初等数学研究丛书

解析几何

四川人民出版社

初等数学研究丛书

解 析 几 何

四川省数学会普及工作委员会主编
肖　光　基　编　著

四 川 人 民 出 版 社
一九八三年 · 成都

初等数学研究丛书《解析几何》

四川人民出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　内江新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张10.75　字数235千
1984年10月第一版　　1984年10月第一次印刷
印数：1—18,000 册

书号：7118·718　　定价：1.05 元

内 容 简 介

这是一本中学数学教师进修平面解析几何和教学参考的用书．为了帮助教师比较深刻地理解中学教材，本书从现行教材出发，在基础知识和基本训练方面，作了适当的提高和补充．全书共六章，内容包括平面上的各种坐标系，曲线和方程，一次曲线与二次曲线概述，坐标变换与二次曲线方程的化简，极坐标系的曲线与方程，参数方程．并配备有一定数量的例题和习题．

本书可作为中学数学教师的教学参考，以及师院或师专数学专业开设中学数学课的教学用书．书末附有习题答案与提示．

前　言

“精简、增加和渗透”是中学数学教学大纲中提出的一条原则。在这原则下，以传统数学为形，现行数学为实，实现中学数学内容的现代化，是当前我们面临的重要课题。四川省数学会普及工作委员会主编了一套“初等数学研究丛书”，邀请了四川师范学院数学系中学数学教研组同志从事编写工作，我觉得很有意义。这对中学数学教师和师范院校学习数学的学生，用现代数学的观点和方法，来研究传统数学内容，可供参考。

编好这样的小册子，不是一件很容易的事。这套“初等数学研究丛书”自然还会有一些缺点，我相信在广大教师和学生的帮助下定会使它逐步完善的。

我希望有更多的数学普及小册子问世。

四川省数学会理事长　**柯　召**

一九八三年一月

目　次

第一章　平面上的各种坐标系

数学进入变量数学时期的一个决定性步骤是解析几何的建立。正如恩格斯所说："数学中的转折点是笛卡尔的变数。"正是由于变数和坐标系的引进，才使形与数、几何与代数完满地结合起来，从而使人类对客观世界的运动规律的认识更加深刻，使数学更能适应生产实践和科学技术发展的需要，并为微积分的建立创造了条件，推动数学本身向前发展。

本章主要介绍平面上的各种坐标系的基本概念及它们的一些应用。

1.1　平面直角坐标系

笛卡尔的一个基本观点，就是用一对有序实数确定平面上点的位置，即是坐标的观点。笛卡尔在创建解析几何时所用的坐标系就是平面直角坐标系，所以至今人们称平面直角坐标系为笛卡尔坐标系。为了深刻理解和熟练运用坐标的方法，我们从轴上有向线段的数量和直线上点的坐标讲起。

1.1.1　轴上有向线段的数量

一条直线有两个相反的方向，如果规定了其中一个方向为正方向，这样的直线叫做有向直线或轴。

一条线段有两个端点，如果规定了其中一个端点为起点，则另一个为终点，这样的线段叫做有向线段。它的方向

是从起点到终点的方向。起点为A，终点为B的有向线段，记为AB，它的方向是从A到B的方向。

定义1.1 轴l上有向线段AB的数量规定为用长度单位所量得A、B两点间的距离(即线段AB的长)带上正量（如果AB与轴同向），或带负量（如果与轴反向）。

如图1—1中，轴l上两点A、B的距离是5，而AB与轴同向，所以AB的数量是$+5$；又BA与轴反向，所以BA的数量是-5，分别记为：

$$AB=+5,\quad BA=-5.$$

图 1—1

而把线段AB的长度是5，记为：

$$|AB|=5.$$

由此可见，AB和BA的数量是互为相反的数，因为AB和BA的长度虽然相同，但方向相反，即

$$|AB|=|BA|=5,\ AB=+5,\ BA=-5.$$

一般地，$|AB|=|BA|$，$AB=-BA$. (1.1)

起点和终点重合的线段叫做零线段。零线段的方向不定，零线段的长度和数量为零。

长度相等、方向相同的两条有向线段叫做相等的有向线段。一条有向线段可以用和它相等的有向线段来代替。

如果A、B、C是轴上任意三点，那么有向线段AB的终点总是有向线段BC的起点，因此不论这三点在轴上的顺序如何，总有以第一线段的起点为起点，以第二线段的终点为终点的第三线段AC。我们把AC叫做AB与BC的和，记为$AB+BC=AC$。

定理1.1 设A、B、C是轴上任意三点，不论它们的位置顺序如何，下面的关系式成立：

$$AB+BC=AC. \quad (1.2)$$

证明：现在先证明三点A、B、C不重合的六种不同位置的情况都成立。

1° 点B在点A和点C之间〔图1—2（a），（b）〕，这时AB、BC、AC同向，

$\therefore \quad AB+BC=AC.$

2° 点C在点A和点B之间〔图1—2（c），（d）〕，由1°有

$$AC+CB=AB,$$

根据（1.1）得$AC-BC=AB$，

$\therefore \quad AB+BC=AC.$

3° 点A在点B和点C之间〔图1—2（e），（f）〕，由1°有

$$BA+AC=BC,$$

根据(1.1)得 $-AB+AC=BC$，

$\therefore \quad AB+BC=AC.$

三点A、B、C中有二点重合或三点重合的情况，上述关系式显然成立。

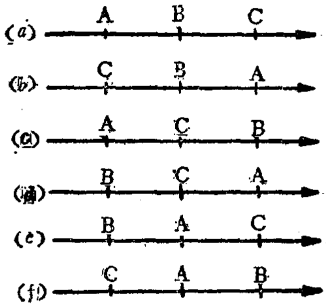

图1—2

上述定理叫做沙尔定理，公式（1.2）是已知AB、BC的数量，计算AC的数量的公式，它可以推广到轴上任意n个点的情况。

定理1.2 如果A_1、A_2、…，A_n是轴上的任意n个点，那么不论它们的位置顺序如何，下面的关系式成立：

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n. \quad (1.3)$$

证明：用数学归纳法

当$n=3$时，由（1.2）知：$A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3$，即（1.3）成立。

设当$n=k$时（1.3）成立，即$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k$
$=A_1A_k$，现证当$n=k+1$时（1.3）也成立。

在上式两边同时加上A_kA_{k+1}，得

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}$$
$$=A_1A_k+A_kA_{k+1}.$$

由（1.2）知

$$A_1A_k+A_kA_{k+1}=A_1A_{k+1},$$

$$\therefore\quad A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}=A_1A_{k+1},$$

即当$n=k+1$时，（1.3）也成立。

故对于所有的自然数n，（1.3）式都成立。

1.1.2 直线上的坐标系

在直线上任意选定一个原点O、一个正向和一个长度单位，就确定了直线上的一个坐标系，这条直线就叫做坐标轴，也叫做数轴，用OX表示，如图1—3．于是OX轴上任意一点P可以用一个实数来标明它的位置：以所取长度单位量出有向线段OP的长度$|x|$，因此有$OP=x$。当OP的方向和OX轴的正向相同时，x是正数；相反时，x是负数．当点P和原点O重合时，x等于零．我们把这个与点P对应的实数x叫做点P的坐标，记为$P(x)$。

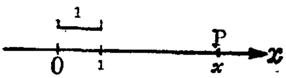

图 1—3

反过来，给定了任意一个实数x，在OX轴上有唯一的点以这个数为坐标。

这样，直线上的所有点的集

合和实数集合之间建立了一一对应关系。

建立了直线上的坐标系后，对于OX轴上的任意一条有向线段的数量，可用它的终点坐标和起点坐标来表示。

定理1.3 OX轴上的任意两点$A_1(x_1)$和$A_2(x_2)$所决定的有向线段A_1A_2的数量是：

$$A_1A_2 = x_2 - x_1. \tag{1.4}$$

证明：如图1—4，$OA_1 = x_1$，$OA_2 = x_2$，

根据(1.2) $A_1A_2 = A_1O + OA_2$，

根据(1.1) $A_1O = -OA_1 = -x_1$，

$\therefore \quad A_1A_2 = x_2 - x_1.$

图 1—4

这就是说：坐标轴上有向线段的数量等于它的终点坐标减去起点坐标。

我们知道，两点A_1、A_2之间的距离就是有向线段A_1A_2的长度$|A_1A_2|$。

推论：OX轴上任意两点$A_1(x_1)$、$A_2(x_2)$之间的距离d是：

$$d = |x_2 - x_1|.$$

例1 已知OX轴上的三点$A_1(-7)$、$A_2(0)$、$A_3(9)$，求A_1A_3、A_2A_3、A_3A_1的数量和长度。

解：由公式(1.4)

$$A_1A_2 = 0 - (-7) = 7, \qquad |A_1A_2| = 7;$$

$$A_2A_3 = 9 - 0 = 9, \qquad |A_2A_3| = 9;$$

$$A_3A_1 = -7 - 9 = -16, \qquad |A_3A_1| = 16.$$

例2 设A、B、C、D是OX轴上的任意四点，求证下式成立：

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD。$$

证明：设点A为原点，B、C、D 的坐标分别为 b、c、d，则

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = (b-0)(d-c) + (c-b)(d-0)$$
$$= -bc + cd = c(d-b),$$
$$AC \cdot BD = (c-0)(d-b) = c(d-b),$$
$$\therefore \quad AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD。$$

若两个数轴在同一直线上，单位与方向都相同，第二个数轴的原点 O' 刚好是第一个数轴上表示数 h 的点，这时同一点P 在第一数轴上的坐标 x，和在第二个数轴上的坐标x'之间有

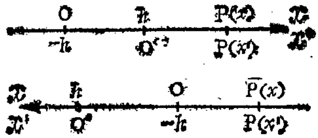

图 1—5

$$x = x' + h \text{ 或 } x' = x - h。 \tag{1.5}$$

因 $OP = x$，$O'P = x'$，$OO' = h$，

又 $OP = OO' + O'P$，

$\therefore$ $x = x' + h$ 或 $x' = x - h$。

1.1.3 平面直角坐标系

为了确定平面上点的位置，在平面上取两条互相垂直的数轴，一条叫X轴（或横轴），一条叫Y轴（或纵轴）。习惯上X轴取水平位置，选自左向右为正向，Y轴取铅垂位置，选自下到上为正向，它们的交点O叫原点，两轴上取相同的长度单位，这就确定了平面上的一个直角坐标系，记为O-XY。于是平面上任意一点P可以用一对有序实数来标明它的位置，如图1—6。自点P分别作X轴和Y轴的垂线，得垂足M和

N。设点M在X轴上的坐标为x，点N在Y轴上的坐标为y。从图1—6可以看出，$|x|$给出了点P到Y轴的距离，$|y|$给出了点P到X轴的距离。x和y的符号说明了它在Y轴或X轴的哪一侧。因此平面上任一点P的位置便可以由唯一的有序实数对（x, y）来表示。我们把这两个数x、y叫做平面直角坐标系上点P的坐标，x叫做点P的横坐标（简称横标），y叫做点P的纵坐标（简称纵标），记为$P(x, y)$或$P=(x, y)$。

反过来，如果已知一对有序实数（x，y），就可以在X轴、Y轴上分别确定两点M、N，过M、N分别作X轴、Y轴的垂线，此二垂线确定了唯一的交点P。这样平面上的点的集合与全体有序实数对的集合之间建立了一一对应关系。

两坐标轴把平面分为四个部分，每部分叫做一个象限。按在各象限中点的坐标的符号（+，+）、（−，+）、（−，−）、（+，−）分别叫做第一、第二、第三、第四象限，如图1—7所示。

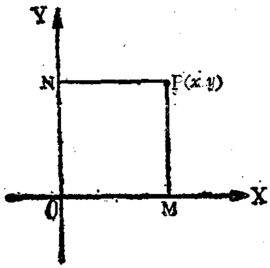

图1—6

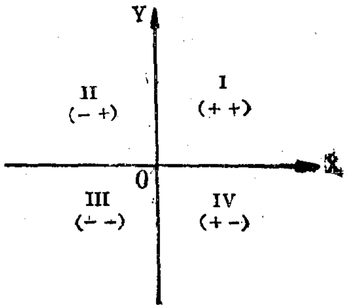

图1—7

X轴上点的坐标为$(x, 0)$，Y轴上点的坐标为$(0, y)$，原点的坐标为$(0, 0)$。坐标轴上的点不属于任何一个象限。

由初等几何中点的轴对称和中心对称的概念，可以知道：点$P_1(x, y)$和点$P_2(-x, y)$是关于Y轴对称的；点$d_1(x, y)$和点$P_3(x, -y)$是关于X轴对称的；点$P_1(x, y)$和点$P_4(-x, -y)$是关于原点对称的。利用这种对称性，对某些问题的解决往往会带来方便。

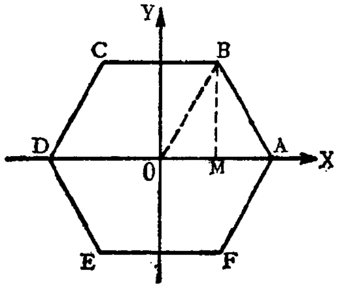

图 1—8

例 3 如图1—8，正六边形的边长为a（$a>0$），求正六边形各顶点的坐标。

解： 连结OB，作BM垂直于X轴，垂足为M，由正六边形的性质，可以求得

$$|OA|=a,\ |MB|=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad |OM|=\frac{1}{2}a.$$

∴点A的坐标为$(a, 0)$，点B的坐标为$\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

又根据图形的对称性，可以求得

点C的坐标为$\left(-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，点$D$的坐标为$(-a, 0)$.

点E的坐标为$\left(-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，

点F的坐标为$\left(\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

1.1.4 平面内两点间的距离和线段的定比分点

1. 坐标轴的平移

在已经建立了一个直角坐标系的平面上，建立一个新的

坐标系，使它合于下述条件：

（1）新的原点在原坐标系里是点（h, k）；

（2）新的X'轴、Y'轴分别与原来的X轴、Y轴平行同向，并且单位相同。

这时，同一点P若在原坐标系里的坐标为（x, y），在新坐标系里的坐标为（x', y'），那么

$$\begin{cases} x = x' + h, \\ y = y' + k. \end{cases} \tag{1.6}$$

因为建立合于上述条件的坐标系，实质上即是分别在X轴和Y轴上，建立1.1.2中提到的新数轴，在X轴上这一新数轴以原数轴中表示h的点为新原点，由公式（1.5）得：

$$x = x' + h,$$

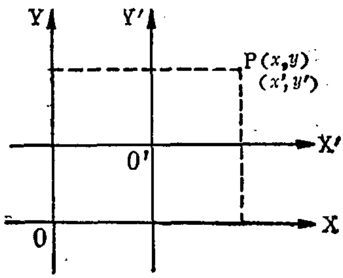

图 1—9

同理得 $y = y' + k$.

建立这样的新坐标系叫做平移坐标原点到点（h,k），公式（1.6）叫平移公式。平移公式也常写成下述等价形式：

$$\begin{cases} x' = x - h, \\ y' = y - k. \end{cases} \tag{1.7}$$

2. 两点间的距离

定理1.4 平面内任意两点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$间的距离是

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.8}$$

证明： 如图1—10，平移坐标轴到点P_1，设在新的坐标系里P_2的坐标为（x_2'，y_2'），由勾股定理得

$$|P_1P_2|=\sqrt{x_2'^2+y_2'^2}.$$

由(1.7)有　$x_2'=x_2-x_1$，　$y_2'=y_2-y_1$。

$$\therefore\quad d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

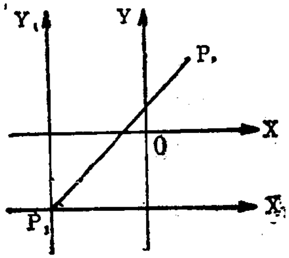

图 1—10

当P_1、P_2的连线平行于X轴时，则

$$d=|x_2-x_1|;$$

当P_1、P_2的连线平行于Y轴时，则

$$d=|y_2-y_1|.$$

推论：平面内任意一点P（x，y）到原点的距离是

$$d=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 4　已知一圆的圆心是（-1，3），半径是5，求它与X轴的交点。

解： 设所求点为P，由于P在X轴上，则其坐标为（x，0）。由题设条件，（x，0）与（-1，3）的距离应等于5，由公式（1.8）有

$$\sqrt{(x+1)^2+3^2}=5,$$

即　　$x^2+2x-15=0$。

解此方程得　$x_1=3$，　$x_2=-5$，

故所求交点为：（3，0），（-5，0）。

3．线段的定比分点

设点P分有向线段P_1P_2（不是零线段）成P_1P和PP_2，