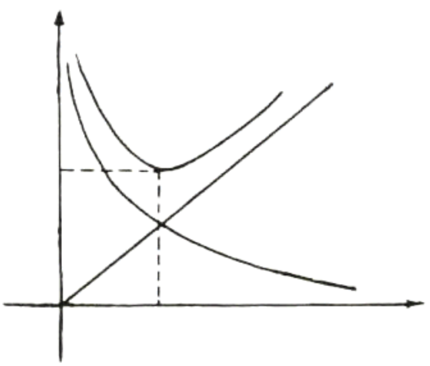
经济数学
简明教程

彭文学 主 编
李少斌 副主编



jing ji shu xue jian ming jiao cheng

武汉工业大学出版社

经济数学简明教程

主　编　彭文学

副主编　李少斌

责任编辑　韩瑞根　朱益清

*

武汉工业大学出版社出版发行

核工业中南309队印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张：20.000　字数：460千字

1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷

印数：1－10000册

ISBN　7－5629－0258－5/O·0013　定价：6.80元

序

随着商品经济的发展，人们的思想获得了新的解放，旧观念受到冲击，新观念正在树立，社会主义商品经济的新秩序正在形成，这一切都要求各级的经济管理人员勇于去开拓新视野，发展新观念，进入新境界，掌握现代经济管理的新理论和新方法。

经济数学方法是现代经济管理与理论分析的基本方法。国际著名经济学家——诺贝尔奖金获得者克莱茵教授指出：经济分析就是一种数学分析。马克思也认为：一种科学，只有当它成功地利用了数学的时候，才能达到完善的地步，这些都说明了数学在经济中起着十分重要的作用。

近十几年来用微积分、线性代数、运筹学等来描述基本经济理论已相当普遍并已发展成为数理经济学、经济控制论等重要的学科分支。

经济数学方法是经济研究、经济分析和经济计划中应用数学知识和计算机工具的简称。《经济数学简明教程》除微积分、矩阵代数、运筹学、概率、统计等基本方法外，还介绍了投入产出，抽样设计、正交试验等方法。内容简明扼要，並有结合经济的大量实例，供读者学习与练习。这种理论与实践的结合，乃是本教材的主要特色。

本书是作为电大的经济数学教材而编写的，不仅适合电大的有关专业使用，而且可作为广大的经济管理干部掌握经济数学的基本读物。

冯文权

1989年2月于武昌珞珈山

前　言

随着对内搞活经济、对外实行开放，经济数学越来越广泛地用于分析经济现象，高等数学也随之应用到经济学科和经济工作的各个方面。经济数学是经济学和数学相结合的应用数学学科。为适应现代化经济建设和大专经济类各专业的需要，全国部分省、市电大联合编写《经济数学简明教程》试用教材。

本书结合广播电视大学经济类各专业的需要，在经济数学的结构、体例和教学内容的取舍上都作了较大变动。为使读者尽快接触到现代数学和经济数学方法，全书把经济数学中的微积分、线性代数与线性规划和数理统计合编为一本综合性教材。本书以经济工作者必需的简易微积分理论、矩阵工具、投入产出分析、单纯形方法、概率统计融为一体，层次分明，章节脉络清晰。在教材内容的选取上，避开艰深的数学论证，着笔于高等数学方法在经济学中的具体运用。在叙述上力求详尽而具体；数学概念的引出注重经济意义的解释；数学中的定理、定义、性质和公式法则通过计算实例和经济实例来验证；由浅入深，深入浅出，易于一般人理解、掌握和运用。

参加本书编写工作的有：王大文（第一、二章），周以祥（第三、四章），符秀华（第五章），葛振三（第六章），刘夫孔（第七、八章），李少斌（第九章）、苑乐仁（第十章）。本书由彭文学任主编，李少斌任副主编。全书由武汉大学管理学院冯文权教授主审。

本书在编写过程中得到湖北广播电视大学等省市电大领导的大力支持，在此一并表示衷心感谢。由于编写时间仓促，错误在所难免，敬请读者批评指导。

编者　1989年1月

目　录

第一章 函数与极限

§1.1 函数

函数是微积分学的基本概念之一，是研究变量与变量相互关系的重要工具。在经济分析中，函数是表示经济数量关系的一种重要方法。

（一） 函数概念

1．函数定义

在我们周围世界中，所有的现象、过程都是相互联系、相互制约的。因此，在研究事物的量的变化时，要研究存在于各个量之间的相互依赖关系。为了概括那些存在于各个量之间的相互依赖关系，在数学上便引进了函数概念。

定义1 设在某个变化过程中，有两个变量x和y，变量x的变化范围为D，对于D内的每一个x，按照某一对应法则f，都可以确定变量y的一个相应值，则称变量y是变量x的函数。记作

$$y=f(x) \qquad x\in D$$

x称为自变量，y称为因变量，x的变化范围D称为函数的定义域，记为$D(f)$。当自变量$x=a$时，函数$y=f(x)$的值叫做$f(x)$在$x=a$处的函数值，记作$f(a)$。当x遍取$D(f)$时,所有函数值的全体称为函数的值域，记为$Z(f)$。

由定义1可知，函数$y=f(x)$是两个变量间的一种对应关系，它要求对于D中的每一个x值，通过对应法则f，都只有一个y值与之对应。如果有多个y值与之对应，则称为"多值函数"。这样，定义1中的函数称为单值函数。本书所涉及的函数如无特殊说明均指单值函数。

两个变量间的函数关系可以用解析式(公式)表示，也可以用图形或表格来表示。

例如，每天的气温与当天不同时刻的关系，构成一函数关系(不同时刻有其相应的气温)，但该函数一般很难用解析式表示，通常用记录仪所描绘的曲线来表示。

不要把函数符号$y=f(x)$与函数解析表示式混为一谈。通常写出$y=f(x)$以表示y是x的函数，但这并不是说，它就一定是解析表示式，例如用表格或图形表示的函数就不是用解析式定义的。

2．相同函数、分段函数、显函数与隐函数

函数的定义域、对应法则是确定函数的两个要素，这两个要素相同，叫做相同函数。否则，只要有一个要素不相同，就不是同一个函数。函数自变量和因变量采用什么字母记号都可以，比如，函数$y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$与$u=\sin v$，$v\in(-\infty,+\infty)$尽管字母不相同，但实际上表示相同函数。

有些函数，在定义域内由于自变量x取值不同，需要用不同的解析式来表示，这样的函数，称为"分段函数"。

例 1　某运输公司规定货物的吨公里运价，在 n 公里内，每公里为 a 元，超过 n 公里时，每增加一公里为 $3a/4$ 元。试求运费和里程的函数关系。

解　设里程为 x（公里），运费为 y（元）

则

$$y=\begin{cases} ax & 0\leqslant x\leqslant n \\ an+\dfrac{3}{4}a\,(x-n) & x>n \end{cases}$$

这说明运费 y 与里程 x 的函数关系要用两个解析表示式表示，定义域为 $[0,+\infty)$。

注意：分段函数虽然是用几个解析式合起来表示，但仍然是表示同一个函数，而不是表示几个函数，其中，自变量分段处的点称为分段函数的分段点。

有些函数，因变量 y 可以直接的明显的表示为自变量 x 的函数，例如 $y=x^2$，$y=\sin(x+\pi/3)$ 等等，这种函数称为显函数。而有些函数，它的因变量 y 与自变量 x 的对应关系是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来确定的，即函数关系隐含在方程中，例如，$e^y=xy$ 等等，这样的函数称为隐函数。

3．求函数定义域的方法

(1) 实际应用问题或几何问题中的函数定义域是由实际问题本身或几何意义来确定。例如，$S=\pi x^2$ 作为一般函数，其定义域为全体实数，即 $x\in(-\infty,+\infty)$。但若 S 表示圆的面积，则半径 x 的取值范围应为 $(0,+\infty)$，即定义域为 $(0,+\infty)$。

(2) 当函数是由解析表示式给出时，其函数定义域是由使解析表示式有意义的一切实数所组成。一般地，确定函数定义域应注意以下几点：

1°　如果函数式里有分式，则分式的分母不能为零。

2°　如果函数式里有偶次根式，则根号内的式子必须非负。

3°　如果函数式里有对数，则真数要大于零。

4°　如果函数式里有正(余)切函数，则正切(或余切)符号内的变量不能为 $\pi/2+n\pi$（或 $n\pi$），$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$。

5°　如果函数式里有反正(余)弦函数，则反正(余)弦符号下的式子的绝对值要小于、等于1。

6°　如果函数式经过有限项四则运算而组成的式子，则定义域应是各项定义域的公共部分。

例 2　确定函数 $y=\ln 1/(1-x)+\sqrt{x+2}$ 的定义域 $D(f)$。

解　由2°，3°与6°知函数的定义域由

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}>0 \\ x+2\geqslant 0 \end{cases}$$

来确定。解此不等式组，得 $-2\leqslant x<1$，即

$$D(f):\ -2\leqslant x<1$$

或者用区间表示　$D(f)=[-2,1)$

例 3　确定函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|<1 \\ x^2-1 & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$$

的定义域$D(f)$并作出函数图形。

解 这个函数在$|x|=1$处没有定义，它的定义域为

$$D(f)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$$

其图形见图1－1。

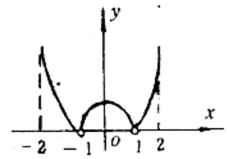


图1－1

4．函数的简单性质

（1）函数的奇偶性

对于原点对称的区间$[-a,a]$上的函数$y=f(x)$，如果对任意$x\in[-a,a]$都有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数。如$y=x^2$，$y=\cos x$，$y=|x|$在$(-\infty,+\infty)$上都是偶函数。偶函数的图象是关于y轴对称的。

如果对任意$x\in[-a,a]$都有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。如$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=x|x|$在$(-\infty,+\infty)$上都是奇函数。奇函数的图象是关于原点对称的

注意：函数的奇偶性是关于对称区间而言的。

例4 判别函数$f(x)=x\sin x+|x|$的奇偶性。

解 因为在定义域$D(f)$：$(-\infty,+\infty)$内

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)+|-x|=x\sin x+|x|=f(x)$$

所以函数$f(x)=x\sin x+|x|$为该区间上的偶函数。

例5 判断函数$f(x)=x^3+1$的奇偶性。

解 因为在定义域$D(f)$：$(-\infty,+\infty)$内

$$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq\pm f(x)$$

所以$f(x)=x^3+1$是非奇非偶函数。

（2）函数的周期性

对于函数$y=f(x)$，如果存在常数T，使得$f(x+T)=f(x)$恒成立，则称函数为周期函数，而满足这个等式的最小正数T，称为函数的周期。

例如$y=\sin x$，$y=\cos x$都是周期函数，周期为2π、$\mathrm{tg}x$，$\mathrm{ctg}x$是以π为周期的周期函数。

（3）函数的单调性

如果函数$y=f(x)$在区间(a,b)内的任意两点x_1和x_2处，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是单调增加的（或称单调递增）；当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是单调减少的（或称单调递减）。

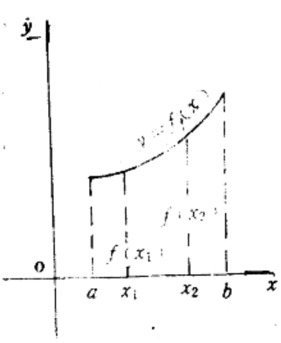


图1－2

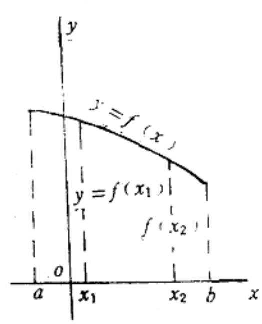


图1－3

单调增加函数的图形是沿x轴正向逐渐上升，如图1－2；单调减少函数的图形是沿x轴正向逐渐下降，如图1－3。可见，单调函数也与区间有关。

(4) 函数的有界性

设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，(a,b)可以是函数$f(x)$的定义域，也可以是定义域的一部分，如果存在一个正数M，对于所有的$x\in(a,b)$，恒有$|f(x)|<M$，则称$f(x)$为(a,b)内的有界函数，否则称为无界函数。

例如$y=\sin x$，$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，而函数$y=1/x$在$(0,2)$内无界，但在$[k,1)(k>0)$内有界。因此函数是否有界，不仅与函数本身有关，而且还与区间有关。

（二） 反函数

某自行车厂把钢材加工装配成自行车的过程中所消耗的电能，每辆自行车耗电量为32度。如果该自行车厂日产量为x辆，消耗电能总量为y（度），则y与x的对应关系为$y=32x$。那末，这种由日产量x确定电能总耗量y的关系，称为电能总耗量y是日产量x的函数；反过来，对于每一个给定的电能总耗量y，则可以由关系$x=y/32$来确定日产量x，这种由电能总耗量y确定日产量x的关系，称为日产量x是电能总耗量y的函数。我们称后一个函数$x=y/32$是前一个函数$y=32x$的反函数。下面给出反函数的定义：

定义 2 设$y=f(x)$是定义在$D(f)$上的一个函数，值域为$z(f)$如果对每一个$y\in z(f)$有一个确定的且满足$y=f(x)$的$x\in D(f)$与之对应，其对应关系记作f^{-1}，那末函数$x=f^{-1}(y)$称为$y=f(x)$的反函数。

把$x=f^{-1}(y)$代入$y=f(x)$就得到恒等式

$$y\equiv f[f^{-1}(y)]$$

明显地看出，$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$表达变量x，y之间的同一个对应关系，只不过是自变量与因变量互易罢了。因而在平面xoy上它们的图形相同。

不过，习惯上通常都用x表示自变量，用y表示因变量。因此我们将$x=f^{-1}(y)$中y与x互换位置便得函数$y=f^{-1}(x)$，这时我们说$y=f^{-1}(x)$是$y=f(x)$的反函数。根据定义，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$互为反函数。

在坐标平面xoy上，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线$y=x$对称的。例如指数函数$y=10^x$的反函数是对数函数$y=\lg x$，它们互为反函数，因而它们的图形是关于直线$y=x$对称的，见图1-4。

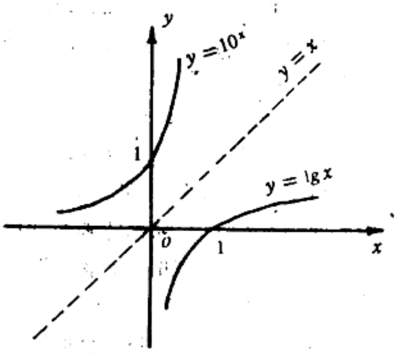


图 1-4

例6 求函数$y=3^{2x-1}$的反函数。

解 $y=3^{2x-1}$的定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$值域$z(f)=(0,+\infty)$。解出

$$x=\frac{1}{2}(\log_3 y+1)$$

互易变量x与y后，所求反函数为

$$y=\frac{1}{2}(\log_3 x+1)\qquad x\in(0,+\infty)$$

（三） 复合函数

设y是u的函数：$y=f(u)=u^2$；u是x的函数：$u=\varphi(x)=\sin x$，如将$u=\sin x$代入$y=u^2$得$y=\sin^2 x$，则此函数称为复合函数。一般地有如下定义：

定义 3 假定有两个函数

$$y=f(u) \qquad u=\varphi(x)$$

前一函数的自变量是u，因变量是y，后一函数的自变量是x，因变量是u，如果将$u=\varphi(x)$代入$y=f(u)$中就得到

$$y=f[\varphi(x)]$$

它是因变量y通过"中间变量"u与自变量x联系起来得到的函数，称为f和φ的复合函数，或简称复合函数。

复合函数的定义域是由$D(\varphi)$中那些使$\varphi(x)$属于$D(f)$的x组成，即是使得$u=\varphi(x)$的函数值落在$y=f(u)$的定义域内所对应的x值的全体。因此，要先求出$y=f(u)$的定义域$D(f)$，再根据$D(f)$及$u=\varphi(x)$的定义域$D(\varphi)$确定x的取值范围。而这种将一个函数代入另一个函数的运算称为复合运算。

例7 设$y=\lg u$，$u=x^2$

将$u=x^2$代入函数$y=\lg u$中就得到复合函数

$$y=\lg x^2$$

例8 设$y=\cos 2^x$，则该函数是由下列函数

$$y=\cos u, \quad u=2^x$$

经复合运算而得到的复合函数。

函数的复合运算可以推广到两个以上有限个函数复合的情形。

如 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$

若将$v=\psi(x)$代入$u=\varphi(v)$中，得

$$u=\varphi(\psi(x))$$

再将u代入$y=f(u)$中，这样依次代入就可得复合函数

$$y=f[\varphi(\psi(x))]$$

（四） 基本初等函数

1．常数：$y=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$图形为平行于x轴截距为c的直线，如图1－5。

2．幂函数：$y=x^a$（a为实数）

它的定义域随a而异，但不论a为何值，在$(0,+\infty)$内总有定义，而且图形都经过$(1,1)$点。

如$y=x^2$，$y=x^{\frac{2}{3}}$等，定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形对称于y轴（见图1－6）

$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{3}}$定义域为$(-\infty,+\infty)$图形对称于原点（见图1－7）。

$y=x^{-1}$定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$图形对称于原点（见图1－8）。

$y=x^{\frac{1}{2}}$定义域为$[0,\infty)$（见图1－9）。

3．指数函数：$y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$）

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$图形都通过$(0,1)$点。当$a>1$时，函数单调增加当$0<a<1$时，函数单调减少（见图1－10）。

4．对数函数 $y=\log_a^x$ （$a>0$，$a\neq1$）

定义域为$(0,+\infty)$，图形都通过$(1,0)$点。当$a>1$时，函数单调增加；当$0<a<1$时，函数单调减少，如图1－11所示。对数函数与指数函数互为反函数。

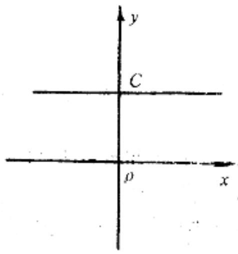


图1－5

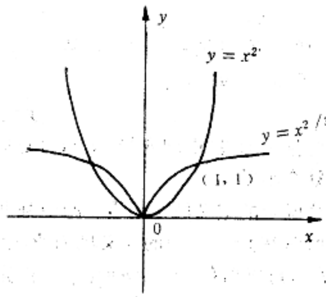


图1－6

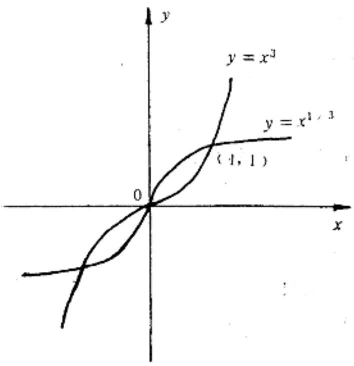


图1－7

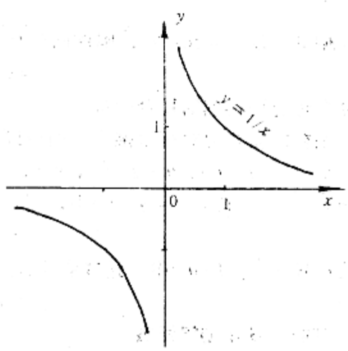


图1－8

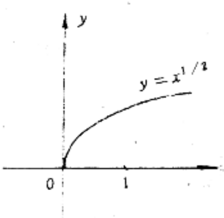


图1－9

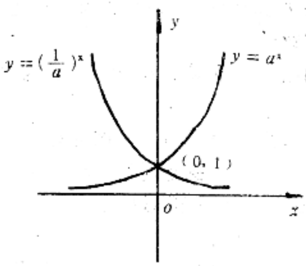


图1－10

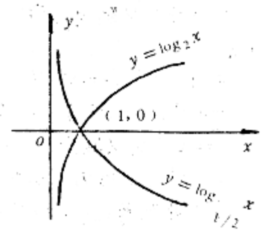


图1－11

5．三角函数

三角函数有 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg} x$，$y=\operatorname{ctg} x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$。前两个函数的图形见图1－12；第三、四个函数的图形见图1－13；前四个函数的性质列表如下：

名称		$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg}x$	$y=\operatorname{ctg}x$
$D(f)$定义域		$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x\neq n\pi$
$z(f)$值域		$\lvert y\rvert\leqslant 1$	$\lvert y\rvert\leqslant 1$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
周期		$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
有界		有界	有界	无界	无界
奇偶		奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调	增	$\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$	$(-\pi+2n\pi,2n\pi)$	增函数	
	减	$\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi,\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)$	$(2n\pi,(2n+1)\pi)$		减函数

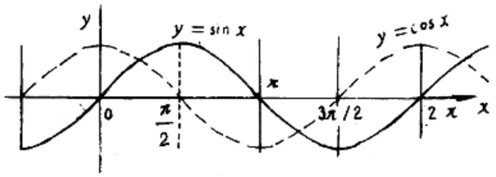


图 1－12

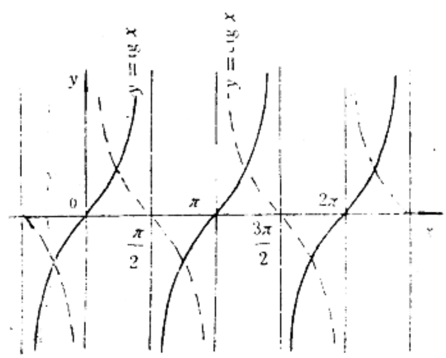


图 1－13

6．反三角函数

反三角函数有：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\operatorname{arctg}x$，$y=\operatorname{arcctg}x$，$y=\operatorname{arcsec}x$，$y=\operatorname{arccsc}x$。由于本书不涉及此类函数，其性质就不赘述了。

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算构成的并且可用一个式子表示的函数，称为初等函数。由此可知，分段函数一般说不是初等函数。但也有例外，如分段函数 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0\end{cases}$ 令 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$，则 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 又可以看成是初等函数。

（五） 几种简单的经济函数

1．成本函数与平均成本函数

如果某工厂每生产一个单位产品，要消耗一定的原材料、劳力、能源等，需支出 a 元，则生产 q 个单位产品的支出为 aq 元，但在投产前，工厂还必须一次性地投入一笔较大的生产准备费 b 元，用以建厂房，添机器设备，制作工具、模具等，所以生产 q 个单位产品的总成本(函数)是

$$C=C(q)=aq+b$$

其中常数 b 称为固定成本，a 称为单位可变成本，aq 称为可变成本。即

总成本＝可变成本＋固定成本

$C(q)/q$ 表示生产 q 单位产品的平均成本，记为 $\overline{C}(q)$。

如果在核算成本时，还须考虑其它的费用如运输费用等，这时设生产的总产量为 q，单位可变成本为 a，固定成本为 b，运输 q 个单位产品的费用(即运输成本函数)为 $C_1(q)$，则

总成本$C(q)$应为

$$C(q)=aq+b+C_1(q)$$

这时平均成本函数仍为

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}$$

例 9 某机床厂最大生产能力年产量为m台机床，固定成本为b元，每生产一台机床，总成本增加a元，试求可变成本函数，总成本函数及平均成本函数。

解 设生产q台机床，$q\in[0,m]$。

可变成本函数为 $C_1(q)=aq$

总成本函数为 $C(q)=C_1(q)+b=aq+b$

平均成本函数为 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}=\dfrac{aq+b}{q}=a+\dfrac{b}{q}$

2．需求函数与价格函数

在市场经营中，有很多因素影响着消费者购买一种商品的需求量Q，如有商品的价格P，消费者的收入水平，商品选择的范围等等，其中商品的价格P是影响需求量Q的基本因素。如果把消费者的需求量Q只看作与价格P有关，那么需求量可看成是价格的函数$Q=f(P)$。容易明白：一般的，当价格P上升，需求量减少，反之价格P下降而需求量增加，于是需求函数是价格P的单调减少函数。

如果我们给出了商品的需求量Q关于价格P的函数$Q=f(P)$，若要核定商品的价格P，则$P=\varphi(Q)=f^{-1}(Q)$（它称为价格函数）。可见，需求函数与价格函数互为反函数。

例 10 一种商品，当每件售价为8元时，每天可卖出1000件，如果每件售价每降低0.2元，则可多卖出40件，试求卖出件数与售价的函数关系（即需求函数）。

解 设卖出件数为Q，价格为P，由题意知，卖出件数的增加量为$[(8-P)/0.2]\times 40$，则所求的需求函数为：

$$Q=1000+\frac{8-P}{0.2}\times 40=1000+1600-200P=2600-200P$$

3．供给函数

在市场经营中，生产厂家对某种产品的供给量受多种因素（如生产能力、技术条件、市场价格等）的影响，假定供给量Q仅与市场价格P有关，则$Q=g(P)$称为供给函数。显然，当价格P上升时，生产厂家愿意提供更多数量的产品。因此，供给函数是价格P的单调增加函数。但是，当价格P上升时，消费者却要减少对这种商品的需求量。我们把需求函数$f(P)$与供给函数$g(P)$之差叫做需超函数，记作$h(P)$，有

$$h(P)=f(P)-g(P)$$

如果存在这样的价格P_0，使得$h(P_0)=0$，即$f(P_0)=g(P_0)$，则称P_0为均衡价格。当$P<P_0$时，$h(P)>0$，即$f(P)>g(P)$，此时需求量大于供给量，供不应求；价格P将上升；当$P>P_0$时，$h(P)<0$，即$f(P)<g(P)$供给量大于需求量，此时供过于求，价格P将下降。均衡价格P_0所对应的Q_0称为平衡需求量，或平衡供给量。而点(P_0, Q_0)称为均衡点（见图1－14）。

4．销售总收入函数与利润函数

设商品销售量为Q，销售价格为P，则全部销售总收入函数R应为

$$R=PQ$$

它一般地可表示为销售量Q的函数：$R=R(Q)$。

设某商品的总成本函数为$C(Q)$，销售总收入函数为$R(Q)$，则销售该商品Q个单位时的总利润函数$L(Q)$为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

即为总收入函数减去总成本函数。

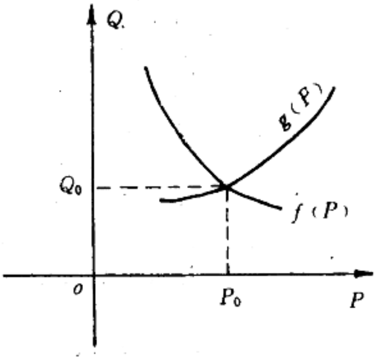


图1-14

当存在这样的销售量Q_0，使得$L(Q_0)=0$时，即$R(Q_0)=C(Q_0)$，则Q_0称为盈亏临界点(或损益分歧点)。显然当$Q>Q_0$时，盈利；当$Q<Q_0$时，亏本；当$Q=Q_0$时，收支相抵。

例11 某工厂在生产某产品(单位：公斤)时的固定成本为1000元，每单位产出的可变成本为4元，若该产品销售单价为8元，求：①可变成本函数；②总成本函数；③销售总收入函数；④总利润函数；⑤盈亏临界点。

解 设产品的产量为Q，则可变成本函数 $C_1(Q)=4Q$（元）

总成本函数 $C(Q)=1000+4Q$（元）

销售总收入函数 $R(Q)=8Q$（元）

总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=8Q-(1000+4Q)=4Q-1000$（元）

由$R(Q)=C(Q)$可得盈亏临界点

$$Q_0=250(\text{公斤})$$

5．生产函数

一个生产过程就是投入一定数量的生产要素，产出一定数量的产品，假定在生产过程中，以x表示生产要素的投入量，y表示产品的产出量，则生产函数可记作：

$$y=f(x)$$

这个函数又称总产量函数。

例12 设某企业生产某产品的产出数量y是投入量x的二次函数，经统计得知当$x=0$，2，4时，产出量$y=0,6,8$。试确定该生产过程的生产函数。

解 设产出量y与投入量x的函数关系为$y=ax^2+bx+c$，由题意知

$y(0)=0$ 得 $c=0$；$y(2)=6$；$y(4)=8$可得方程组：

$$\begin{cases}4a+2b=6\\16a+4b=8\end{cases}$$

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=4$

所以生产函数为

$$y=-\frac{1}{2}x^2+4x$$

6．简单的存储控制模型

简单的存储控制模型是生产管理中一个典型的数学模型，又称为库存问题。它是要确定出采购进货的批量以便使得采购费用和存储费用之和最省。在分批进货，不允许短缺的简化条件下，假定存储量为批量的一半。

例如，某工厂一年要购进国外的生产部件为a件，每个部件的单价为P元，每次订购部件的费用为b元，部件进库后均匀地供给车间，设每年每件存储费为c元，若要写出一年总费用y与批量x的函数关系，则可用以下方法计算：

依题意每年的订购次数(即批数)为a/x，年订购费用为$b\cdot a/x$（元），存储费用为$c\cdot x/2$（元），购买部件费用为$p\cdot a$（元）。

于是总费用y与批量x的函数关系为

$$y=\frac{ba}{x}+\frac{cx}{2}+pa$$

§1.2 极限

(一) 数列的极限

公元三世纪，我国数学家刘徽提出割圆术，利用圆的内接正多边形推算圆的面积。

对于一个圆，作内接正三角形、正六边形、正十二边形、正二十四边形、循此下去，设内接正$3\times2^{n-1}$边形的面积为A_n($n=1,2,\cdots\cdots$)，则有一系列面积的值：

A_1，A_2，……，A_n，……

当边数越来越多时，A_n将越来越接近圆的面积，这时，我们说A_n以圆面积为极限，这是我国古代极限方法在几何上的应用。

1．数列与极限

(1) 数列　依照某种法则，按一定顺序排列着的一串数，叫做数列，例如函数$y_n=f(n)$，当n遍取自然数时，得到

$f(1),f(2),f(3),\cdots\cdots f(n),\cdots\cdots$

就称为一个无穷数列，简称数列。数列中的每一个数称为数列的项，$f(n)$称为数列的通项或一般项。

例如：

(1) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，……，$\frac{1}{2^n}$，……

(2) 3，2，$\frac{5}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{7}{5}$，……，$\frac{n+2}{n}$，……

(3) 3，9，27，……，3^n，……

(4) 0，1，0，1，……，$\frac{1+(-1)^n}{2}$，……

这些都是数列，随着n增大，有着各自的变化趋势。对于(1)，正如战国时代哲学家庄周在《庄子天下篇》中曾说："一尺之棰，日取其半，万世不竭"，这就是数列(1)变化趋势，它无限

接近于零；对于(2)也有确定的变化趋势，它无限接近于1；对于(3)的变化趋势是越来越大；对于(4)它总在0与1之间来回摆动。

(2) 数列极限

为考察数列 $y_n=f(n)$的变化趋势，先看下面 n 个数列：

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots$

(2) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots\cdots$

(3) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots\cdots$

为清楚起见，我们分别把这三个数列在坐标平面上表示出来，横轴表示自然数n，纵轴表示数列取值 y_n(见图1－15，1－16，1－17)。

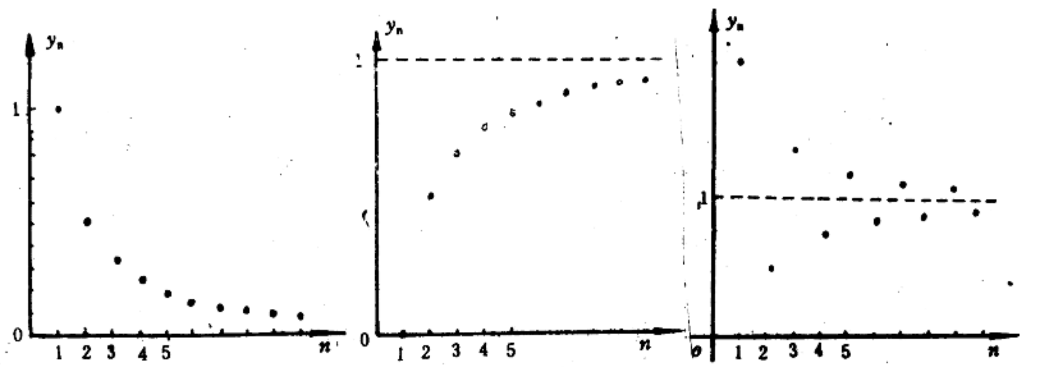


图1－15　　图1－16　　图1－17

由图1－15可见，数列 $y_n=1/n$ 的点，当n无限增大时，无限接近于0；由图1－16可见，数列 $y_n=(n-1)/n$ 的点，当n无限增大时，无限地接近于1；由图1－17可见，数列$y_n=(n+(-1)^{n-1})/n$ 的点，当n无限增大时，无限地接近于1。

归纳这三个数列的变化趋势，可知在n无限增大过程中，y_n都无限接近于一个确定的常数。一般地，我们给出下面的定义：

定义1　如果n无限增大时，数列 y_n无限接近于一个确定的常数A，那末，A 就叫做当 $n\to\infty$时数列y_n的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} y_n=A，\text{或当 } n\to\infty\text{时}，y_n\to A$$

这时也称数列 y_n收敛于A。如果当$n\to\infty$时，y_n并不趋近于一个确定的常数，则说数列y_n的极限不存在，或说数列 y_n是发散的。

因此，数列(1)的极限是0，记为$\lim\limits_{n\to\infty} 1/n=0$；数列(2)的极限是1，记为$\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)/n=1$；数列(3)的极限是1，记为$\lim\limits_{n\to\infty}(n+(-1)^{n-1})/n=1$。

例1　观察下面数列的变化趋势，写出它们的极限。

(1) $y_n=\frac{n+1}{n}$　　(2) $y_n=2-\frac{1}{n^2}$　　(3) $y_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}$