现代数学丛书

典型流形与典型域

陆启铿 著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

典型流形与典型域

陆启铿 著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是現代数学丛书中的一种，是我国数学家在多复变数函数論研究中有关于几何理論方面的創作的系統总結。內容包括典型流形，超圓与典型域，橢圓几何与双曲几何，解析不变量及其应用，对称典型域的边界之几何性质及其应用，典型域的調和函数論等六章，另附两篇关于微分流形及矩陣的附录。供高等学校数学系高年級学生、研究生及这方面的数学工作者参考。

現代数学丛书

典型流形与典型域

陆启鏗 著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 12 6/32　排版字数 275,000
1963年5月第1版　1963年5月第1次印刷　印数 1—3,900（其中精装100册）

統一书号 13119·507　定价(十四) 2.05元

序

本书最初是作为北京大学数学系多复变数函数論专門化課程的讲义之一部分而編写的，曾于1961～1962年間在該校数学系六年級这一专門化的同学中讲授；后来重新改写作为在廈門大学讲学的讲义。

本书内容的大部分是我国数学工作者在多复变数函数論方面創作的总結，但也有一部分是国外重要的成果，或受此影响而得到的一些結果。当然，这里远不是包括我国在这方面的全部工作，而仅偏重于与几何有关的方面。特别是华罗庚教授已經把他解放以后至1957年以前的这方面的丰富成果总結在他的著作《多复变数函数論中的典型域的調和分析》内；这里多半只叙述在这以后的一些发展。讀者仍将会看到，这些发展与华罗庚教授已往的工作有着密切的关系。

本书假定讀者已讀过拙著《多复变数函数引論》一书，或已有相当于該书的多复变数函数論知識；还假定讀者已知道一些初步的矩陣論和集合拓扑的初等概念。除此以外所需的数学知識，为了便利讀者，书末有附录可供参閱。

作者得到陆汝鈐和弓惠生同志帮助校閱，謹在此表示謝意。

目　　录

第一章 典型流形

我們称一微分流形为一典型流形，如果它容許一可递的典型群．这种流形是很多的，但我們只有兴趣于与多复变数函数論有关的复典型流形．当然，一些实的典型流形也将不可避免地要討論，因为它們在研究多复变数函数的性质时必須要涉及到(参閱第五章)．另外，如果我們所使用的方法可以应用于某些实的情形，我們将随时附带提出(参閱§6·4)．

本章主要討論如何引进n个复变数空間C^n的无穷远点．在单复变数函数論中，我們为了要討論函数在无穷远的性质，实际上有需要引进无穷远点；多复变数函数論亦然．要使得研究单复变数函数在复平面上任一点(包括无穷远点)的性质都同样方便，自然地要求引进了无穷远点以后的空間(或称复平面C^1的扩充了的空間)是齐性的(或称可递的)，即对扩充空間的任一点最少有一变換把此空間一一地映为自己，而把此点映到空間的一固定点．此外，复变数函数論主要是研究函数的解析性，我們自然地要求上述的变換能使解析性保持不变，这首先要扩充后的空間是一复流形，其次要变換本身也是解析的．由于单复变数的无穷远只看作是一点，这样的变換必定是下面的形式：

$$w=\frac{a+bz}{c+dz},\qquad ad-bc\neq 0,$$

因为在整个平面(包括无穷远点)解析而只有一个零点与极点(这是由变换的一一性得知的)的函数，必定是这种形式．这是复投影变换群，而扩充的空間是一維复投影空間．这是唯一的引进无穷远点的方法．

在多复变数空間的无穷远点并不止一点，虽然它們作为有限远点的极限点必然是較低維的点集。但引进的方法可以有很多，例如最簡单的是利用变换

$$w_\alpha=\frac{a_\alpha+b_\alpha z_\alpha}{c_\alpha+d_\alpha z_\alpha},\qquad a_\alpha d_\alpha-b_\alpha c_\alpha\neq 0\quad(\alpha=1,\cdots,n).$$

即若有一 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 点使得有一个 $c_\alpha+d_\alpha z_\alpha=0$，对应的 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 点便是无穷远点．这是把无穷远点看作 n 个 $n-1$ 維复解析平面，扩充空間是 n 个一維复投影空間的拓扑积．我們也可以利用变换

$$w_\alpha=\frac{a_{0\alpha}+a_{1\alpha}z_1+\cdots+a_{n\alpha}z_n}{a_{00}+a_{10}z_1+\cdots+a_{n0}z_n}\quad(\alpha=1,\cdots,n),$$

$$\det\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}&\cdots&a_{0n}\\a_{10}&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n0}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\neq 0$$

来引进无穷远点．即若 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 点使得

$$a_{00}+a_{10}z_1+\cdots+a_{n0}z_n=0,$$

对应的 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 点是无穷远点．这是把无穷远点看作一个 $n-1$ 維复解析平面，扩充空間是 n 維复投影空間．但除此以外，构造扩充空間的方法可以有很多，并且我們也可以只引进一部分无穷远点，而不是引进全部的无穷远点．这問題可归結为构造一些空間具有下列的性质：

(i) 它是一复解析流形;

(ii) 它容許一可递的解析自同胚群(即成一齐性的复流形);

(iii) 它可以用有限多个坐标邻域盖过. 此外,它最多除了一些較低維点集以外,可以选定一个坐标邻域盖过,而此例外点集的点可称之为"无穷远点".

下面我們介紹一些构造此等流形的方法. 这些流形皆是典型的复流形. 如讀者对流形的概念不够熟悉,可先参閱附录 I.

§ 1·1 Grassmann 流形

命 $E(m;n)$ 代表所有 $m\times(m+n)$ 矩陣

$$\mathfrak{Z}=\begin{pmatrix} \mathfrak{z}_{11} & \mathfrak{z}_{12} & \cdots & \mathfrak{z}_{1,m+n} \\ \mathfrak{z}_{21} & \mathfrak{z}_{22} & \cdots & \mathfrak{z}_{2,m+n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{z}_{m1} & \mathfrak{z}_{m2} & \cdots & \mathfrak{z}_{m,m+n} \end{pmatrix}$$

的集合,此等矩陣之秩皆为 m 者. 显然的,$E(m;n)$ 是 $C^{m(m+n)}$ 空間的一个开子集,因此自然地具有一拓扑(相对拓扑). $E(m;n)$ 的点即秩为 m 的 $m\times(m+n)$ 矩陣 $\mathfrak{Z}$.

在不致产生誤会时,我們有时簡单地以 E 代表 $E(m;n)$.

显然,E 經下列的变换一一地映为自己:

$$\mathfrak{W}=A\mathfrak{Z}B, \tag{1·1·1}$$

其中 A 是 $m\times m$ 非异方陣,B 是 $(m+n)\times(m+n)$ 非异方陣.

現在把 E 的点分为等价类如下: E 中的两点 $\mathfrak{Z}_1$ 与 $\mathfrak{Z}_2$ 称为等价,以 $\mathfrak{Z}_1\sim\mathfrak{Z}_2$ 表之,如果存在一非异的 $m\times m$ 方陣 Q,使得

$$\mathfrak{Z}_1=Q\mathfrak{Z}_2.$$

易見这里定义的等价确实满足等价关系所需的条件．我們把 E 分为一些子集，使得 E 的每一点必属于并且只属于一个子集，E 的两点同属于一个子集的充要条件为此两点彼此等价．这样的子集称为等价类．

把 E 的每一等价类看作一点，如是得一空間 $\mathfrak{P}(m;n)$，这是等价类的集合．在不致发生誤会时我們簡书之为 $\mathfrak{P}$．

有一自然的映照 $\pi: E \to \mathfrak{P}$，即把 E 的每一点映为其所属的等价类，这称为投影．在 $\mathfrak{P}$ 中自然地有一拓扑，这是把 $\mathfrak{P}$ 中如此的子集 $\mathfrak{U}$ 定义为开集，若 $\mathfrak{U}$ 对于映照 π 的原象点集是 E 的开集．对于这样定义的拓扑，映照 π 显然是連續的，并且 π 把开集映为开集．因为如 K 是 E 中的开集，經映照 π 映为 $\mathfrak{P}$ 中的点集 L，命 K_P 代表 E 中的点 $P\mathfrak{Z}$，其中 P 是 $m \times m$ 非异方陣，$\mathfrak{Z} \in K$．則 K_P 是 E 中的开集，而 L 的对于 π 的原象点集为 $\sum\limits_P K_P$，这仍然是 E 的开集，故 L 是 $\mathfrak{P}$ 的开集．

我們要証明 $\mathfrak{P}$ 是一齐性的 mn 維复解析流形，并且是紧致的。

命 $M(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m)$ $(1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_m \leqslant m+n)$ 表 $E(m;n)$ 中的子集，包含如此的点

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_{m+n}), \qquad \mathfrak{z}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{z}_{1\alpha} \\ \mathfrak{z}_{2\alpha} \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_{m\alpha} \end{pmatrix}, \tag{1·1·2}$$

其中的第 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 列所組成的 $m \times m$ 方陣

$$Z_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} = (\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \mathfrak{z}_{\gamma_2}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_m}) \tag{1·1·3}$$

是非异的．显然 $M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是开集，并且若有一点属于 M，則所有等价于此点的点亦属于 M，且所有这些开集把 E 盖过，故 $\mathfrak{P}(m;n)$ 中的点集

$$\mathfrak{V}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m) = \pi[M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)] \tag{1·1·4}$$

是 $\mathfrak{P}$ 中的开集，并且所有这些开集把 $\mathfrak{P}$ 盖过。

对每一 $\mathfrak{V}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$，我們作一拓扑映照 $\theta(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m)$ 把 $\mathfrak{V}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 映为 C^{mn} 如下：若 $\mathfrak{Z} \in M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$，命 $Z_{\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_{m+n}}$ 为 $\mathfrak{Z}$ 中第 $\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_{m+n}$ 列所組成的 $m \times n$ 矩陣，即

$$Z_{\gamma_{m+1}, \cdots, \gamma_{m+n}} = (\mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+n}}), \tag{1·1·5}$$

其中 $\gamma_{m+1} < \cdots < \gamma_{m+n}$ 是从整数 $1, 2, \cdots, m+n$ 除去了 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 后所余下的数。由于 $\pi(\mathfrak{Z}) \in \mathfrak{V}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$，我們定义 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 为

$$\pi(\mathfrak{Z}) \xrightarrow{\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}, \tag{1·1·6}$$

其中我們以 A^{-1}（有时候用 $\overset{-1}{A}$）表一非异方陣 A 之逆方陣。这样定义的映照与等价类之代表 $\mathfrak{Z}$ 的选取无关，因若有等价于 $\mathfrak{Z}$ 的矩陣 $P\mathfrak{Z}$，P 为非异 $m \times m$ 方陣，则

$$P\mathfrak{Z} = (P\mathfrak{z}_1, P\mathfrak{z}_2, \cdots, P\mathfrak{z}_{m+n}),$$

而据 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 的定义，

$$\begin{aligned}\pi(P\mathfrak{Z}) &\longrightarrow (P\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \cdots, P\mathfrak{z}_{\gamma_m})^{-1}(P\mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, P\mathfrak{z}_{m+n}) \\ &= (\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_m})^{-1}(\mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+n}}) \\ &= Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}.\end{aligned}$$

这表明 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 把 $\mathfrak{V}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 中的一个等价类确定地映为一 $m \times n$ 矩陣

$$Z = Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}, \tag{1·1·7}$$

这可以看作是 C^{mn} 中的一点。如 $\mathfrak{V}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 中有两点 $\pi(\mathfrak{Z})$ 与 $\pi(\mathfrak{W})$ 映为同一的 C^{mn} 的 Z 点，設 $\mathfrak{W} = (\mathfrak{w}_1, \cdots, \mathfrak{w}_{m+n})$，则有

$$Z^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}} = W^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} W_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}}.$$

命 $P = Z_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} W^{-1}_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}$，便得

$$Z_{\gamma_1 \cdots \gamma_m} = PW_{\gamma_1 \cdots \gamma_m}, \qquad Z_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}} = PW_{\gamma_{m+1} \cdots \gamma_{m+n}},$$

由此知

$$\mathfrak{z}_\alpha = P\mathfrak{w}_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, m+n),$$

或

$$\mathfrak{Z} = P\mathfrak{W},$$

此即 $\pi(\mathfrak{Z}) = \pi(\mathfrak{W})$。故映照 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是一一的，其逆映照为

$$Z \xrightarrow{\theta^{-1}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)} \pi[(I^{(m)}, Z)P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)], \tag{1·1·8}$$

其中 $P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是一 $(m+n)$ 阶排列方陣，它是把么方陣 $I^{(m+n)}$ 的行列的次序适当排列后所得的实正交方陣，使得

$$(\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_{m+n}) = (\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_m}, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+1}}, \cdots, \mathfrak{z}_{\gamma_{m+n}})P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m). \tag{1·1·9}$$

这里的排列方陣 $P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是存在的。

映照 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是連續的，因为若 $\pi(\mathfrak{Z})$ 映为 Z 点，$Z = Z^{-1}_{\gamma_1\cdots\gamma_m} Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}}$ 之元素是 $\mathfrak{Z} \in M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 之元素的連續函数，而 π 是把 $M(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 的开集映为 $\mathfrak{P}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 的开集。$\theta^{-1}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 也是連續的，因由 (1·1·8) 知 $\mathfrak{Z} = (I^{(m)}, Z)P(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 的元素是矩陣 Z 的元素的連續函数。故 $\theta(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 是映 $\mathfrak{P}(\gamma_1, \cdots, \gamma_m)$ 为 C^{mn} 的拓扑映照。

現証明拓扑空間 $\mathfrak{P}(m; n)$ 是齐性的。此即要証任一点 $\pi(\mathfrak{Z})$，$\mathfrak{Z} \in E(m;n)$，存在一 $\mathfrak{P}(m; n)$ 的自同胚变換，把 $\pi(\mathfrak{Z})$ 映为 $\mathfrak{P}(m;n)$ 的固定点 $\pi[(I^{(m)}, O)]$。

設 Q 是 $(m+n) \times (m+n)$ 非异方陣，我們已知綫性变換

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{Z}Q \tag{1·1·10}$$

是把 $E(m;n)$ 一一地映为自己。显然的这变換把互相等价的点映为互相等价的点。更确切的說，若 $\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{Z}_1Q$，$\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{Z}_2Q$，則 $\mathfrak{W}_1 \sim \mathfrak{W}_2$ 的充要条件为 $\mathfrak{Z}_1 \sim \mathfrak{Z}_2$。由此可知变換 (1·1·10) 誘

导出 $\mathfrak{P}(m;n)$ 中的一变换

$$\tau_Q : \mathfrak{P}(m;n) \longrightarrow \mathfrak{P}(m;n), \tag{1·1·11}$$

此乃表示把以 $\mathfrak{Z}$ 为代表的等价类 $\pi(\mathfrak{Z})$，映为以 $\mathfrak{W} = \mathfrak{Z}Q$ 为代表的等价类 $\pi(\mathfrak{Z}Q)$. τ_Q 显然是 $\mathfrak{P}(m;n)$的自同胚.

設 $\mathfrak{Z}$ 是給定的 $m \times (m+n)$ 矩陣，其秩为 m，习知存在 $(m+n) \times (m+n)$ 酉方陣 U，使得

$$\mathfrak{Z}U = (A, O), \tag{1·1·12}$$

其中 A 是非异的 $m \times m$ 方陣。此示 τ_U 把 $\pi(\mathfrak{Z})$点映为$\pi[(A, O)] = \pi[(I, O)]$点. 故 $\mathfrak{P}(m;n)$ 在綫性变換(1·1·10)誘导出的变換 τ_Q 所成的群 $\Gamma(m;n)$ 下是可遞的，甚至是 $\mathfrak{P}(m;n)$在变換 τ_U(U 是 $m+n$ 阶酉方陣)所組成的 $\Gamma(m;n)$ 的子群 $\mathfrak{U}(m+n)$下是可遞的.

根据上面所証 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是齐性的拓扑空間，我們来証明 $\mathfrak{P}$ 是一 Hausdorff 空間. 此即要証：若 $\pi(\mathfrak{Z}_1) \neq \pi(\mathfrak{Z}_2)$，則有 $\mathfrak{P}$ 的分別包含 $\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{Z}_2)$ 的两个邻域，彼此沒有公共点.

由于 $E(m;n)$ 的拓扑是相对于 $C^{m(m+n)}$ 的拓扑，而 $C^{m(m+n)}$ 是一 Euclid 度量空間，故 E 也是一度量空間，即对任两点 $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2 \in E$，有一 Euclid 距离

$$r(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) = \{\operatorname{tr}(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2)\,(\overline{\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2})'\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1·1·13}$$

这里我們以 A' 表矩陣 A 的置換，$\overline{A}$ 表 A 的复共軛矩陣，$\operatorname{tr} A$ 表方陣 A 之迹.

我們不妨假定 $\mathfrak{Z}_1 = (I^{(m)}, O)$，否則我們根据 $\mathfrak{P}$ 之可遞性，可作一拓扑变換，把 $\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 点映为以(I, O)为代表的点.

設 $\mathfrak{Z}_2 = (A^{(m)}, B^{(m,n)})$. 若 A 为非异的，則$\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 与$\pi(\mathfrak{Z}_2)$是落在 $\mathfrak{P}$ 的同一坐标邻域中，显然的有分別包含 $\pi(\mathfrak{Z}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{Z}_2)$的 $\mathfrak{P}$ 的两邻域，彼此沒有公共点者.

若 A 为奇异的，即 $\det A = 0$，則我們取 $\mathfrak{Z}_1$ 与 $\mathfrak{Z}_2$ 点的在

E 中的互不相交的充分小邻域 $\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{U}_2$，使得此两邻域中的点能写成下面之形式:

$$\mathfrak{W}_1=(I+C_{\varepsilon_1},\ D_{\varepsilon_1}),\qquad \mathfrak{W}_1\in\mathfrak{U}_1,$$
$$\mathfrak{W}_2=(A+C_{\varepsilon_2},\ B+D_{\varepsilon_2}),\qquad \mathfrak{W}_2\in\mathfrak{U}_2.$$

这里我們以 C_ε 表一矩陣，其元素的絕对值皆小于正数 ε 者。我們只要証明取 ε_1 与 ε_2 充分小时，$\pi(\mathfrak{U}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{U}_2)$ 沒有公共点便可，因为 π 是把开集映为开集的。

首先取 ε_2 充分小，使得 $\mathrm{tr}[(B+D_{\varepsilon_2})(\overline{B+D_{\varepsilon_2}})']\geqslant\lambda>0$。这是可以的，因为 $\pi(\mathfrak{Z}_1)\neq\pi(\mathfrak{Z}_2)$，$B$ 必非零矩陣。此外，要使得 $(A+C_{\varepsilon_2})(\overline{A+C_{\varepsilon_2}})'$ 的特征根皆小于一正常数 a，这也是可以的，因为 A 是一固定的常数方陣。如是我們能书(附录 II·1，定理 1·1)

$$A+C_{\varepsilon_2}=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}V,$$

$$\sqrt{a}\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m\geqslant0,$$

其中 U 与 V 是 $m\times m$ 酉方陣。

其次取 ε_1 充分小，使得 $\mathrm{tr}(D_{\varepsilon_1}\overline{D}'_{\varepsilon_1})<\dfrac{\lambda}{2a}$。此外能书

$$I+C_{\varepsilon_1}=U_1\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_m\end{pmatrix}V_1,$$

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_m\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}},$$

其中 U_1 与 V_1 是 $m\times m$ 酉方陣。这是可以的。

如果 $\pi(\mathfrak{U}_1)$ 与 $\pi(\mathfrak{U}_2)$ 有公共点，即有 $\mathfrak{W}_1\in\mathfrak{U}_1$ 与 $\mathfrak{W}_2\in\mathfrak{U}_2$ 使得

$$\mathfrak{W}_1 = P\mathfrak{W}_2,$$

其中 P 是 $m\times m$ 非异方陣. 比較元素可得

$$I + C_{\varepsilon_1} = P(A + C_{\varepsilon_2}),$$

$$D_{\varepsilon_1} = P(B + D_{\varepsilon_2}).$$

由第一个等式可知 $A + C_{\varepsilon_2}$ 必非异的. 从上两式中消去方陣 P 可得

$$D_{\varepsilon_1} = (I + C_{\varepsilon_1})(A + C_{\varepsilon_2})^{-1}(B + D_{\varepsilon_2}),$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(\overline{D}'_{\varepsilon_1}D_{\varepsilon_1})\\
&=\operatorname{tr}\left[(\overline{B + D_{\varepsilon_2}})'(\overline{A + C_{\varepsilon_2}})'^{-1}\overline{V}'_1\begin{pmatrix}\mu_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2^2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_m^2\end{pmatrix}V_1\right.\\
&\quad\left.\times(A + C_{\varepsilon_2})^{-1}(B + D_{\varepsilon_2})\right]\\
&\geqslant\frac{1}{2}\left[(\overline{B + D_{\varepsilon_2}})'(\overline{A + C_{\varepsilon_2}})'^{-1}(A + C_{\varepsilon_2})^{-1}(B + D_{\varepsilon_2})\right]\\
&\geqslant\frac{1}{2a}\operatorname{tr}\left[(\overline{B + D_{\varepsilon_2}})'(B + D_{\varepsilon_2})\right]\geqslant\frac{\lambda}{2a}.
\end{aligned}$$

这是与 $\operatorname{tr}(D_{\varepsilon_1}\overline{D}'_{\varepsilon_1}) < \frac{\lambda}{2a}$ 之假設矛盾.

現在我們証明 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是 mn 維复解析流形. 我們取 $\{\mathfrak{V}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)\}$ 为 $\mathfrak{P}$ 的坐标邻域系, 上面已經証明 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是实 $2mn$ 維流形, 我們只須証明 $\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\theta^{-1}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 是一解析映照便可. 实际上, 若 $\pi(\mathfrak{Z})\in\mathfrak{V}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\cap\mathfrak{V}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$, 設 $\pi(\mathfrak{Z})$ 在 $\mathfrak{V}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 中的局部坐标为 Z, 而在 $\mathfrak{V}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 的局部坐标为 W, 则据 (1·1·8) 及 (1·1·6),

$$Z\xrightarrow{\theta^{-1}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)}\pi[(I,Z)P(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)]\xrightarrow{\theta(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}W,\tag{1·1·14}$$

其中

$$W=(q_{\lambda_1}(Z),\ \cdots,\ q_{\lambda_m}(Z))^{-1}(q_{\lambda_{m+1}}(Z),\ \cdots,\ q_{\lambda_{m+n}}(Z)),\tag{1·1·15}$$

这里 $q_\lambda(Z)$ 是矩陣 $(I,\ Z)P(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_m)$ 的第 λ 列，它的元素显然是 Z 的元素的解析函数. 又由 $\pi[(I,\ Z)P(\gamma_1,\ \cdots,\gamma_m)]=\pi(\mathfrak{Z})\in\mathfrak{V}(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m)$ 可知 $(q_{\lambda_1}(Z),\ \cdots,\ q_{\lambda_m}(Z))$ 是非异的，因此变换(1·1·15)是解析的，亦卽 $\theta(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m)\theta^{-1}(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$ 是解析的.

此外，我們还要証明 $\Gamma(m;n)$ 中的变換 τ_Q 是解析的. 变换 τ_Q 是由 $E(m;\ n)$ 中的綫性变换(1·1·10)所誘导出的，我們卽要証明 $\mathfrak{Z}$ 所属的等价类 $\pi(\mathfrak{Z})$ 的局部坐标与經变换 τ_Q 映为 $\mathfrak{W}=\mathfrak{Z}Q$ 所属的等价类 $\pi(\mathfrak{W})$ 的局部坐标之間的关系是解析的. 設 $\pi(\mathfrak{Z})\in\mathfrak{V}(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_m)$, $\pi(\mathfrak{W})\in\mathfrak{V}(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m)$. 由(1·1·10)可知

$$\begin{aligned}(W_{\lambda_1\cdots\lambda_m},\ W_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_{m+n}})&P(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m)\\&=(Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m},\ Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}})P(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_m)Q\end{aligned}$$

或

$$(W_{\lambda_1\cdots\lambda_m},\ W_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_{m+n}})=(Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m},\ Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}})\tilde{Q},\tag{1·1·16}$$

其中

$$\tilde{Q}=P(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_m)QP'(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m).\tag{1·1·17}$$

我們书

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix}Q_1^{(m)} & Q_3^{(m,n)}\\ Q_2^{(n,m)} & Q_4^{(n)}\end{pmatrix},\tag{1·1·18}$$

则由(1·1·16)可知

$$\begin{aligned}W_{\lambda_1\cdots\lambda_m}&=Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}Q_1+Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}}Q_2,\\W_{\lambda_{m+1}\cdots\lambda_{m+n}}&=Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}Q_3+Z_{\gamma_{m+1}\cdots\gamma_{m+n}}Q_4.\end{aligned}\tag{1·1·19}$$

由于 $W_{\lambda_1\cdots\lambda_m}$ 与 $Z_{\gamma_1\cdots\gamma_m}$ 是非异的，而 $\pi(\mathfrak{W})$ 与 $\pi(\mathfrak{Z})$ 的局部坐标分别为