模态逻辑

● 周北海 著

现代逻辑
丛 书

MOTAI
LUOJI

现代逻辑丛书

●此项研究成果受国家社会科学基金资助●

模 态 逻 辑

周北海 著

中国社会科学出版社

（京）新登字 030 号

图书在版编目（CIP）数据

模态逻辑/周北海著．—北京：中国社会科学出版社，1996．5

ISBN 7－5004－1888－4

Ⅰ．模… Ⅱ．周… Ⅲ．模态逻辑 Ⅳ．B815．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 04560 号

中国社会科学出版社出版发行

（北京鼓楼西大街甲 158 号）

北京兆成印刷厂印刷　新华书店经销

1996 年 5 月第 1 版　　1996 年 5 月第 1 次印刷

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：7.25　插页：2

字数：180 千字　印数：1—2 000 册

定价：11.00 元

《现代逻辑丛书》出版说明

现代逻辑内容很丰富，特别是符号逻辑或称数理逻辑，包括几个分支，如：逻辑演算，集合论，模型论，递归论，证明论等。在古典逻辑演算以外，近年来模态逻辑有了很大的发展，它又被称作哲理逻辑。

符号逻辑不仅内容丰富，还和许多学科如哲学、数学、计算机科学、语言学及心理学等有联系，影响及于这些学科，有些影响甚至是带根本性的。

我国大学的逻辑专业，计算机专业，数学专业，哲学专业等，都开设和符号逻辑有关的课程。

但是，这方面介绍性的书籍和教材在国内还不多见。本丛书的目的是提供一批叙述简明易懂和不需要较多数学知识的入门性书籍和教材。

《现代逻辑丛书》被列入国家第七个五年计划期间重点研究课题，由北京大学哲学系逻辑教研室王宪钧教授主编，教研室及校外任课教员执笔编写。

前　言

现代逻辑近些年来发展迅速，不仅基本理论的研究在不断深入，而且出现了许多有着各种关联的新分支，形成了一个庞大的复杂体系。回溯源头，现代逻辑的正式建立应以上世纪末至本世纪初古典逻辑（又称经典逻辑）的建立为标志。此后不久，首先出现了三种非古典逻辑，即直觉主义逻辑，多值逻辑和模态逻辑。它们代表了逻辑的一些基本类型。其中对后来逻辑发展影响最大的可以说是模态逻辑。模态逻辑不仅在后来自身的发展中首先提出或创立了一些甚至对整个逻辑学来说都很重要的理论和方法，而且引发了其他许多逻辑分支的建立，形成了一大类逻辑。关于这类逻辑后来出现各种名称：哲学逻辑，应用逻辑，加算子的逻辑等等。去年八月第十届国际逻辑、方法论和科学哲学大会在意大利弗罗伦萨召开。大会的论文摘要汇编共收录论文六百多篇，包括数理逻辑的四论（模型论、集合论等）以及归纳逻辑，逻辑和计算机科学，方法论，语言学，甚至生物科学，社会科学等在内共十五个门类，其中哲学逻辑类论文百余篇，是最多的一类，占总数近六分之一。由此可以看出，由模态逻辑为之先河的哲学逻辑是当今逻辑学中最活跃的领域。面对今天的逻辑学状况，要想进入这样一个丰富多彩的领域，在具有一定的古典逻辑知识的基础上，从了解模态逻辑开始，应该是最好的选择。

本书阐述模态逻辑的基础知识，共八章。第一章是模态逻辑的概述，介绍了模态逻辑的学科性质等一些基本情况，以使读者对模态逻辑有总体上的初步了解。第二章是本书所需要的一些基本知

识的说明。第三章至第七章为模态命题逻辑部分。第三章介绍了几个经典的模态命题逻辑系统。第四章介绍可能世界语义学的基本内容及其一些应用。第五章介绍可能世界语义学下的典范模型及方法，以及由此证明一些模态系统的完全性。第六、七章是第三、四章的推广，介绍模态逻辑的其他一些系统和其中一些系统的语义解释。第八章为模态谓词逻辑部分，介绍模态谓词逻辑及演算和完全性证明。

在本书的写作中，考虑到各类读者的需要，尽量降低了预备知识的需要程度。读者只须具备素朴集合论的一些基本知识（可参见《新逻辑教程》（第九章），宋文坚主编，北京大学出版社1992年出版）。此外，模态逻辑以古典命题逻辑和谓词逻辑为基础，因此在理论上最好也应具有这方面的知识（可参见本丛书中的《逻辑演算》，刘壮虎著，中国社会科学出版社1993年出版）。不过这部分在本书的第二章中作了一些说明，所以也可以直接进入本书的学习。

本书的写作得到了宋文坚教授的鼓励与支持，并作了具体的安排。郭世铭副教授审阅了全书初稿，指出了其中的疏漏与错误。毛翊同志为本书作了许多有益的工作。黄斌和王东临先生在电脑设备和使用方面提供了很多帮助。作者谨对以上各位和来自各方面的关心与帮助表示衷心感谢！

最后应特别感谢本书责任编辑李树琦同志和中国社会科学出版社。李树琦同志为本书的出版作了很大的努力。中国社会科学出版社在学术著作出版困难的今天，仍然坚持从社会总体效益出发，终使本书同读者见面，作者对此深表敬意！

周北海

1996 年 1 月于北京大学

目　　录

第一章
模态逻辑概述

本章是对模态逻辑的总体情况的介绍，主要有模态逻辑的学科性质和具体形态，以及模态逻辑的基本内容及特点等。通过本章的学习可以对模态逻辑有一个概观性的初步了解。

1.1 模态逻辑

模态逻辑是逻辑学中的一个重要分支，主要研究模态推理形式及其规律。推理通常由若干命题组成，推理形式也表现为一定的命题形式。相应地，模态推理的推理形式又是通过命题的模态形式来表示的。因此，模态和命题的模态形式是了解模态逻辑的两个基本概念。

模态

所谓模态是指事物或认识的必然和可能性等这类性质。类似的性质还有不可能性，偶然性，以及必然的必然性，可能的必然性，必然地必然的可能性，以及多次这类性质的组合。

模态在我们思维中的反映，表现为一定的认识或观念，就是模态概念。因此，对应于不同的模态也就有不同的模态概念。甚至对于同一模态，由于认识上的差异，也会形成不同的模态概念。比如，我们对于必然性和可能性等也许会有不同的理解和看法，这些不同的理解和看法也就形成了关于这些模态的不同概念。

语言中用以表示模态或模态概念的语词或符号称为模态词，如汉语中的语词“可能性”，“必然的可能性”，英语中的“possible”，“necessity”等。在模态逻辑中通常用人工语言符号“□”和“◇”来分别表示必然性和可能性，这些符号和由它们而形成的符号串“□◇”，“□◇□”等也是一些模态词。模态词所表示的对象是模态。模态、模态概念和模态词是不同的，分别对应于对象、思维和语言，分属不同层次，应注意它们的区别。

模态分为一些不同的种类。首先可以分为客观模态和主观模态。客观模态是指客观存在的必然性或可能性等。例如，

(1) 汽车的速度不可能超过光速。

主观模态则是指认识中的确定性或不确定性等这类性质。例如，

(2) 地球上可能来过外星人。

地球上是否来过外星人是已定事实，(2)中的“可能”并不表示在客观事实上地球有来过外星人的可能，只表示人们对这一事实的了解在主观方面还不够确定。

客观模态又可以分为逻辑的模态和非逻辑的模态。逻辑的模态是指逻辑上的必然性和可能性等，例如，

(3) 明天下雨或不下雨是必然的。

与明天是否下雨无关，仅仅通过其中的逻辑关系我们就可以看出，“明天下雨或不下雨”必定是真的。(3)中的必然性就是逻辑的必然性。关于逻辑必然性也可以这么看：如果否定一个具有逻辑必然性的命题，其结果必定会引起逻辑上的矛盾。如上例，否定“$x=5$ 或 $x\neq 5$”得到的是“$x\neq 5$ 并且 $x=5$”，是个矛盾式。相应地，所谓逻辑的可能性指的是逻辑上的不矛盾性，换言之，一切逻辑上不矛盾的东西都是逻辑上可能的。

非逻辑的模态又有物理的、生物的、乃至哲学的等等之分。例如，(1)中的不可能性就是一种物理的不可能性，而

(4) 没有氧气哺乳动物不可能维持生命。

中的不可能性则是一种生物学上的不可能性。再如，

(5) 任何事物的运动都必然是有规律的。

中的必然性就是哲学上的必然性。所以这么区分，是因为这些必然性与不可能性有着物理、生物或哲学的理论依据。它们与逻辑必然性与不可能性的最重要区别在于，如果有相反的情况，有超光速的汽车，有无需氧气也能维持生命的哺乳动物，有无运动规律的事物，仅与现有的理论或看法相矛盾，可以通过修改有关的理论来解决，不会使人陷入自相矛盾的境地，即不会引起逻辑矛盾。由此也可以看出，非逻辑的不可能在逻辑上未必是不可能的。相应地，逻辑上必然的在其他任何地方都是必然的。

模态还可以分为**从物**(de re)**模态**和**从言**(de dicto)**模态**，又分别称为事物的模态和命题的模态。前者指的是事物或对象的模态，后者指的是关于命题本身的模态。例如，

(6) 9 必然大于 7。

对此可以理解为，9 这个事物大于 7 这个事物的这一情况是必然的，此时的必然性是事物本身的，该模态是从物模态。而对于

(7) “9 大于 7”是必然的。

来说，则可以理解为“9 大于 7”这一命题为真具有必然性，此时的必然性是关于命题的，是从言模态。从物模态与从言模态的概念由中世纪提出。在今天对于模态逻辑的理解、建立、特别是对于模态谓词逻辑的理解和建立，以及对模态逻辑的哲学问题仍有较为重要的意义。

最后看一下狭义模态和广义模态。狭义模态就是前面一直在谈论的必然性与可能性等这些性质。通常把事物或认识中的其他一些性质或状态也叫作模态，如知道、相信、应该、允许、禁止等等，这些就是广义模态。狭义模态可以看作关于真的性质的模态，即必然真、可能真等等，因而可简称为真性模态 (*alethic* modality)[1]。现

---

[1] *alethic*，英译希腊文，原意为真的，真理的，又译真势（的），真值（的）。现将 alethic modality 译为真性模态，以与真值模态（是真的，是假的等）相区别。

在通常所说的模态逻辑都是关于狭义模态的模态逻辑。关于广义模态的研究已形成一些具体的广义模态逻辑,如知道逻辑,信念逻辑,以及关于应该、允许和禁止等这些道义模态的道义逻辑等。由于狭义模态与广义模态有许多相似的性质,所以(狭义)模态逻辑与广义模态逻辑有密切的关系。

以上对模态作了一些初步介绍。本书所涉及的模态主要是关于狭义的、客观的模态之中的逻辑的模态。

模态命题和命题的模态形式

一般地说,命题可以看成对于事物(对象)情况的反映。在这一反映中,如果还含有模态的内容,那么就是模态命题,反之,是非模态例题。如前面的命题(1)—(7)就都是一些模态命题。从语言形式上看,模态命题的特征更为明显,一般都含有模态词。从内容上看,模态命题并不仅仅反映车速小于光速或地球上是否来过外星人等这样一些简单事实,而是反映了更深或更多的内容:根据汽车和光的物理性质,车速肯定小于光速,不会相反,反映了这个根据,以及对于地球上是否来过外星人的看法在人们认识中的不确定性,反映了这种不确定性,如此等等。其中说到的根据,依具体模态命题的不同,可以是原因、某种理论、语言里的约定以及逻辑关系等等。由于这些情况,因而带来了模态命题的复杂性。其结果之一,就是在直观上难以确定模态命题的真假。只有以后通过模态逻辑语义学,才能较为合理地解决这个问题(见第四章)。

模态命题和其他命题一样,也有其命题形式。命题形式即抽去某些具体内容后只保留其位置的框架,或者说,是由这些位置和联结或安排它们的部件形成的结构,所以命题形式中一般有两种成分:代表某些具体内容的位置以及联结或安排这些位置的部件。这两种成分的语言表达就是变项和常项。

例如我们考虑命题这类事物,通常以 p, q, r 为变项来表示任一命题,又称命题变项,以自然语言中的一些联词和助词等表示常

项，对于命题(1)，(2)，(3)来说，此时它们分别有以下命题形式：

(1°)　不可能 p

(2°)　可能 p

(3°)　必然(p 或者非 p)

再如，设有以下模态命题，

(8)　如果该物体磨擦，那么它必然发热。

(9)　如果今天可能下雨，那么今天下雨或刮风是可能的。

若还按上述条件，则有以下命题形式：

(8°)　如果 p，那么必然 q。

(9°)　如果可能 p，那么可能(q 或者 r)。

为了方便和严格，还可以完全用符号给出这些形式，称为命题形式的符号化。以下用符号$\Box$，$\Diamond$，$\neg$，$\vee$，$\rightarrow$分别表示常项必然，可能，并非，或者，如果…则…，于是，上述命题形式又可以写成

(1′)　$\neg\Diamond p$

(2′)　$\Diamond p$

(3′)　$\Box(p\vee\Diamond p)$

(8′)　$p\rightarrow\Box p$

(9′)　$\Diamond p\rightarrow\Diamond(p\vee q)$

严格性是命题形式符号化的更为重要的原因。其中用符号表示常项，并不是简单的技巧，而是它们较自然语言的那些词项有更为严格的涵义或意思。在每种逻辑下，由相应的解释来确定。一般来说，这些符号所表达的意思只是自然语言相应语词所表达的部分意思，在一定的意义下，前者可视作后者的抽象。

上述常项在命题形式中有重要作用。从表达形式上看，由常项把各具体命题联结组织起来，形成新命题，因而可称为(命题)联结词。从抽象的关系上看，即用数学的眼光看，一些命题经由常项的作用形成另一命题，类似于数学中一些数经过一些运算(如加法、减法等)得到另一些数。在数学里，表示这些运算的符号称作算符

或**算子**。表示由一个数得到某个数运算的算子称为**一元算子**，表示由两个数得到某个数运算的算子称为**二元算子**，如此等等。现代逻辑在此也采用了数学的方法与观点，因而又称这些常项为命题算子，也简称算子。相应地，也有一元算子，如 $\neg$，$\Box$，$\Diamond$等，和二元算子，如 $\wedge$(并且)，$\vee$，$\rightarrow$ 等。类似地，可有三元算子，四元算子等等。一般地，称 n 元算子。在各算子中，表示模态或含有模态内容的那些算子又称作模态算子，如 $\Box$，$\Diamond$ 等。

逻辑学里所说的命题形式指的是命题的逻辑形式。如上所示，这样的形式通常由变项与常项组成(表示)，组成逻辑形式的变项与常项又称为逻辑变项与逻辑常项。在一些情况下，也可以先确定逻辑变项与逻辑常项，由此来得到命题的逻辑形式。

命题的逻辑形式不同于命题的语言形式或其他形式。语言形式由语言学意义下的规律等决定，逻辑形式则由相应的逻辑决定。例如，(1°)和 (1′) 的语言形式不同，但作为逻辑形式则是相同的。既然命题形式是这样一种形式，因此同一命题对于不同的逻辑来说，也会有不同的命题形式。例如，

(10)　所有乌鸦都是会飞的。

如果我们考虑以命题为最小单位的逻辑，即命题逻辑，而不再考虑命题的内部结构，那么此时(10)的命题形式是

(11)　p

如果我们还考虑命题的内部结构，并且是从主项、谓项等形成的主谓结构来考虑，即在亚里斯多德逻辑下，相应的命题形式为

(12)　所有 S 都是 P 。

或者

(13)　SAP

对于一阶逻辑来说，它又是通过个体词、谓词和量词来给出命题形式的。此时(10)的命题形式是

(14)　$\forall x(Sx\rightarrow Px)$

其中 $\forall$ 是全称量词，读作“任一……”。

以上所说的是一般的命题及其命题形式之于逻辑的关系，对于模态命题来说，也是如此。我们现在考虑模态命题的命题形式，当然是指其逻辑形式。特别地，对不同的逻辑来说，同一模态命题也会有不同的形式。

例如，同是模态命题(3)，(8)，(9)，在模态逻辑里，考虑到其中的模态，并且以命题为最小单位的话，它们的命题形式分别是(3′)，(8′)，(9′)，而对于古典命题逻辑来说，由于它讨论或处理的命题形式都是非模态的，即使对于模态命题，也只能考虑它的非模态的命题形式。所以此时这些命题的命题形式分别是

(3″)　p

(8″)　$p \rightarrow q$

(9″)　$p \rightarrow q$

(3′)，(8′)，(9′)和(3″)，(8″)，(9″)所表示的命题形式都是相应模态命题的命题形式，但显然，对于模态逻辑来说有意义的是前一种。这种形式称为命题的模态形式。一般地，对于任意命题来说，如果我们考虑到模态，并在有这部分内容时给出相应的形式表达，那么，所得到的命题形式就是命题的模态形式。在这一规定和做法下，由模态命题得到的命题形式当然都是模态形式，如(3′)，(8′)，(9′)，并且由非模态命题得到的命题形式也是模态形式，如(11)—(14)，这可以看作一种特殊的模态形式，空模态的模态形式。但请注意(3″)，(8″)，(9″)一定不是相应命题的模态形式。这一规定实际上是把在模态逻辑处理下的命题形式都看成模态形式。推而广之，模态逻辑考虑下的命题也都是模态命题。这只是为统一处理问题的方便而采取的一种手段。因为模态逻辑不仅研究由模态命题形成的推理，还要研究由模态命题与非模态命题形成的推理，甚至还会涉及到非模态命题之间的推理，所以要统一考虑相应的命题形式。模态命题的命题形式和命题的模态形式是两个不同的概念，前者的所指不确定，后者则是相对严格和确定的。

逻辑学研究命题形式的目的在于得到正确的推理形式，这样