

# 中级微观 经济理论 数学方法

〔美〕詹姆斯·M·亨德森

里查德·E·匡特

苏通译

北京大学出版社

著

# 中级微观经济理论

数学方法

【美】詹姆斯.M.亨德森 里查德.E.匡特 著

明尼苏达大学  
经济学教授

普林斯顿大学  
经济学教授

苏 通 译

北京大学出版社

北京·1988

F224

**MICROECONOMIC THEORY**  
**A Mathematical Approach**  
*James M. Henderson Richard E. Quandt*  
McGraw-Hill Book Co.  
3rd Edition 1980  
3rd Printing 1985  
根据麦克劳-希尔图书公司1980年第3版  
1985年第3次印刷本译出

**中级微观经济理论**  
**数学方法**  
〔美〕詹姆斯·M.亨德森 里查德·E.匡特 著  
苏 通 译

\*

北京大学出版社出版  
(北京大学校内)

北京市昌平环球科技印刷厂印刷  
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

850×1168毫米 32开本 18印张 450千字  
1988年8月第一版 1988年8月第一次印刷

印数: 00001—6000册

ISBN 7-301-00262-9/F·023

定价: 4.45元

## 出版说明

我国经济发展中的改革和开放，为经济科学的蓬勃发展创造了我国历史上空前的良好环境。每一个有志于经济科学事业的人，无不为我们这样的时代而热血沸腾，深感幸运。因为，这是一个需要用智慧和知识进行伟大创造的时代，一个蕴藏着进行伟大创造机会的时代，一个奠定着成就伟大事业基础的时代，一个扬起了伟大发展之帆的时代！在这催人振奋的时代，我们每一个人都任重道远。我们需要创造，但更需要学习，在现阶段，尤其是这样。我们不仅要学习马列主义毛泽东思想，而且要掌握人类迄今为止的一切优秀经验、理论和方法，以为我国的社会主义现代化事业服务。就经济科学而言，稍具历史感的经济学工作者都不难认识到，时代要求经济科学取得广泛而深入的革命性发展，建立起系统、严谨的宏大科学体系。为此，除了认真调查研究我国经济运行及其规律而外，还应该正确地学习和利用一切现有的科学研究方法。根据这种情况，我们拟在经济学专家的指导和帮助下，出版一些西方学者研究、介绍经济科学研究方法的一流著作，供国内经济学研究者学习和参考。本书是其中的一种。应当说明，从马克思主义的观点看，西方的经济学是精华与糟粕交混、鲜花与毒草并存的理论，要取其精华、摘其鲜花，必须对其进行正确的离析和辨别。不过，我们不想在这里以粗心而浅薄的批判来代替认真而深入的离析和辨别。因为，我们的图书是面向高水平的读者的，我们相信我们的读者自有淘尽黄沙取真金的能力。

04336

## 数学在西方经济学中的历史应用

经济学是研究人类社会生活中经济关系的科学。在经济学中，经济变量数量关系的研究，是经济学研究中必不可少的基本组成部分，是经济理论产生、确证、完善和发展的重要手段。

经济变量数量关系的研究，必须借助于研究现实世界空间形式和数量关系的数学。数学是经济学工具箱中的利器之一，它在西方经济学中应用的历史较长、范围较广、程度较深、作用较大。本文是译者试图根据自己学习所得，对数学在西方经济学中的应用作一纵向鸟瞰，作为中译本序，希望由此能便于读者对本书的学习。限于才疏学浅、资料不足、精力所制，文中挂一漏万、轻重畸偏、评判失当等，恐多有所在，敬请读者斧正。

### 一

西方经济学作为一门独立的学科是在17世纪问世的，而人类认识经济问题的努力，则至少比此早两千年。换言之，一部西方经济学说史如果从色诺芬、柏拉图和亚里士多德落笔，是不会毫无道理的。但是，在17世纪以前的有关经济思想著作中，虽然我们也能找到一些运用数字说明经济问题的例子，但至今还没有发现一本自觉地运用数学方法研究经济问题的著作。

在西方经济学史上，最先有意识地运用数学（主要是统计）方法研究经济问题的是英国的约翰·格朗特，他在1662年出版了一个小册子，名字叫做《对于同管理、宗教、贸易、空气、疾病和上述城市其它变化有关的死亡率通报的自然和政治方面的观

察》。作者在书中运用当时所有有关的少得可怜的统计数字，对人口死亡率和出生率、两性比率和平均寿命、人口迁移及死亡的主要原因等重要问题，破天荒地有意识地作了合理的分析研究，这当中并且蕴含了在18世纪才奠定的统计学的严格数学基础的一些基本思想，格朗特因此而与他的老朋友威廉·配第一起成了人口统计学的奠基人。

对于威廉·配第，大家自然不会陌生。主要由于他具有了商品的价值由劳动决定的经济思想，马克思曾称他为“政治经济学之父”。<sup>①</sup>配第在经济理论方面还有一些其它举世公认的建树，但我们这里感兴趣的是他在著名的《政治算术》（1676年前后写成，1690年出版）一书中所运用的当时“不是常见”的研究方法，是那种力图“用数字、重量和尺度来表达自己的问题”的方法<sup>②</sup>。配第为了用客观的统计数字来证明英国并不比法国穷、也不比法国弱，在自己的著作里出色地运用了他所掌握的有限的统计数字，第一个对英国当时的国民财富作了计算（虽然并不、也不可能很精确），并且在历史上第一次提出了建立国家统计机构、计算国民收入和国民财富的必要性，首次拟定了搜集统计数字的一些基本方针。配第的《政治算术》和格朗特的小册子构成了西方经济学史上应用数学工具作为分析手段的第一个里程碑。

配第以后，对数学在经济学中的运用作出特殊贡献的要数法

---

① 《马克思恩格斯全集》，第23卷，第302页。但是，配第的劳动价值论——自然价格论实际上还只能说具有了劳动价值论的雏形。配第没能严格区分价值、交换价值和价格，并且还明确提出了与劳动价值论相悖的劳动与土地共同创造价值的父母说（参见威廉·配第：《赋税论、献给英明人士、货币略论》，商务印书馆1963年，第71页）。配第的价值论中明显地带有重商主义的因素。因此，大多数西方经济学家认为，配第充其量不过是重商主义的一位最有才能和最进步的代表。他们不承认配第是政治经济学的鼻祖。但是，对于配第创立用数学（主要是统计）方法研究经济问题的功勋，还是公认的。

② 威廉·配第：《政治算术》，商务印书馆1963年，第8页。

国重农学派的创始人弗朗索瓦·魁奈。魁奈在1758年发表了著名的《经济表》，并在1776年的《经济表分析》中作了简化，成为《经济表算学范式》。在《经济表》中，魁奈以精心假设的经济数量关系，在经济学史上第一次对社会总资本的简单再生产和流通作出了自己的说明，包括农产品的社会分配、社会各经济部门的相互联系和农业的基础作用。魁奈的《经济表》可以说是整个经济学史上的第一个宏观经济模型。

几乎与魁奈同时，亚当·斯密以一部《国富论》创立了英国古典政治经济学的理论体系，同时也奠定了数理经济学诞生以前西方经济学的基本研究方法的基础。在英国古典政治经济学统治时期，虽然不难在某些地方寻找到借助数字表述经济理论的地方，如斯密对劳动分工作用的论述，李嘉图关于地租理论的论证，但这种方法在他们的著作中，几乎不占有地位。他们的主要研究和论述方法是历史方法、逻辑方法和抽象方法，这些方法在当时历史条件下是比较科学的，适应于当时经济研究和经济发展的要求的，并且至今仍是很重要的研究方法。然而，当它们伴随着英国古典政治经济学以及此后的约翰·斯图亚特·穆勒的折衷体系一起主宰经济学界并带有排它性时，却无疑地妨碍了数学向经济学的渗透。这至少可以部分地说明第一部数理经济学著作为什么设在资本主义经济关系和经济学说都最发达的英国问世，而“杰文斯的革命”则是乘英国古典政治经济学衰落之势而兴起的。

与“日不落帝国”情形不同，在法国，数学在经济研究中的作用继魁奈之后得到了进一步加强。其中，著名经济学家康纳是数理经济学问世前最杰出的代表。康纳在1801年出版了《政治经济学原理》一书。在书中，为了确定价格决定机制，他利用了一系列公式规定和推演来表述他的理论。康纳认为价格是买主与卖主力量竞争的结果，竞争的力量与对方的需求和竞争成正比，商品的最低价格等于生产该商品的工资，这样，康纳通过一些推理过程得到了下列价格方程，并结合方程作了理论分析：

$$P = S + \frac{BN}{BN + bn} L$$

其中,  $P$  为商品价格,  $S$  为生产单位商品的工资,  $B$  和  $N$  为买主的需求和竞争,  $BN$  为卖主力量,  $b$  和  $n$  为卖主的需求和竞争,  $bn$  为买主力量,  $L$  为卖主想得的最高价与买主愿出的最低价之差,  $[BN/(BN + bn)]L$  则为买主能够接受的高于最低价的加价额。康纳然后进一步探讨了由许多厂商生产出来的产品的定价问题, 其中又分买主和卖主力量相等与不相等两种情形进行了讨论, 最终得出了由多家厂商生产且在生产各阶段买卖双方力量不等时的产品价格决定公式:

$$P = S + S' + S'' + \dots + \frac{\left(\frac{c}{bn} + \frac{c'}{b'n'} + \frac{c''}{b''n''} + \dots\right)\lambda}{\frac{c}{bn} + \frac{c'}{b'n'} + \frac{c''}{b''n''} + \dots + \frac{C}{BN}}$$

其中,  $P$  为商品价格,  $S, S', S'', \dots$  为商品各生产阶段的工资,  $\lambda$  为各阶段的价格差额  $L, L', L'', \dots$  之和,  $C, C', C'', \dots$  为各生产阶段的“能力”(康纳认为它取决于劳动消耗量, 决定  $\lambda$  在各生产阶段的分配),  $\frac{c}{bn}, \frac{c'}{b'n'}, \frac{c''}{b''n''}, \dots$  为各卖主(或厂商)的力量,  $\frac{C}{BN}$  为消费者力量。

康纳是“数理经济学之父”库诺的先行者, 他在运用数学方面的卓越努力, 使他的经济学具有了比较完善的数学形式。

## 二

康纳以后, 西方经济学运用数学的历史掀开了新的一页, 一门新兴的经济学分支——数理经济学问世了。

数理经济学的英文是 *Mathamatical Economics*, 因而又可



叫做数学经济学。人们一般认为，数理经济学是广泛、系统地运用数学符号、公式、图表和方法，研究和表述经济现象及其相互关系中数量关系变化规律的一门经济学科。它的最一般形式是把各种经济学说表述成一般的函数和方程式系统形式，并据以推理，引出结论。

经济学家们通常认为，数理经济学的诞生是与法国经济学家（也是著名的数学家）奥古斯丁·库诺的名字联系在一起的。他在1838年出版的《财富理论中数学原理的研究》一书，被认为是最早的数理经济学著作，库诺因此而荣膺了数理经济学奠基者的光荣称号。

库诺在经济学史上第一部数理经济学著作中，第一次提出了需求函数和收益函数，并用以说明从垄断、多头垄断到完全竞争之间的一系列市场情形下的价格决定问题。

库诺首先把一些基本的经济范畴看作是一定的变量的函数，然后规定函数的基本关系，再研究这些函数的特点，阐明这些函数的极大值条件。例如，库诺认为，一种商品的需求量（ $D$ ）是该商品价格（ $P$ ）的函数，即 $D = F(P)$ ，这就是库诺第一个确定的需求函数关系式。他并且指出，这个需求函数虽然对各个个人是不连续的，但对整个社会而言却是连续的，因而，从社会角度看， $F(P)$ 是连续可微的。由此，库诺对不同市场上的价格决定问题展开了分析。他的分析始终贯穿着从简单到复杂的抽象法。库诺首先分析垄断情形，并且以占有自然资源，因而没有生产费用的垄断者为起点。对于只有一个供给者的垄断市场，库诺假定商品的需求曲线是 $D = F(D)$ ，生产单位产品的生产费用是 $\phi(D)$ ，当垄断者判定价格时，他将力求使其净收入 $PD - \phi(D)$ ，即销售总额扣除生产费用后的值最大。这个问题利用数学中的求极值方法很容易解决。库诺又用数学方法分析了有2，3，4，5，…和 $n$ 个竞争者的情形，把垄断与完全竞争之间的一系列质的差别转变为量的差别，并且得出了价格“随着 $n$ 的增

大而不断缩小”的结论。

库诺对数理经济学的创立作出了重大贡献。阿罗和英特里利盖特在他们主编的《数理经济学手册》中，对此作了精炼的概括：“库诺的贡献可以归结为两个一般的问题：厂商理论和单个市场中厂商与消费者相互作用理论。在厂商理论方面，库诺的基本假设是厂商选择最大化利润的产出水平。他研究并定义了完全竞争和垄断情形。在单个市场的厂商与消费者相互作用方面，库诺对（单个）竞争市场中供求相等和卖主竞争有限的垄断问题都作了探讨。垄断情形下的‘库诺解’至今仍是一种标准的方法，并且经过一般化后对对策论的发展产生了重大作用。”英国著名数理经济学家F.Y.埃奇沃思曾赞誉库诺的著作是“用数学研究经济学最一般规律的杰作。”

然而，库诺的著作在相当长一段时间里并没有受到人们应有的重视，即使库诺日后在1863年出版的新作《财富的理论原理》一书中不加任何数学证明地重新叙述了自己的全部基本论点，也没能改变人们的冷落。只是到了35年之后，由于瓦尔拉斯对库诺那本独创性著作的发现与公布，库诺及其著作才逐步得到了应有的评价和地位。因此，库诺终生未能开创数理经济学派，是一个孤独的先驱者。

这当然并非说库诺是当时唯一用数学方法研究经济问题的人。在数理经济学发展之初，人们经常提到的至少还有三个人。一个是法国工程师朱利·杜皮特（Jules Dupuit），他曾在当时法国的《桥梁与堤坝年鉴》上发表过两篇有关的文章，一是《公共工程效用的度量》（1844年），另一篇是《论通行税和运输费用》（1849年）。在这两篇文章中，作者第一次用几何方法表示了供求关系，并用数学作了说明。不过，杜皮特没有系统地论述自己的观点，他的文章具有强烈的实践倾向，并且也是后来由于数理经济学的大发展才被从历史文献堆里发掘出来的。

另外两个人都是德国的经济学家。一是屠能（John H. Th-

inen), 他在其 1826 年发表的《孤立国》一书中, 开创性地把微积分及其它一些数学公式运用于经济学研究, 因而成为最早的数理经济学家之一。

再一位是大家比较熟悉的戈森, 他是边际效用价值论的先驱者之一, 对边际效用理论的基本原理作了数学探讨, 为后来的边际效用理论奠定了基础, 从而推动了数理经济学的发展。

阐述戈森经济理论的著作, 是其 1854 年出版的《人类交换规律及由此而产生的人类行为准则的发展》。戈森认为, 政治经济学是关于快乐的学说, 它的任务主要就是发现增加效用或快乐总量的规律。戈森假定人们能从消费中得到快乐或效用, 并认为这种快乐或效用可以用基数来表示和衡量, 用几何图形来图示。在此基础上, 戈森创立了两个著名的定律, 即戈森第一定律和戈森第二定律。

森第一定律也叫边际效用递减定律, 它表明了消费量与效用之间的关系。戈森认为, 当一个消费者的某种物品增加时, 消费者所得到的总效用是增加的, 但增加的比例是递减的, 而且, 当消费的商品增加到一定数量时, 消费者所得到的总效用将减少, 这时所增加的效用, 也即边际效用, 是负数。因此, 所谓边际效用, 也就是总效用的增量与消费量的增量的比率。若以  $M_u$  代表边际效用,  $T_u$  代表总效用,  $q$  代表消费量, 则有

$$M_u = \frac{\Delta T_u}{\Delta q}$$

如果消费增量与总效用增量无限小, 则可用微分方法求出边际效用, 即

$$M_{u \cdot q} = \frac{dT_u}{dq}$$

即边际效用是总效用函数的一阶导数。

从第一定律, 戈森又推导出了关于消费者行为准则的第二定律。第二定律比第一定律更受现代西方经济学家青睐, 被当作边

际效用理论的基本原理，认为它是边际分析工具的一种具体运用，并且由此引导了西方经济学家日后逐渐发现了许多经济问题的实质就是求极值，可用数学方法加以解决。戈森第二定律的基本内容是，消费者的收入是有限的，为了从有限的花费中取得最大效用或快乐，消费者必须使其花费在每一种物品上的最后一个单位货币所产生的效用相等。这也可以用数学方法表示。设有  $A$ ， $B$ ， $C$ ，……种商品，这些商品的边际效用分别为  $M_{uA}$ ， $M_{uB}$ ， $M_{uC}$ ，……，价格分别为  $P_A$ ， $P_B$ ， $P_C$ ，……，则戈森第二定律可写成：

$$\frac{M_{uA}}{P_A} = \frac{M_{uB}}{P_B} = \frac{M_{uC}}{P_C} \dots\dots$$

戈森的这两个定律应该说是西方经济学发展过程中的重要成果，戈森本人在自己著作的序言中甚至把它们与哥白尼的发现相比拟。遗憾的是，戈森的著作也没能逃脱库诺在法国遭受的那种被冷落的命运，而且，由于书中文字晦涩、公式充斥、数字演算太多、章节不分等，戈森的影响比库诺还小。

总的说来，在19世纪70年代以前，数理经济学处于初创时期。库诺、戈森以及屠能、杜皮特是这一时期的代表人物，他们的著作都没能引起同代人的足够重视和兴趣。这些著作遭受冷落的原因主要有下述五点。第一，当时在英国及西欧的一些国家里，约翰·斯图亚特·穆勒综合此前各种资产阶级经济学说所创立的西方经济学说史上第一个折衷主义经济学体系，取得了比较稳固的统治地位，基本上满足了当时经济理论研究和经济实践指导的要求。第二，由斯密开创并由李嘉图完善的历史分析法、逻辑分析法和抽象分析法等经济分析方法，已经成为当时经济学家们所习得的基本方法，并基本上适应当时经济分析的需要。第三，当时的经济学家一般都对数学，尤其是比较高深的数学很陌生；第四，象库诺的著作，虽然体系严密，采用了由浅入深的表述方法，但却在经济思想理论方面没有足以引起经济学家们关注的新内容（库诺自身想做的也主要是用数学方法来严格地重新表述人

所共知的经济学概念），这种形式玄奥而理论贫乏的东西，在上述历史条件下被漠然置之，自不为怪。第五，象戈森这样带有重要理论发现的著作，本是应该有些诱人魅力的，至少不会弄到无人问津的地步，然而，他的发现却一开始便被他自己用晦涩的文字、满篇的公式和大量的数字演算这些不受欢迎的表述形式包裹了起来，从而自己把自己打入了冷宫。

数理经济学著作这种被冷落的局面持续了20多年。到了19世纪70年代，由于资本主义发展过程中一些矛盾的尖锐化，传统经济学（包括穆勒的折衷体系和德国的历史学派理论）在严峻的现实矛盾面前捉襟见肘，而与此同时经济研究也已进一步深入，终于产生了影响及今的“边际革命”。边际革命实际上就是增量分析方法的革命，它为在经济学中运用数学方法（主要是微分方法）开辟了道路，推动了数理经济学的发展（但它本身并不是数理经济学的革命）。在边际革命中，边际价值论是其理论基石，因而，它使戈森的著作重新问世，并被誉为边际效用理论——从而奥国学派和数理学派的奠基性著作。这次边际革命有三位最著名的代表人物：奥地利经济学家卡尔·门格尔、英国经济学家威廉·斯坦利·杰文斯和法国经济学家里昂·瓦尔拉斯。其中，门格尔以“抽象演绎法”创立了奥国学派，瓦尔拉斯用数学方法创建了数理学派，杰文斯由于马歇尔折衷主义经济学体系的影响，没能开创学派，但他自身在数理经济学发展中作出了重要贡献。

杰文斯确立其在经济学和数理经济学中历史地位的是其1871年出版的《政治经济学理论》，这本书与瓦尔拉斯的《纯粹政治经济学要义》（1874年问世）标志着数理经济学的形成，开辟了数理经济学蓬勃发展的历史时期。因为，他们在各自的著作中不仅都提出了以边际价值论为基础的新的经济理论，而且自觉地把数学与他们的理论结合起来，明确地把数学方法作为经济学研究中的一种，甚至认为是最重要的一种研究方法，系统地用数学方法论证和表述经济理论。这样，数学方法便应运真正进入了经济学舞

台，得到了比较广泛、深入且卓有成就的应用，引起了经济学界的高度重视和浓厚兴趣，出现了一大批著名的数理经济学家（如帕累托、威克斯迪德、埃奇沃思、费雪、卡塞尔、维克塞尔、朗哈德等），数理学派也由此形成（由于数理学派的代表人物瓦尔拉斯及其后继人帕累托长期任教于瑞士洛桑大学，故该派又称洛桑学派）。

杰文斯在数理经济学上的贡献主要体现在三个方面。

其一是方法论。杰文斯认为，经济学是“快乐与痛苦的微积分学”，经济学的一系列概念和范畴都属于苦乐范畴之内的数量概念，因而可以用数学方法来表述。在方法上，经济学除了运用逻辑方法而外，还必须运用数学方法。只有把经济学变成数学科学，经济学才能真正称作科学。

其二是用数学方法对经济学原理所作的开创性研究，其中最突出的是著名的杰文斯交换方程式。

杰文斯以需求和效用作为经济分析的出发点，从需求角度运用了边际分析方法，并发展了边际效用概念，不过杰文斯没有使用“边际效用”一词而运用了一个意义相同的名词“最后效用程度”。杰文斯认为，“最后效用程度”就是一定量商品中最后一个新增量所产生的效用与这个新增量的比例。假定 $X$ 代表某人的商品拥有量， $U$ 表示 $X$ 量商品的效用，则 $U$ 将随 $X$ 变动而变动，为 $X$ 的函数。如果再假定 $\Delta X$ 为 $X$ 的一个增量，其效用为 $\Delta U$ ，则全部现有各单位商品的实际效用之总和为 $U + \Delta U$ ，新增商品此时的需求强度亦即效用程度为 $\Delta U / \Delta X$ 。最后，若用 $d$ 表示该商品增量中极小或无限小的最后增量，则 $\Delta U / \Delta X$ 的极限 $dU / dX$ 即为该商品的最后效用程度。杰文斯认为，“最后效用程度”决定商品价值大小，是递减的，可用基数度量的，因而，不同商品的“最后效用程度”是可比的。另外，效用可以表示为所消费的商品的连续函数，消费不同商品的总效用函数可用 $T_a = f(Q_a) + f(Q_b) + f(Q_c) + \dots$ 形式的加性函数来表示。

在上述假定基础上，杰文斯展开了他的交换理论，建立了杰

文斯交换方程式。在杰文斯看来，商品交换者总是根据相交换的商品的“最后效用程度”来决定交换的多少，因为交换者总是希望交换后能达到最大效用，而要达到最大效用就必须使交换双方的最后效用程度相等。因此，杰文斯提出了一个交换原则：“两种商品的交换比率是交换后各种商品量的最后效用程度的比率的倒数”。他的交换方程式就是据此而用微分方法建立的。

杰文斯设A原有谷物量为 $a$ ，B原有牛肉量为 $b$ 。当用 $x$ 量谷物与 $y$ 量牛肉相交换后，则A有 $a-x$ 量谷物和 $y$ 量牛肉，B有 $x$ 量谷物和 $b-y$ 量牛肉。令 $\varphi_1(a-x)$ 表示谷物对A的最后效用程度， $\varphi_2(x)$ 代表谷物对B的最后效用程度；再令 $\phi_1(y)$ 表示牛肉对A的最后效用程度， $\phi_2(b-y)$ 代表牛肉对B的最后效用程度。为了使A达到交换目的，即使他卖剩的谷物和买得的牛肉这两种商品的最后效用程度相等，取得最大效用，下列方程式必须成立（其中 $dx$ 和 $dy$ 分别表示谷物和牛肉的最后的微小增量）：

$$\varphi_1(a-x)dx = \phi_1(y)dy$$

或者

$$\frac{\varphi_1(a-x)}{\phi_1(y)} = \frac{dy}{dx}$$

因为在同一时间同一市场上，同一商品的价格必须相同，所以必有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

于是有

$$\frac{\varphi_1(a-x)}{\phi_1(y)} = \frac{y}{x}$$

同理，对B有

$$\frac{\varphi_2(x)}{\phi_2(b-y)} = \frac{y}{x}$$

上述两个方程可以简化形式写成

$$\frac{\varphi_1(a-x)}{\phi_1(y)} = \frac{y}{x} = \frac{\varphi_2(x)}{\phi_2(b-y)}$$

这就是杰文斯交换方程式，杰文斯认为，这两个方程足以决

定交换结果，因为其中只有两个未知数（ $x$ 和 $y$ ）。

杰文斯在数理经济学上的第三大贡献，是他有意识地系统编纂了经济学家运用数学方法研究经济问题的著作目录。

几乎与杰文斯同时，瓦尔拉斯独立地对数理经济学作出了甚至比杰文斯略胜一筹的贡献。除了对边际效用学说作出了与杰文斯相同的贡献外（瓦尔拉斯也没有用“边际效用”一词，而从他父亲那儿袭用了一个意义相当的词“稀缺性”），瓦尔拉斯最杰出的贡献是他在边际效用理论基础上，运用联立方程组等数学方法所创立的一般均衡理论。

在瓦尔拉斯之前，人们对于商品交换及其交换比例（价格）确定的研究基本上局限于两种商品。但是，在事实上，一切商品的价格都是相互联系、影响和制约的，任何一种商品的供求量，不仅是这种商品自身价格的函数，而且也是所有其它商品价格的函数，所以，无论什么商品，其价格只有和其它商品的价格共同决定、使得一切商品的供给和需求都相等时，才能成为实际的市场价格（这样的实际市场价格也就是瓦尔拉斯所说的均衡价格，这样的市场则被他称为均衡市场，而这样的均衡也就是瓦尔拉斯的一般均衡）。商品价格之间的这种经济关系，屠能和库诺曾均有所察，屠能并且还曾预见到有可能运用联立方程组建立一般均衡模型，但他始终没有完成这一任务。库诺则认为要完全严格地剖析这个问题，必须考察整个经济体系，而当时的数学方法无法做到这一点。因此，这一任务一直留到瓦尔拉斯时期，瓦尔拉斯作了大胆的尝试，并且成功了，成为现代经济学的先驱者。

瓦尔拉斯的一般均衡理论属于封闭经济静态的抽象价格决定理论。瓦尔拉斯建立这种理论的数学依据是，如果方程式的数目等于方程中未知数的数目，则就可以求出这些未知数的解；就经济问题而言，只要根据商品总供给等于总需求的前提，列出与商品交换中未知的价格数目相等的方程式，就可以决定一切商品在一般均衡状态下的价格。



瓦尔拉斯首先在其边际效用价值论的基础上，用数学方法（函数关系式、微分和方程组）研究了两种商品交换时的均衡价格决定问题，然后将其结论推广到有 $m$ 种商品相交换的一般情形，其中瓦尔拉斯又分两种情形分别进行了研究，一种是每种商品同所有其它商品分别相交换，另一种是每种商品同所有其它商品相交换。下面是最后一种情形的研究结果，也是瓦尔拉斯一般均衡的最终形式。

瓦尔拉斯假定，第一个商品交换者拥有的商品及其数量为A商品 $q_{a,1}$ ，B商品 $q_{b,1}$ ，C商品 $q_{c,1}$ ，D商品 $q_{d,1}$ ，…；在某时期他对商品A，B，C，D，…的欲望或效用方程式为：

$u = \phi_{a,1}(q)$ ， $u = \phi_{b,1}(q)$ ， $u = \phi_{c,1}(q)$ ， $u = \phi_{d,1}(q)$ ，…  
用 $P_b$ ， $P_c$ ， $P_d$ ，…表示以A表示的B，C，D，…的价格，用 $x_1$ ， $y_1$ ， $z_1$ ， $w_1$ ，…表示A，B，C，D，…在价格 $P_b$ ， $P_c$ ， $P_d$ ，…下的增量（正增量表示需求量，负增量表示供给量）。在需求相等条件下，必有

$$x_1 + y_1 P_b + z_1 P_c + w_1 P_d + \dots = 0$$

如果实现最大满足这个交换目的，则必有

$$\phi_{b,1}(q_{b,1} + y_1) = P_b \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1)$$

$$\phi_{c,1}(q_{c,1} + z_1) = P_c \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1)$$

$$\phi_{d,1}(q_{d,1} + w_1) = P_d \phi_{a,1}(q_{a,1} + x_1)$$

……

共计 $(m-1)$ 个方程，加上前面一个则有 $m$ 个方程。如假定以第 $m$ 个未知数作为价格函数，则 $m$ 个未知数 $(x_1, y_1, z_1, w_1, \dots)$ 将被消去一个而成为 $(m-1)$ 个。现设A为货币兑换率标准，则B，C，D，…有下列方程式：

$$y_1 = f_{b,1}(P_b, P_c, P_d)$$

$$z_1 = f_{c,1}(P_b, P_c, P_d)$$

$$w_1 = f_{d,1}(P_b, P_c, P_d)$$

……