatrix}$$

$$(r,s=i,j,m) \tag{1-45}$$

单元刚度矩阵具有以下的性质:

(1) 单元刚度矩阵中每个元素有明确的物理意义。例如，k_{mn}表示当单元第 n 个自由度产生单位位移，而其他自由度固定时，在第 m 个自由度产生的结点力。

(2) [k]是对称矩阵。由[k_{rs}]的表达式，可见$[k_{rs}]=[k_{sr}]^T$，由此可知[k]具有对称性。

(3) [k]的每一行或每一列元素之和为零，因此[k]为奇异矩阵。这个性质也是显然