DIAN GONG
SHU XUE

电工数学

上册

周克定 编著

华中工学院出版社

内　容　提　要

本书是作者根据历年来在国内多次为有关教师讲授“电工数学”的讲稿综合整理修改补充而成的．书中主要介绍了现代电工领域中常用的属于经典数学范围的一些主要数学概念和方法．

全书分上、中、下三册共七章．上册为第一章：高等代数，主要介绍了近世代数和线性代数的一些基本内容．

本书可作为高等院校电工类各专业高年级学生或研究生的“电工数学”教材或教学参考书，亦可供电工方面的教师或科技人员参考．

电　工　数　学

上　册

周克定　编著

责任编辑　唐元瑜

＊

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行

华中工学院印刷厂印刷

＊

开本：787×1092 1/32　印张：9.375　字数：213,000

1984年11月第一版　1984年11月第一次印刷

印数：1—8,000

统一书号：13255—028　定价：1.95元

前言

电工技术和电工理论的发展，愈来愈要求电工方面的科技人员掌握更多的数学工具。编写本书的目的，就是介绍在现代电工领域中常用的属于经典数学范围的主要数学概念和方法，为该领域的有关人员阅读专业书刊和进修提高提供一些数学预备知识。

为了照顾工程技术人员的学习需要，因此本书在作者认为特别重要的问题上，比较详细地阐述了涉及到的数学名词、定义、基本概念和它们的实际意义。在内容安排上，则根据实践需要，对材料有所选择，着重介绍与电工方面有关的分析和计算方法，以及相应的函数、方程和计算公式，而不强调数学系统的完整性。每章都从电工方面引入一些例题，并作出解答分析，使数学与电工理论相互渗透、相互促进，从而深化概念。通过例题的讨论，电工方面的科技人员，可以比较容易地掌握一些有关的数学概念和方法，并可以比较熟悉地把这些数学知识应用于自己的专业领域。

作者完全同意法国德布洛依教授在《电工、电信工程师数学》一书的序言中所发表的意见：“对于物理学者和工程师，过分严密的证明是不需要的，主要是阐明数学的实质及其方法。”为了突出重点，节省篇幅，书中省略了某些较长的严密证明和演算推导。读者有必要时，可以参考有关的数学著作或各章末尾所列举的参考文献。

本书是根据1961—1962年为华中工学院电工学教研室全体

教师讲授“工程数学”、1981年为曲阜师范学院数学系和物理系部分教师讲授“应用数学”、1982年为华中工学院电力工程系部分教师讲授“电工数学”的三次讲稿综合整理修改补充而成的。全书分为上、中、下三册，全部内容包括高等代数、矢量微积分与张量分析、复变函数、傅里叶分析与积分变换、数理方程与特殊函数、变分法与积分方程、非线性系统的数学分析方法等七章。上册仅包括第一章：高等代数。它包括近世代数和线性代数的一些基本内容，如集、映射、群、环、域、线性空间、矩阵的特征值、二次型、内积空间等。全书各章、节均按数学系统叙述。在内容安排上，假设读者已具备我国高等工科院校《工程数学》教材中所包含的基本知识。但为了把问题讲清楚，使内容相对完整、独立，有些地方可能与《工程数学》的内容有重复。

必须指出，本书列举有关电工方面的例子，目的不在于解答电工课题，而是想通过例题来说明有关的数学概念和运算方法。有时，一个电工问题可能被多次引用，并从不同的角度来说明一些不同的数学概念和方法。例如复矩阵

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

在讲线性变换群时，它是作为一个线性算子，直接把不对称的三相相量（如$\dot{I}_a$，$\dot{I}_b$，$\dot{I}_c$）变换成三相对称分量（$\dot{I}_1,\dot{I}_2,\dot{I}_0$）；在讨论线性空间的基底变换时，它是作为从三相轴系变换到对称分量轴系的基转换矩阵；在研究矩阵的特征值问题时，它是由三个线性无关的特征向量组成的可用来使三相运算阻抗矩阵对角化的变换矩阵；而在讨论酉空间的酉变换时，它是作为酉矩阵的典型例子。

本书可作为高等院校电工类各专业本科高年级学生或研究生的“电工数学”教材或教学参考书，亦可供电工方面的教师或科技人员参考。

本书在编写过程中，得到了华中工学院有关领导和同事们的关心与鼓励；特别是在上册付印前，又承蒙数学系副主任高志祥副教授通读了原稿，并提出了许多宝贵意见；电机教研室周海容同志为本书的抄誊和绘图做了大量的工作；华中工学院出版社为本书的出版给予了大力的支持，责任编辑唐元瑜同志为本书的编辑出版付出了辛勤和细致的劳动。在此，一并表示衷心的感谢。

由于编写时间仓促，作者水平有限，经验不足，因此书中错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

周 克 定

1984年6月于武汉

目　　录

第一章　高等代数

数学来源于社会实践，是客观世界的反映。数学的概念、理论和方法都在社会实践（最基本的是生产实践）中不断得到充实和发展。

为与古代社会生产水平相适应而建立起来的初等数学，主要是研究固定的量和固定的空间图形。随着生产力的提高和航海、采矿、商业等等社会实践的日益丰富，要求用运动、变化和发展的观点来研究事物。1637年法国哲学家兼数学家笛卡儿(1596—1650)提出“变数”这个概念是数学发展中的转折点。他在哲学著作《方法论》关于“几何学”的论文中，阐述了解析几何学的两个基本思想——坐标和变数。

应用变数的概念，就可以研究有关事物运动的数值变化规律。这样，一条曲线就不再理解为凝固静止的图形，而是说明某事物状态的一个代表点按一定规律运动时所描绘的轨迹。为了研究运动点的瞬时速度（微分）和根据瞬时速度变化的规律来确定运动的轨迹（积分），而相应建立了微分学和积分学。微积分是许多科学家研究的成果，分别由牛顿（1642—1727）和莱布尼茨（1646—1716）整理而成。从此，数学进入了“高等数学”的阶段。

在现代数学中，“数”和“形”所指的范围，也有很大的变化。“数”不仅是指具体的数字、多项式、矩阵、向量、张量等单一的数学对象，并且还扩展到集合。而一个集合可包含一大批数学对象。“形”也不限于直观表示的图象，而是在高度概括的观点上，研究更抽象的数量关系与结构性质。例如，可

把n元数组（实数或复数）作为n维向量的端点坐标，以便抽象出n元数组的性质，并形式地定义为一种称作n维线性空间(向量空间)的数学系统。虽然维数大于3的空间很难用几何解释，但却仍然用几何向量的名词。作为描述自然现象的抽象概念，使人们对许多事物的认识，更加深刻和统一化。所以线性空间理论，在极其广阔的范围内得到了普遍的应用。

近世代数的研究对象就是具有某种运算规律（结合法）的集合,即所谓代数系.群、环、域是三种最基本的代数系。线性空间M就是任意元素$u\in M$与数域F的任意元素$k\in F$在定义了数乘运算$ku\in M$情况下的一个加法交换群。这些都是本章要介绍的基本内容。

1.1 数学元素与数学模型

在用数学方法研究工程技术和自然现象中的问题时，必然涉及到不同的数学对象（数学元素，简称元），如代数学中的数、函数、变换(映射)、矩阵、数集，几何学中的点、曲线、曲面和数学分析（标准分析）中的极限、导数、积分等等。

为了能用形式化的方法研究实际问题，必须根据工程、物理系统原型的特征和运行状态，用有关的数学元素和一定的结合运算法则与精确的数学语句（可以判断真假的语句，即所谓命题),或图表曲线等来建立数学模型。根据数学模型所确定的定理或关系式以及图表曲线，求出数学上的解或几种参数值的对应关系，便可得到有关问题的数量概念和科学规律。例如，要研究一台电动机的机械特性，必须先建立数学模型，它可以是一组公式或方程，也可以是一个特性曲线族。使用这两种模型，都可以预测随着负载的变化或供电电压的变化，电动机速度（每分钟转数）跟着发生变化的趋势或甚至是具体的数值。

为了使得到的结果能正确反映客观实际，建立的数学模型必须力求准确描述系统的物理状态和运动变化过程。例如，在用电子计算机近似计算某些连续体的参数时，为了解答可靠，就必须采用能保存原有物理特性的离散化的模型；并且建立模型用的公理，其本身应具备相容性、完全性和独立性。

但是数学模型一般并不能表述直接间接影响系统状态或运行行为的一切因素，而只能是描写它们在一定近似程度上的简化模型。所以在建立数学模型的过程中，简化条件的假设是否适当，会直接影响它与它的原型相符合的程度。

一个数学模型，若对它的代表符号赋予不同的含义，则可作不同的物理解释。

例如，连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v)=0. \tag{1.1}$$

这一数学模型，当它用于流体力学时，可以解释任何可压缩或不可压缩的流体流动时密度与速度的关系。并且，对于密度随时间变化的流体，能够导出 $\operatorname{div} v=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$（速度场的发散量），即给出在某一定位置时流体单元密度在单位时间内的改变量；而对于不可压缩的流体，这个改变量应该等于零，从而可以导出不可压缩的条件是：$\operatorname{div} v=0$。最后还可以得到不可压缩流体的速度势应该满足拉普拉斯方程的结论。

当上述数学模型用于电磁场理论时，可以说明电荷量的守恒现象。利用它并结合麦克斯韦第二方程，可以导出静电场微分形式的高斯定律，进而可研究电荷弛豫。在电流场中，上述数学模型又可以用于分析两种不同媒质接触面上电流密度矢量的连续性与突变性。而在交变电磁场中，它又可扩大为全电流的连续性方程。这种全电流的连续性方程消除了 $\nabla\times\bar{H}=\bar{J}$ 与 $\nabla\cdot\bar{J}$

$=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$之间存在的矛盾，确立了位移电流密度与电感应矢量$D$的变化率之间的关系，从而为建立完整的麦克斯韦电磁场理论、证实电磁波的存在和研究电磁波的传播奠定了基础。此外，连续性方程还可以应用于声学，研究声波的传播规律。

又如扩散方程$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u$，它用于热力学，可以解释热传导规律；用于化学可以说明分子扩散性质；用于交变电磁场，可以分析导电媒质中电磁波的渗透、研究集肤效应和涡流现象。

还如二阶常系数线性微分方程，可用于解多种物理问题等。

一个模型也常常可用其它模型来代替，而能够互相代替的模型一般在本质上是相同的。由于模型的转换，有时可以简化问题的分析与求解的手续，有时也可扩大或改变适用的范围。例如分析电网络可以采用图论（割集和回路分析）、信号流图和状态空间等三种方法分别建立相应的模型，其作用均是相同的，只是状态空间法更便于用在瞬变分析和非线性网络中。

又如在分析电机的气隙磁场时，我们可以分别用标量磁位和矢量磁位作为求解变量来建立两种不同的数学模型。这两种模型的求解结果是相同的，它们只是引用的边界条件提法不同，求解过程有些繁简的区别而已。

由于集、群、环、域和线性向量空间等几种数学模型的理论，已经渗透到了数学的许多分支，起着综合经典数学和近代数学概念的作用，因此，它们具有最普遍性的意义。应用它们对许多工程和物理问题的分析和认识会更加方便和深刻；对问题的阐述在数学结构上也可会得到更好的统一。尤其在用计算机解题时，经常会涉及大量的离散数据，因此，必须应用有关处理离散量的数学方法，如集、群、环、域等。所以在工程中研究这些具有普遍意义的数学模型，显得特别重要。

1.2 集　合

集合是现代数学中最基本的概念之一。经典集合论是近世代数的基础。通过集合和集合运算的形式，可以形象地说明许多数学中的理论问题。

集合是指具有某种属性的事物的全体。集合中的事物就称为这个集合的元素（简称元）。以数为元的集合称为数集，以函数为元的集合则称函数集。

如果A代表一个集合，a是A的元素，则记为

$$a \in A,$$

记号"$\in$"表示"属于"的意思，"$a \in A$"读作a属于A。如果一个元素a不在集合A中，记为

$$a \bar{\in} A \text{或} a \notin A,$$

记号"$\bar{\in}$"表示"不属于"的意思。"$a \notin A$"读作a不属于A。

用"$\forall a \in A$"表示"A中的一切元a"。$\forall$是"ALL"的第一个字母的倒置。

在数学中有一些常用的集合，其惯用符号是：

N代表所有自然数组成的集合；

Z代表所有整数组成的集合；

Q代表所有有理数组成的集合；

R代表所有实数组成的集合；

C代表所有复数组成的集合。

要给出和研究一个集合，首先要指明这个集合是由哪些元素组成的。确定一个集合的方式有两种，一种是列举出它的全部元素，即所谓列举法(即一一列出集合中的所有元素)，例如A是由1，2，3三个数组成的集合，记为

$$A=\{1, 2, 3\}.$$

又如B是由四个代数运算符号所组成的集合，记为

$$B=\{+, -, \times, \div\}.$$

列举法有时也称枚举法.

另一种是概括法，或称特性表示法，它给出这个集合的元素所具有的特征性质. 比如说适合方程$x^2/a^2+y^2/b^2=1$的全部点的集合或某一个线性方程组的解构成的集合等，一般可把它们记为

$$A=\{a \mid a\text{具有的性质}\}.$$

例如

$$N=\{n|n\text{为自然数}\},$$

表示由全体自然数组成的自然数集. 又如

$$X=\{x|x^2-4x+3=0\},$$

表示由方程$x^2-4x+3=0$的根所组成的集合，即

$$X=\{1, 3\}.$$

又如适合方程$x^2/a^2+y^2/b^2=1$的全部点的集合可以写成：

$$A=\left\{(x, y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right.\right\}.$$

显然，这里集合A的元素不可能用列举法给出.

又如不小于零，不大于1的数的全体可记为$\{x|0<x<1\}$或$(0, 1)$，而$[0, 1]=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$.

又如带有小数点的数的集合可写成：

$R=\{x|x=s\cdot a_1a_2a_3\cdots$，$s$是整数，$a_k\in\{0,1,\cdots,9\}\}$.

复数的集合可表示为：

$$C=\{x|x=a+ib,\ a、b\text{是实数}\}.$$

网络拓扑分析中的单树支割集(C_s)和单连支束集(T_s)按照定义可以写成：

C_s(Cut-set) = {b| 全部移去能使网络分成两个分离部分的一组支路};

T_s(Tie-set) = {b|构成一个基本回路的一组支路}.

实际上，一个 C_s 集的支路只有一条是树支，一个 T_s 集的支路只有一条是连支.

一个集合如果包含的元素个数有限则称为有限集合（有穷集），否则称为无穷集合．一个集所包含的元的个数，称为这个集的元数或浓度．有穷集的浓度自然是正整数.

对于有限集，常用列举法表示，如 $T=\{3, 4, 5\}$，但也可以用特性表示法，如 $T=\{t|2<t<6, \ t \text{ 为整数}\}$.

有时，一个有限集中的元素的特征性质不很明显，那么只能用列举法，或者两种方法混合使用.

集合不仅可由元组成，还可用某集合的子集为元组成．为了区别，由元组成的集称为第一层集，用第一层集当作元组成的集称第二层集．有时采用集的同义词，把第二层集称为系（族）或者集族，也称为集类．下面我们来讨论集合的特性和运算法则.

1.2.1 空集

一个不包含任何元素的集合称为空集．例如大于 1 而小于 2 的整数集合是空集；一个半径为 2 的圆周与半径为 3 的同心圆圆周的交点全体组成的集合是空集；一个齐次线性方程组的系数行列式不等于零时，其非零解集合是空集；在实数域中，方程 $x^2+1=0$的解集也是空集．空集常用 θ 或$\varnothing$表示．必须指出，$\{0\}$不是空集，因为它含有数 0，所以$\{0\}$是单元素集．同样，$\{\varnothing\}$也不能代表空集，因为它是以空集$\varnothing$为元素的单元素集．由于以某些集为元素组成的集称为集族，所以$\{\varnothing\}$可看作是一个集族.

确实包含有元素的集合称为非空集合。

1.2.2 子集与包含集

如果集合N中所有的元是集合M中元的一部分，或者说任意一个元，它有N的特性，一定也有M的特性，则称N为M的子集，M又称为N的包含集。记为

$$N\subseteq M或M\supseteq N.$$

如果M中确实有元素不在N中，则N称为M的真子集，M称为N的真包含集，记为

$$N\subset M或M\supset N.$$

例如，$M=\{a|a\leqslant 17\ 的奇数\}$，$N=\{a|a\leqslant 15\ 的\ 3\ 的整倍数\}$。显然这里$N$是$M$的真子集，即$N\subset M$，如图1.1所示（这种图常称为文氏(Venn)图）。

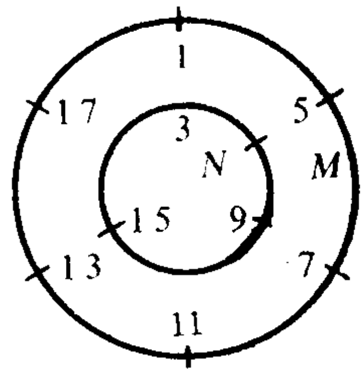

图1.1 $N\subset M$的示意图

一般情况下，$N\subset M$的示意图如图1.2所示。按照前面的规定不难理解，N、Z、Q、R、C等五个数集存在下列关系：

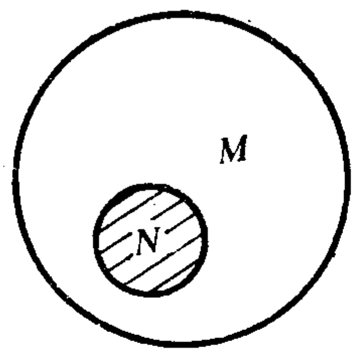

图1.2 真子集和余集一般示意图

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C.$$

又如导数平方可积的函数集是平方可积函数集的真子集。

根据定义，每个集合是它自身的子集；且规定空集是任一集合的子集。

1.2.3 余集(补集)

如果N是M的子集，若用M/N表示M中不属于N的那些元素所组成的集合，则称M/N为N在M中的余集(或称补集)

或称N关于M的余集，记作

$$M/N=\{a|a\in M\text{而}a\overline{\in}N\}.$$

在图1.2中，M/N是在M内未打影线的部分。余集也可用N^c或N'表示。

例如，若Z是全体整数组成的集合，E是全体偶数（包括0）组成的集合，则$E\subset Z$，Z/E便是全体奇数组成的集合。又如在一个网络树形图中，所有树支组成的集合和所有连支组成的集合都是原有连通网络支路组成的集合的子集，并且树支集和连支集互为支路集中的余集。再如$M=\{a, b, c\}$，$N=\{a,b\}$，$N'=\{c\}$，N、N'是M的真子集，M则称为全集。

1.2.4 集合的相等

如果M、N两集合包含有完全相同的元素，即M的所有元都属于$N(M\subset N)$，同时N的所有元又都属于$M(N\subset M)$，则称集M与集N相等，记为$M=N$。

因为集合是“具有相同特征的对象”的全体，且由其元素的特征唯一地确定，故由相同元素组成的两个集合就是相等的。例如$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 1, 2, 3\}$，任取$a\in A$，均有$a\in B$，故$A\subseteq B$；反之，任取$a\in B$，也有$a\in A$，即$B\subseteq A$，故$A=B$。

又如$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$，$C=\{x|$小于5的自然数$\}$，不难看出，$B=C$，因为这两个集合的元素都是1，2，3，4；$A\neq B$，因为元素$4\in B$，而$4\overline{\in}A$。

1.2.5 交集

设A、B是两个集，所有既属于A又属于B的公共元组成的集合P称为A与B的交集（或称通集），记作

$$P = A \cap B$$

$A \cap B$ 读作"A交B"或"A与B的交"。因此 $A \cap B = \{x | x \in A$ 且 $x \in B\}$。

例如，$A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$B = \{3, 4, 5, 6\}$,

则 $P = A \cap B = \{3, 4\}$。

又如，A是全体偶数组成的集合，B是小于 8 的正整数组成的集合，则

$$P = A \cap B = \{2, 4, 6\}.$$

在边值问题中，如果解 $u(x, y)$ 属于平面开区域 Ω 内二次连续可微的函数集 $C^2(\Omega)$，同时又属于在闭区域 $\bar{\Omega}$ 上一次连续可微的函数集 $C^1(\bar{\Omega})$，则可记为 $u(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$，它表示 u 属于二者的交集。如用 Ω^c 表示 Ω 在 R^2(二维欧氏空间)中的余集，则 Ω 的边界 $S = \bar{\Omega} \cap \Omega^c$，即 $\bar{\Omega}$ 与 Ω^c 的交集就是边界。这个关系也可以推广到实 n 维空间。

关于交集的概念，可以用图 1.3 表示。不难看出，P与A、B有下列关系：

$$P = A \cap B \subset A, P \subset B.$$

这种关系表示P是A、B的子集。并且任何集只要它同时是A、B的子集，就一定是P的子集，因此P是包含在A、B中的最大集。

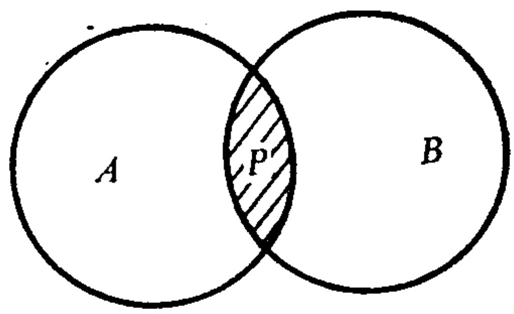

图 1.3 A、B的交集(通集) $A \cap B$

如果 $A \cap B = \varnothing$ 表示A、B无公共元，则称A、B互斥和互不相交，也称 A、B 分离。例如，由偶数组成的集合A和由奇数组成的集合B，它们的交集就是空集，即A、B互斥。又如偏微分方程在平面求解区域中，若边界线 S 上第一类边界条件的区