中学生读物

$\frac{1}{0}=\infty$?

$\sqrt{a^2}=a$?

想一想错在哪里

广东科技出版社

中学生读物

想一想错在哪里

陈云烽　谢平民 编

广东科技出版社

想一想错在哪里

陈云烽　谢平民　编

*

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

广东新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　6.875印张　150,000字

1980年9月第1版　1980年9月第1次印刷

印数1—77,500册

书号13182·27　　定价 0.60元

内 容 简 介

这本形式新颖的数学方法的书，是为中学生编写的课外读物．主要内容是含有错误的数学题解，旨在让读者分析研究，想一想错在哪里，从而加深对中学数学的基本概念、方法、技巧的理解和掌握，提高分析问题和解决问题的能力．全书包括运算、方程、平面几何、平面三角、立体几何、平面解析几何、数学归纳法及其它等七个部分，共二百道题解．每道题例都有完整的解答，但都含有错误，并附有启发思考的提示或正确答案．

本书包涵的数学问题属于初等数学范畴，符合中学教学大纲的要求，适合中学生阅读，也可供中学数学教师参考．

目　录

引　言

这本小册子叫做《想一想错在哪里》，这是因为它的主要内容是含有错误的数学题解，旨在让读者分析研究，想一想错在哪里，从而加深对中学数学的基本概念、方法和技巧的理解和掌握，以提高分析问题和解决问题的能力。

解数学问题时，产生错误的原因，归纳起来有两个方面：一个是粗心大意；一个是对有关的概念和方法的理解掌握存在某些缺陷。善于利用各种各样的错误题解，分析产生错误的原因，研究纠正错误的方法，从中吸取有益的教训，无疑会增进自己的学识。可以说，对于某些解题的方法和技巧，与其正面告你怎样做，倒不如通过对它的错误的讨论，使你领悟其中的奥妙，印象更深刻些。因此，对错误的题解进行分析研究，也是数学方法的教育和训练的一个方面。

本书汇集了二百道典型题解，分为七个部分，每道问题都有完整的解答，但都含有这样那样的错误。究竟错在哪里，有待读者自己仔细地找出来，并予以改正。当然，与阅读给出正面解答的数学题例不同，读者也许要多花些脑筋，但在培养独立思考能力方面必然有较多一些的收获。为了启发读者思考判断，我们在每一个部分的开头，从解题的角度出发，简要介绍有关内容的要点和解题中应注意的一些问题，指出一些常见的错误，而且，题解后面大多附有答案、提示或提示性的问题。但是，我们希望读者在阅读时，能尽量少地利用这些提示材料，尽量多地发挥自己的聪明才智，

更不要受提示材料的局限，应做到独立思考。

本书包涵的初等数学问题，基本上没有超越新编中学数学教学大纲要求的范围，适合中学生课外阅读，也可供中学数学教师教学时参考。书中汇集的题解都是独立的，内容有浅有深，因而读者根据自己的需要，可以全部或部分阅读。

一、运　　算

数的运算，是数学的极其重要的基础之一。它在中小学数学教学中占有极大的比重，每个学生务必切实学好。对于这一点，有些学生还缺乏充分的认识，往往把一些运算中的错误简单地归咎于一时的疏忽，认为是小事，无关紧要。这种态度应当纠正。

从本节收集的错例可以发现，有些错误运算固然是由于不小心所致，但更多的错误是由于对运算规律和运算法则没有掌握好的缘故。

本节错例所涉及的运算，主要是实数的四则运算，方幂运算，指数与对数运算，不等式运算以及复数运算。在进行这些运算时，必须注意下面各点：

1.数字与名称（单位）不要混杂在一起。尤其在数字代入文字公式进行计算时，既要注意单位的关系，又要注意不把单位混杂在算式中。

2.要注意各种运算的前提条件（或先决条件）。例如，作除法运算时零不能作除数，作对数运算时真数必须是正数，等等。有不少学生在作数字运算时会注意到这些条件，但在做文字式运算时往往就忘记了。

3.要正确掌握各种运算规律和运算规则，每一步运算都应有正确的依据。

（1）在四则混合运算中，不仅要记住“先乘除，后加减”的规则，还要记住“乘除中，乘在前先乘，除在前先除；

加减中，加在前先加，减在前先减”的规定。不应把

$$
\begin{aligned}
&60\div3\times4+20\times2\div4-20+15\\
&=20\times4+40\div4-20+15\\
&=80+10-20+15\\
&=90-20+15\\
&=70+15\\
&=85
\end{aligned}
$$

算成

$$
\begin{aligned}
&60\div3\times4+20\times2\div4-20+15\\
&=60\div12+40\div4-20+15\\
&=5+10-20+15\\
&=15-35\\
&=-20
\end{aligned}
$$

（2）在不等式的运算中，当用一个数去乘不等式的两端时，一定要注意这个数是正的还是负的，两端乘以正数时不等号的方向不变，乘以负数时不等号的方向要改变。例如，已知$a_1>a_2$，$b_1>b_2$，则有：

由于$(a_1-a_2)>0$，所以用它乘以不等式$b_1>b_2$的两端，应得

$$b_1(a_1-a_2)>b_2(a_1-a_2)$$

由于$(a_2-a_1)<0$，所以用它乘以不等式$b_1>b_2$的两端，应得

$$b_1(a_2-a_1)<b_2(a_2-a_1)$$

（3）在进行复数运算时，通常用i表示$\sqrt{-1}$，常常写成$i=\sqrt{-1}$，且有$i^2=-1$。在运算中，应防止类似于下面的错误：

$$i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$$

$$=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}$$
$$=\sqrt{1}$$
$$=1$$

须知，在中学数学中，根号“$\sqrt{\quad}$”是作为算术根号被引进的，关于$\sqrt{a}$的值有如下规定：当a是正数时，$\sqrt{a}$表示算术根；当a是负数时，$\sqrt{a}$表示虚数$\sqrt{|a|}\,i$；当$a=0$时，$\sqrt{a}$就是0。因而，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$这个公式只有当$a$，$b$都是非负数，或是一正一负时才是成立的；当$a$，$b$都是负数时，就不能应用这个公式。

4．要注意各种运算技巧的积累，灵活应用有关的运算公式。比如化简

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$$

时，可归化为分数幂的运算，也可归化为根式的运算。即

$$\text{原式}=4^{\frac{1}{2}}(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}(0.1)^2(a^3b^{-4})^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(4^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\times 0.1^2)\,a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\,b^{-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}$$
$$=(4^2\times 0.1^2)\,a^0b^{\frac{1}{2}}$$
$$=0.16\sqrt{b}$$

或者是

$$\text{原式}=\sqrt{4}\cdot\frac{\sqrt{4^3a^3b^{-3}}}{10^2\sqrt{a^3b^{-4}}}$$
$$=\frac{\sqrt{4}}{100}\sqrt{\frac{4^3a^3b^{-3}}{a^3b^{-4}}}$$

$$=\frac{16}{100}\sqrt{b}$$
$$=0.16\sqrt{b}$$

可是有些学生不这样做，一下子用分数幂，一下子又用根式，混杂使用，因而容易出现运算错误。须知，无论进行何种运算，以简为宜，愈简明愈好。这不仅能够减少错误，而且便于复查。

下面列举一些含有错误的题解，请读者想一想，错在哪里？

1. 已知长方形的长 $a=2$米，宽 $b=20$厘米，求周长 l 和面积 S。

解：周长 $l=2(a+b)$

$$=2\times(2+20)$$
$$=44$$

面积 $S=ab$

$$=2\times 20$$
$$=40$$

2. 已知一个长方形的长 $a=9$厘米，宽 $b=4$厘米，要作一正方形使其面积与该长方形相等，问正方形的边长应是多少？

解：正方形的边长应为

$$\sqrt{ab}=\sqrt{4\text{厘米}\times 9\text{厘米}}$$
$$=\sqrt{36\text{厘米}}$$
$$=6\text{ 厘米}$$

3．计算 $5+2\times[14-3\times(8-6)]+32\div(10-2\times3)\times2$

解：原式$=5+2\times(14-3\times2)+32\div4\times2$

$=5+2\times(14-6)+32\div4\times2$

$=5+2\times8+32\div4\times2$

$=5+16+32\div8$

$=5+16+4$

$=25$

4．计算 $\left(\frac{1}{2}+0.6\right)\div\frac{4}{5}+7\times\frac{2}{3}$

解：原式$=0.6\frac{1}{2}\div\frac{4}{5}+\frac{14}{3}$

$=\frac{1+0.6\times2}{2}\div\frac{4}{5}+\frac{14}{3}$

$=\frac{2.2\div4+14}{2\div5+3}$

$=\frac{0.55+14}{0.4+3}$

$=\frac{14.55}{3.4}$

$=\frac{1455}{340}$

$=4\frac{19}{68}$

5．化分数$\frac{22}{7}$为小数。

解：$\dfrac{22}{7}=22\div 7$

$=3.1416$

（提示：注意"="与"≈"的区别。）

6. 化循环小数 $0.\dot{6}\dot{2}$为简单分数。

解：$0.\dot{6}\dot{2}=\dfrac{62}{100}$

$=\dfrac{31}{50}$

$\left(\text{正确答案：}\dfrac{62}{99}\right)$

7. 求$5.\dot{1}\times 6.4\dot{2}$ 的近似值，要求误差不大于0.05。

解：$5.\dot{1}=5.111\cdots$

≈ 5.1 （误差不超过0.05）

$6.4\dot{2}=6.4222\cdots$

≈ 6.4 （误差不超过0.05）

因为乘数因子的误差均不超过0.05，所以乘积的误差也不超过0.05，故所求乘积的近似值为：

$5.\dot{1}\times 6.4\dot{2}\approx 5.1\times 6.4$

$=32.64$

（正确答案：32.8）

8. 已知$(a+1):(2a+b+3)=2:3$，求比值$a:b=?$

解：∵ $\dfrac{a+1}{2a+b+3}=\dfrac{2}{3}$

∴ $a+1=2$ (1)

$2a+b+3=3$ (2)

由(1)式得 $a=2-1$

$=1$

代入(2)式，可求得

$b=-2a$

$=-2$

最后得到比值

$a:b=1:(-2)$

$=-\dfrac{1}{2}$

9．化简式子

$$\sqrt{12}-\sqrt[4]{9}-\sqrt[6]{\frac{1}{27}}$$

解：原式

$$=\sqrt[12]{(2^2\cdot 3)^6}-\sqrt[12]{(3\cdot 3)^3}-\sqrt[12]{\left(\frac{1}{3^3}\right)^2}$$

$$=2\sqrt[12]{3^6}-\sqrt[12]{3^6}-\sqrt[12]{\frac{1}{3^6}}$$

$$=2\sqrt[12]{6^6-\frac{1}{3^6}}$$

$$=2\sqrt[12]{18^6-1}$$

$$=6\sqrt[12]{2^6-1}$$

$= 6\sqrt[12]{63}$

$\left(\text{正确答案：}\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

10．化简式子

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

解： 原式

$$=\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}}$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$=\sqrt{3}$$

（提示：令原式 $=a$， 两边平方，得关于 a 的一个二次方程，并注意到$a>0$，最后可求得原式 $=\sqrt{2}$。）

11．化简式子

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

解：原式

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}})}{-\sqrt{3}}$$

$$+\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\sqrt{2}(2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$$

$$+(2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[-2\sqrt{6}+(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(-2\sqrt{6}+2^3)$$

$$=\frac{2}{3}(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})$$

（提示：本题答案是$\sqrt{2}$。令

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3}\qquad \sqrt{2-\sqrt{3}}=c+d\sqrt{3}$$

利用恒等变换和解方程的方法，确定a，b，c，d诸值，代入原式再化简。

解本题的关键在于变双层根式为单层根式，读者还可想出其他解法。）

12．a^0是什么意思？其值为多少？

解：因为a^n是n个a相乘，所以a^0是0个a相乘的意思。其值为

$a^0=0\cdot a=0$

13．计算$m\sqrt{(m-n)^2}+n\sqrt[3]{(m-n)^3}$

解：原式

$=m(m-n)+n(m-n)$

$=m^2-mn+nm-n^2$

$=m^2-n^2$

（正确答案：当$m\geqslant n$时为m^2-n^2；$m<n$时为$-(m-n)^2$。）

14．计算$\sqrt[12]{x^6y^6}+\sqrt[4]{49x^2y^2}$

解：原式

$=x^{\frac{6}{12}}y^{\frac{6}{12}}+\sqrt{7xy}$

$=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\sqrt{7}\sqrt{xy}$

$=(1+\sqrt{7})\sqrt{xy}$

（正确答案：$(1+\sqrt{7})\sqrt{|xy|}$）

15．计算下式

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}-\sqrt{x^2-2xy+y^2}$$

解：〔方法一〕

原式

$=\sqrt[3]{(x+y)^3}-\sqrt{(x-y)^2}$

$=(x+y)-(x-y)$

$=2y$

〔方法二〕