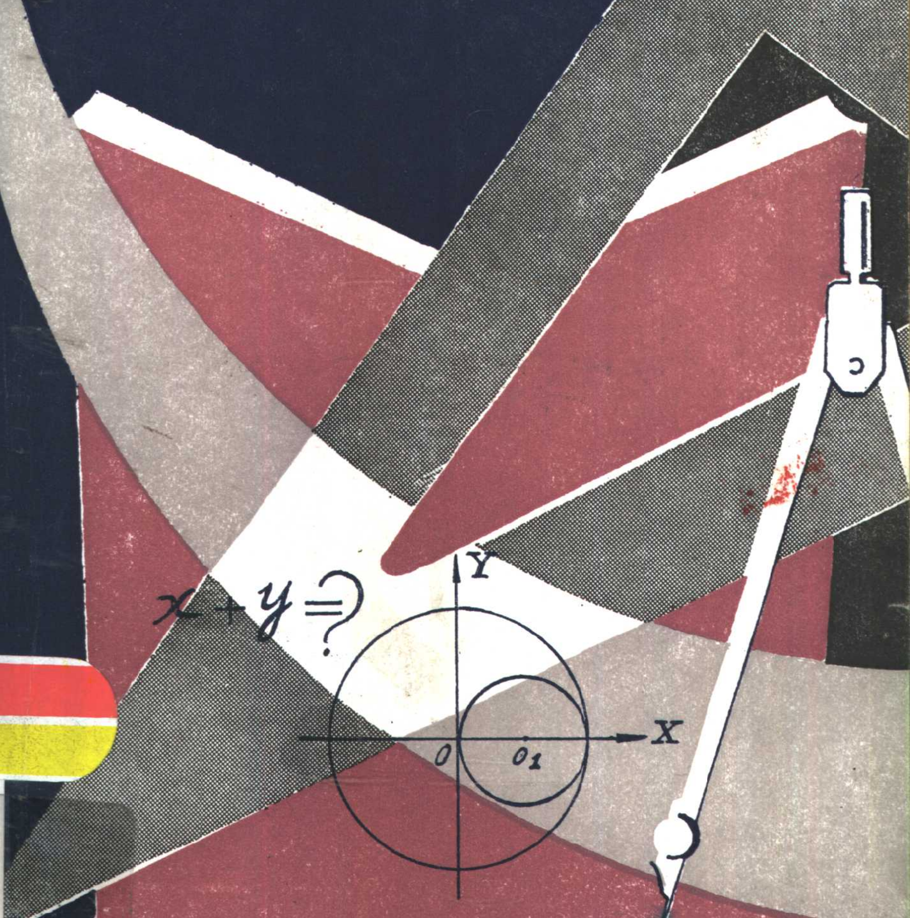
初中代数学习指导

许莼舫 编



中国青年出版社

初中代数学习指导

许莼舫 编

许树声　许玉声　何辛畊 修订

中国青年出版社

内 容 提 要

本书是供给中学程度的读者学习初等代数的时候作参考和复习用的。内容和中学数学教材紧密联系，能帮助读者总结要点、分辨异同、明确概念、巩固知识。本书共分十六章，从“代数式和方程”开始，直到“统计初步”为止。书末附有练习题答案和名词索引。

初中代数学习指导

许莼舫 编

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092　1/32　13.75 印张　300 千字

1984 年 6 月北京第 1 版　1984 年 6 月北京第 1 次印刷

印数 1—370,000 册　定价 1.25 元

修订说明

老友许莼舫君编的《代数和初等函数学习指导》一书出版以来，受到广大读者的关怀和支持，许多同志在内容和编排方面提出了宝贵意见和积极建议.

近二十年来，中学数学教育的内容已有了相当程度的改变，教育大纲已经修订，新的中学数学统编教材也已确定，这就对各种数学课外读物提出了新的要求. 为了适应当前中学教育的形势，使读者在阅读中得到更大的收获，许君的哲嗣玉声、树声对这书进行了修订，邀我参与了这件工作. 修订版分“初中代数学习指导”、“高中代数学习指导”、“平面三角学习指导”和“平面解析几何学习指导”共四册出版，编排上力求和新教材吻合，取材方面也有一定程度的增补，并充实了一定量的综合性例题和练习题. 为了便于读者总结要点、分辨异同、明确概念、巩固知识，还增加了各章的提要和书末的“名词索引”。

这套书在编排和取材方面，一定还存在不少缺点，希望读者给予批评和指正.

何辛畊

1980年三月

原书“编者的话”摘要

近年以来，我国的教育事业取得了巨大的成就．由于广大师生深入贯彻了党的教育方针，思想认识有了很大进步，对教学的目的性更加明确，积极性也不断增长，从而使教学质量显著提高．但是，学生在各科的学习中，困难在所难免．尤其是在中学数学方面，学生一向花在这一科上的时间占得最多，困难更突出一些．为了帮助中学生加深对数学教材内容的理解；帮助学生总结要点、分辨异同、明确概念；提供学习注意点，扫除各种疑难；补充多量例题，举示解法步骤和思考过程，培养解决实际问题的能力，并启发他们把知识灵活运用：就编写了这一部书．希望学生通过本书，能够少走弯路，省去摸索的时间，提高学习效果，多快好省地完成学习任务．

本书所选例题，为了使读者熟悉各种变化，举了很多特例，因而有个别题目微嫌繁难，但用作观摩，似乎还是有益处的．

本书在编排和取材方面，可能有不适当的地方，内容也可能有错误的地方，希望读者多多指正．

许莼舫

1961年三月

目　　次

第一章　代数式和方程……………………………………… 1

一　用字母表示数(1)　二　名词表解(3)　三　简单运算(6)

第二章　有理数……………………………………………14

一　名词表解(14)　二　有理数的运算(20)

第三章　近似计算…………………………………………40

一　名词表解(40)　二　预定精确度的近似计算(45)　三　平方表和立方表(54)

第四章　整式………………………………………………63

一　名词表解(63)　二　整式的性质(65)　三　整式的整理(66)　四　整式的加法(68)　五　整式的减法(72)　六　去括号和添括号(74)　七　整式的乘法(77)　八　整式的除法(88)

第五章　一元一次方程 ……………………………………100

一　名词表解(100)　二　等式的性质(101)　三　解方程的基本运算(103)　四　一元一次方程的解法(105)　五　列方程解应用题(116)

第六章　一次方程组 ………………………………………128

一　二元一次方程组(128)　二　三元一次方程组(135)　三　列方程组解应用题(139)

第七章　多项式的因式分解 ………………………………143

一　多项式因式分解(143)　二　提取公因式法(143)　三　分组分解法(146)　四　应用公式分解法(148)　五　二次三项式的分

解(154)　六　因式分解的一般步骤(161)　七　最高公因式和最低公倍式(164)

第八章　分式和分式方程 ……171

一　分式的基本运算(171)　二　分式的四则运算(178)　三　分式方程和分式方程组(189)　四　列分式方程或分式方程组解应用题(196)

第九章　实数、幂和方根 ……200

一　名词表解(200)　二　幂的性质(203)　三　方根的性质(204)　四　开平方(209)　五　开立方(218)　六　平方根表和立方根表(224)　七　根式的运算(229)

第十章　一元二次方程 ……243

一　名词表解(243)　二　一元二次方程的解法(244)　三　有关一元二次方程的问题(255)　四　可以化成一元二次方程的方程(262)

第十一章　二元二次方程组 ……276

一　由一个二元一次、一个二元二次方程组成的方程组的解法(276)　二　两个都是二元二次方程的简易方程组的解法(284)

第十二章　有理数指数幂 ……294

一　有理数指数幂的种类(294)　二　有理数指数幂的运算(296)

第十三章　对数和常用对数 ……303

一　对数(303)　二　积、商、幂、方根的对数(305)　三　常用对数和它的应用(311)

第十四章　函数和它的图象 ……323

一　名词表解(323)　二　比例函数(329)　三　一次函数(334)　四　二次函数(339)

第十五章　不等式和不等式组 ……………………………353

一　名词表解(353)　二　不等式的性质(355)　三　一元一次不等式的解法(357)　四　不等式的证明(360)　五　不等式和不等式组的解法(363)

第十六章　统计初步 ……………………………………379

一　名词表解(379)　二　平均值和方差的计算(383)　三　频率分布(391)

附录一　练习题答案 ……………………………………400

附录二　名词索引 ………………………………………425

第一章　代数式和方程

一　用字母表示数

我们以前学过的算术，在数学中是最浅易的部分，这部分的数是用数字来表示的，并且也只限于整数和分数．为了解决生产技术上更多、更复杂的计算问题，需要把数的概念扩充，并且要用许多字母来代表数，这就是所谓“代数”．

代数上用字母表示数，归结起来有下列各种效用：

1．表示数的共同性质　虽然不同的数所表示的数量各不相同，但是它们有许多性质都是相同的．这些一般数所共同具有的普遍性质，如果用字母把它表示出来，就非常简单明瞭．

例　我们从加法和乘法，可以得到下列的许多式子：

$$(1+2)\times 3=1\times 3+2\times 3;$$
$$(2+3)\times 4=2\times 4+3\times 4;$$
$$(3+4)\times 5=3\times 5+4\times 5;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样的每一个式子，只能表示三个特殊数值之间的性质．如果要把任何三个数之间的共同性质总括起来，应该说：“用某数去乘两个数的和，可以用这个数分别去乘这两个数中的每一个数，再把乘得的两个积相加．”但是现在用了字母，就可以把数的这个通性写成一个简单的公式：

$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c.$$

这个式子所表示的就是一条运算定律——乘法对于加法的分配律．代数里所用到的运算定律和运算性质，通常都用字母来表达．

2．表达各种运算法则 在已知的条件下，可以用字母表示出几个数之间的一定关系，利用它来作为运算的法则．

例 某人每小时可以走 3 公里路，他 2 小时可以走几公里路？3 小时呢？4 小时、5 小时、……呢？

如果不用字母，要表示出这个人所走的路程，必须用下列的许多式子：

2 小时所走的公里数 $= 3 \times 2$；

3 小时所走的公里数 $= 3 \times 3$；

4 小时所走的公里数 $= 3 \times 4$；

……………………………………

这样的每一个式子，只能表示一个特殊的计算．如果要把这几个数之间的关联概括地表达出来，应该说："若干小时内共走的路程，等于每小时所走的路程乘以所走的小时数．"但是用了字母，就可以用简明的式子——公式——来代替这一句比较长的语言．就是：

设共走的公里数是 s，每小时所走的公里数是 v，所走的小时数是 t，那么：

$$s = vt.$$

3．表达各种计算步骤 用字母表示了数之后，就可以用式子代替语言，把计算步骤简单明了地叙述出来．

例 大、小两个数的和是 43，大数是小数的 5 倍，求这两个数．

从图 1，用语言逐步说出本题的算法：

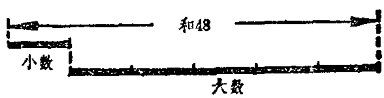


图 1．

(1) 大数既然是小数的 5 倍，那么它就等于 5 个小数．

(2) 大数加上小数等于 5 个小数加上 1 个小数，就是 $5 + 1 = 6$ 个小数．

(3) 已知大数加上小数等于 48．

(4) 于是知道 6 个小数的和，也就是小数的 6 倍等于 48．

(5)所以，小数是 $48\div6=8$.

(6)大数是 $8\times5=40$。

如果用字母 x 表示小数，y 表示大数，那么上面的解法就可以写成：

(1) $y=5x$.

(2) $y+x=5x+x=6x$.

(3) $y+x=48$.

(4) $6x=48$.

(5) $\therefore\ x=48\div6=8$.

(6) $y=5\times8=40$.

后面就比前面的叙述简明得多.

二 名词表解

代数式

【意义】 用表示数的数字和字母通过有限次的加、减、乘、除、乘方和开方六种运算所得的式子，叫做代数式.

【代数式的值】 代数式中所含的字母，分别用它们所表示的数值代入，按运算顺序进行计算，所得的结果叫做代数式的值.

例 如 abc，$3x+2y$，$\frac{a}{5}$，$m-(n-p)$ 等都是代数式. 又如果 $a=18$，$b=5$，那么代数式 $a-3b$ 的值是 $18-3\times5=3$.

注意一 单独一个字母或一个数，例如 a，5，$\frac{2}{3}$等，也可以看作代数式.

注意二 代数式里的字母都表示数，代数式的值也是数，所以数的一些运算法则和规律也都适用于代数式.

注意三 根据代数式的概念，式 $3-a$ 中，被减数 3 和减数 a 本身也可以看作是代数式，因此为了表示相减的是两个代数式，我们通常把它们叫做被减式和减式. 同样，相当于因数、加数、被除数、除数、余数等等的代数式，分别叫做因式、加式、被除式、除式、余式等等。

注意四 代数式里的字母虽然可以表示各种不同的数值，但是因为除法

中的除数等于零是没有意义的，所以在代数式$\frac{b}{a-1}$中的a不能取数值1．这样，代数式中的字母所能取的数值，是不至于使代数式没有意义的数值(也就是可以由此求得代数式的值的)，这些数值叫做字母的允许值．例如$\frac{b}{a-1}$中的b的允许值是一切数；$\frac{b}{a-1}$中的a的允许值是除1以外的一切数.

等式和不等式

【等式】 两个代数式的值如果相等，就说这两个代数式相等，用符号"="把它们联接起来，所成的式子叫做等式.

〔恒等式〕 等式中的字母无论用什么样的值(只要是允许值)代入计算，等号两边的值总是相等，这样的等式叫做恒等式．恒等式中的等号也可以用恒等号"≡"来代替，读作"恒等于".

〔方程〕 含有代表未知数的字母的等式，叫做方程.

【不等式】 两个代数式的值如果不相等，就说这两个代数式不等，用大于或小于号把它们联结起来，所成的式子叫做不等式.

例 $(a+1)(a-1)=a^2-1$，$6x=48$等都是等式．其中$(a+1)(a-1)=a^2-1$是恒等式，可以写作$(a+1)(a-1)\equiv a^2-1$．而$6x=48$是方程．$a^2+b^2>2ab$，$3x<6$等都是不等式.

方程的解和根

【方程的解】 使方程的两边的值相等的未知数的值叫做方程的解.

【方程的根】 如果方程只有一个未知数，它的解也叫做它的根.

【解方程】 求方程的解或根的过程叫做解方程.

例 方程$6x=48$中的x等于8的时候，两边相等，所以8是这个方程的解．因为这个方程只有一个未知数，所以8也叫这个方程的根.

因数和系数

【因数】 如果一个代数式是若干个数字和字母的积，那么每一个数字和字母都是这个代数式的"因数".

【系数】 如果一个代数式是一个数字和若干个字母的积，那么这个数字因

数就叫做字母因数(或几个字母的积)的系数．如果在这些字母中有一个或几个字母被看作是主要字母，那么其余的字母连同数字因数的积叫做这一个或几个主要字母的系数．系数常写在字母或主要字母的前面．

例 在代数式 $3ab$ 中，3，a 和 b 都是因数，而 3 是 ab 的系数．在代数式 $5ax$ 中，如果以 x 作为主要字母，那么 $5a$ 就是 x 的系数．

注意 xy 可以看作 $1xy$，它的系数是 1，通常略去不写．

乘方

【意义】 求若干个相同因数的积的运算，叫做乘方．例如求 n 个 a 的积的运算，就要用乘方来计算，记作 a^n．

【次数】 相同因数的个数，叫做乘方的次数．例如乘方 a^n 的次数是 n，a^n 叫做 a 的 n 次乘方，简称 a 的 n 次方或 n 方．二次乘方又叫做平方，三次乘方又叫做立方．

【乘方运算的三种数】

〔底数〕 乘方 a^n 中的相同因数 a，叫做底数．

〔指数〕 乘方的次数 n，叫做指数．

〔幂〕 乘方的结果叫做幂①，a^2 叫做 a 的二次幂，a^3 叫做 a 的三次幂，……，a^n 叫做 a 的 n 次幂．

代数运算

【第一级】 在 $a+b=c$ 中，已知 a 和 b 而求 c 是加法，已知 c 和 a（或 b）而求 b（或 a）是减法．

【第二级】 在 $ab=c$ 中，已知 a 和 b 而求 c 是乘法，已知 c 和 a（或 b）而求 b（或 a）是除法．

【第三级】 在 $a^b=c$ 中，已知 a 和 b 而求 c 是乘方，已知 c 和 b 而求 a 是

① 严格地说，a^n 有两种不同的读法：当它表示把 a 做 n 次乘方时读作"a 的 n 次方"；当它表示乘方的结果时读作"a 的 n 次幂"．但通常都读作"a 的 n 次方"，例如 a^2、a^3、a^4 就读作"a 的平方"、"a 的立方"、"a 的四次方"等．

开方(开方将在后面讲述).

代数运算的符号

【1】 加号“+”; 减号“−”;

括号“{[(……)]}”; 等号“=”; 恒等号“≡”;

约等于号“≈”或“≐”; 不等号“>”,“<”,“≧”,“≦”.

【2】 乘号“×”或“·”,在数字和数字之间不能省略,别处都可以省略.

【3】 除号“÷”,不常用.一般都用分数表示.例如 $a\div b$ 写作 $\frac{a}{b}$.

注意 分数线不仅表示相除,还兼有括号的作用。例如 $(a+b)\div(a-b)$ 可以写成 $\frac{a+b}{a-b}$,两个括号都省去了.

运算顺序

【无括号的】

〔只有同一级的运算〕 全式从左到右按顺序运算.

〔有二或三级的运算〕 先算式中的各第三级,再算各第二级,最后算第一级.

【有括号的】

〔一层〕 先算括号内的数,去掉括号,再按无括号的运算顺序运算.

〔多层〕 先算最里面一层括号内的数,逐层向外,去掉括号,再按无括号的运算顺序运算.

三 简单运算

1. 求代数式的值 如果知道代数式中各个字母所代替的数值,那么用这些数值代入,按规定的运算顺序,可以算出这个代数式的值.

例题 1. 设 $a=7, b=2, c=4, d=3$,求下式的值:

$$3a^2b-\frac{b^3}{c}+d.$$

解 $$3a^2b-\frac{b^3}{c}+d=3\times7^2\times2-\frac{2^3}{4}+3 \quad \text{(代替)}$$
$$=3\times49\times2-\frac{8}{4}+3 \quad \text{(先算第三级)}$$
$$=294-2+3 \quad \text{(再算第二级)}$$
$$=295. \quad \text{(后算第一级)}$$

例题 2. 设 $a=20, b=8$，求 $(a+b)a-b$ 的值.

解 $$(a+b)a-b=(20+8)\times20-8 \quad \text{(代替)}$$
$$=28\times20-8 \quad \text{(括号内先算)}$$
$$=560-8 \quad \text{(再算乘法)}$$
$$=552. \quad \text{(再算第一级)}$$

例题 3. 设 $a=6, b=5, c=2$，求下式的值：
$$5\{4a-2[2b+2(a-c)-3(b-c)]\}.$$

解 用已知的数代入后，从最里面的括号起，依次向外逐步计算如下：

原式$=5\{4\times6-2[2\times5+2(6-2)-3(5-2)]\}$
$=5\{4\times6-2[2\times5+2\times4-3\times3]\}$
$=5\{4\times6-2[10+8-9]\}$
$=5\{4\times6-2\times9\}$
$=5\{24-18\}$
$=5\times6$
$=30.$

2. 利用系数的运算 因为系数就是相同加数连加的时候加数的个数，所以利用系数可以把含有相同加数的代数式化简，也可以把系数不是 1 的代数式化做系数都是 1.

例题 4. 化简 $x+x+y+y+y$.

解 $$x+x+y+y+y=2x+3y.$$

例题 5. 把 $4ab-\frac{3}{5}c$ 化做不含 1 以外的系数的式子.

解
$$4ab-\frac{3}{5}c=4ab-\frac{3c}{5}$$
$$=ab+ab+ab+ab-\frac{c+c+c}{5}.$$

例题 6. 化简 $3x+5x-2x$.

解
$$3x+5x-2x=x+x+x+x+x+x+x+x-x-x$$
$$=x+x+x+x+x+x$$
$$=6x.$$

注意一 这个例题实际上是先把原式化做不含1以外的系数的代数式，然后把这个含有相同加数的代数式化简.

注意二 在上例中，加上一个 x 和减去一个 x 恰巧抵销，所以从8个 x 的和里减去2个 x，还剩6个 x.

注意三 利用乘法对于加法的分配律，也可以计算上题，算法更加简便.就是
$$3x+5x-2x=(3+5-2)x$$
$$=6x.$$

3. 利用指数的运算 因为指数就是相同因数连乘的时候因数的个数，所以利用指数可以把含有许多相同因数的代数式化简，也可以把指数不是1的式子化成指数都是1的因数的积.

例题 7. 化简 $2aabbb-3aaabb$.

解
$$2aabbb-3aaabb=2a^2b^3-3a^3b^2.$$

例题 8. 把 $3x^2y^3+x^2yz^2$ 化做不含1以外的指数的式子.

解
$$3x^2y^3+x^2yz^2=3xxyyy+xxyzz.$$

例题 9. 化简 $a^2a^3+2bb^4$.

解
$$a^2a^3+2bb^4=aaaaa+2bbbbb$$
$$=a^5+2b^5.$$

注意 上节和本节里所举的各种简单运算，是把一个代数式变换成另一个代数式，原式和变成的式子中的字母无论取哪一个允许值，它们的值都是相等的．这种变换叫做“恒等变换”．

练习题一

1. 设 $a=20, b=8, c=3$，求下列各式的值：

（1）$(a+b)c$；（2）$a+bc$；（3）$(a+b)\div c$；

（4）$2(a-2b)+3c$；（5）$(a+b)(a-b)$；（6）$\dfrac{a+b}{a-b}$．

2. 求下列各代数式的值：

（1）$2a-3bc$，其中 $a=5, b=1, c=\dfrac{1}{2}$．

（2）$m(m-n)+2n$，其中 $m=5.4, n=3.9$．

（3）$5+4x+3x^2+2x^3$，其中(i)$x=3$；(ii)$x=0.1$；(iii)$x=\dfrac{1}{2}$．

（4）$\dfrac{p^2+pq+q^2}{p^2-pq+q^2}$，其中 $p=2, q=3$．

（5）$4a^2-2ab+3b^2$，其中 $a=3, b=\dfrac{1}{3}$．

（6）$\dfrac{1-a^2}{(1-ab)^2}-(a+b)^2$，其中 $a=0.5$，$b=\dfrac{1}{3}$．

（7）$x^3\left(8xyz^3+\dfrac{x}{5y}\right)$，其中 $x=10, y=0.1, z=0.5$．

（8）$\dfrac{x^3-y^3}{(x-y)^3(x+y)^3}$，其中 $x=2, y=\dfrac{1}{2}$．

3. 设 $x=6, y=8$，求 $3(x^2+y^2)$，$3(x+y)^2$ 和 $[3(x+y)]^2$ 的值．这三个值相同吗？

提示 这三个值中的任何两个都是不相同的．可见不能把乘法对于加法的分配律错误地用到指数上，也就是不能把 $(x+y)^2$ 化成 x^2+y^2．另外，$3(x+y)^2$ 的指数 2 是属于 $(x+y)$ 的，和 3 无关，所以这个式子和 $[3(x+y)]^2$ 不同．

4. 利用系数化简下列各式：

（1）$m^2+m^2+n+n+n$；（2）$(a-b)+(a-b)+(a-b)$；

（3）$\dfrac{x+x+x+x}{y+y+y}$；（4）$\dfrac{k+k-mn-mn-mn}{k+k+k+mn+mn}$；