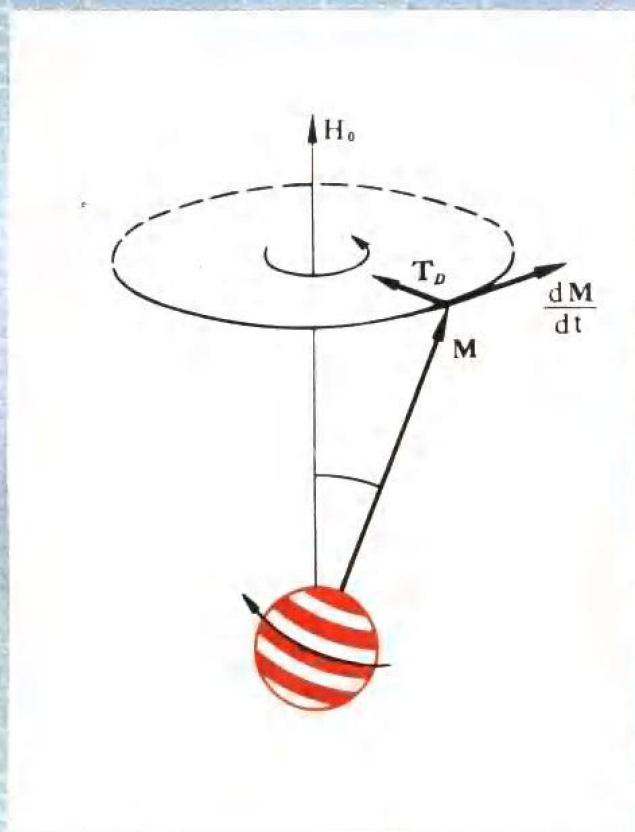


# 微波铁氧体 理论与技术

蒋仁培 魏克珠 编著



科学出版社

## 内 容 简 介

本书综述了微波铁氧体和旋磁波导系统的基本原理和微波效应；结合作者多年的研究工作，重点地介绍了七十年代以来有关微波铁氧体方面的新理论、新器件和新应用。

本书第一编的内容是微波铁氧体媒质的旋磁性（即微波铁氧体磁导率的张量特性）理论；第二编主要是旋磁规则波导系统的传播理论和基本传播效应；第三编是双模器件的设计和实验；第四编是非互易结环行器。

本书可供从事微波铁氧体和微波技术的科技人员参考，也可供高等院校有关专业的教师、研究生以及高年级学生阅读。

## 微波铁氧体理论与技术

蒋仁培 魏克珠 编著  
责任编辑 刘兴民 张兆富

科学出版社出版  
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1984年4月第一版 开本：787×1092 1/16  
1984年4月第一次印刷 印张：26  
印数：0001—2,600 字数：600,000

统一书号：15031·559  
本社书号：3489·15—7

定价：4.00元

# 前 言

本书系统地阐述了微波铁氧体的旋磁特性和微波在旋磁介质波导中的传播特性。全书共分四编(共十八章),即:旋磁介质的唯象理论、微波在旋磁介质中的传播、双模器件的设计原理和实践、三端结环行器。

第一章到第三章为第一编。本编系统地描述了磁矩进动方程和旋磁介质的旋磁特性,包括:饱和磁化铁氧体的磁导率张量特性、零场磁导率和未饱和磁化下张量磁导率的统计理论、旋磁介质的磁损耗和磁共振线宽的宏观理论,综述了旋磁材料的高功率非线性效应,提出了非均匀磁化铁氧体系统的张量磁导率的概念及张量磁导率的各种坐标变换式。

第四章到第十章为第二编。本编讨论微波在各种充有旋磁介质的规则波导中的传播问题。首先概括地综述了单模波导(只有一个模式传播)中的基本传播效应,即非互易相移、非互易场移效应、共振隔离效应以及磁化铁氧体波导系统中的异常旋磁模式和边导模式等。而后重点论述了用耦合波(模)理论分析波导中各种波型的传输和耦合问题,即用耦合波和简正波两种基本观点研究双模在旋磁波导中传播的基本效应。例如,从耦合波观点来看,出现纵向磁化情况下的法拉第旋转效应、四磁极磁化情况下的非互易变极化效应及偶磁极磁化情况下的互易变极化效应;从简正波观点看,在双模旋磁波导中出现简并的非互易相移、非简并的非互易波型差相移及非简并的互易波型差相移,后者即非互易双折射效应及互易的双折射效应。

第十一章到十五章为第三编。在这一编里,我们用网络理论分析了各种铁氧体双模器件的原理,讨论了双模器件的设计和应用,包括有双模波导移相器、双模变极化器和双模调制器等一系列电控铁氧体新器件。

第十六章到第十八章为第四编。本编主要论述Y结环行器的有关问题。总结了对称互易结的几种基本方法,重点放在微波网络理论的方法上。这种方法同场理论中的耦合模、简正模的观点相类似,具体地说,在处理非互易结问题中,网络矩阵的方法对应于耦合模方法,求矩阵本征值(矩阵对角化)的方法对应于简正模方法。必须指出,用阻抗(或导纳)本征值来处理各种集总参数环行器问题是很方便的。第十八章中,对带线Y形结环行器的处理上有两个特点:其一,用场和路相结合的方法导出了输入阻抗、频带公式和宽带化措施;其二,用耦合模理论研究双Y结环行器的宽带化机理。

每编的参考资料附在各编的后面。

李士根同志编写和整理了第八章的一部分内容。

北京邮电学院叶培大教授、南京大学翟宏如副教授和许培英同志对本书的初稿提出了一些宝贵意见,在此向他们表示感谢。

编著者

1982年3月于南京

# 目 录

前言 .....	i
----------	---

## 第一编 旋磁介质的唯象理论

第一章 张量磁导率和磁矩进动现象 .....	1
1.1 磁矩进动方程 .....	1
1.2 无耗旋磁介质的张量磁导率 .....	2
1.3 任意磁化方向的张量磁导率 .....	4
1.4 外张量磁导率 <sup>[1]</sup> .....	7
1.5 张量磁导率的物理意义 .....	11
1.6 去磁态磁导率的计算模型 .....	13
1.7 去磁态张量磁导率的统计理论 .....	15
1.8 部分磁化张量磁导率 .....	22
1.9 阻尼项的几种描述 .....	27
1.10 阻尼进动方程解 .....	28
1.11 形状各向异性对阻尼进动的影响 .....	32
1.12 去磁态损耗的统计理论 .....	33
1.13 零场损耗峰 .....	36
1.14 有耗的部分磁化张量磁导率的统计理论 .....	38
1.15 张量磁导率的归一化表示 .....	41
第二章 旋磁材料的磁损耗参数——线宽 .....	44
2.1 铁磁共振线宽 $\Delta H$ .....	44
2.2 外铁磁共振线宽 $\Delta H^e$ .....	45
2.3 有效线宽 $\Delta H_{eff}$ .....	47
2.4 自旋波的基本概念 .....	49
2.5 一致进动的弛豫机制 .....	51
2.6 单晶铁磁共振 <sup>[1]</sup> .....	53
2.7 多晶铁磁共振线宽 $\Delta H$ (多晶) .....	58
2.8 本征线宽 $\Delta H_0$ .....	62
2.9 非线性效应 <sup>[2]</sup> .....	64
第三章 各种坐标系中的张量磁导率 .....	75
3.1 张量磁导率的标准形 .....	75
3.2 直角坐标系中的旋转变换 .....	76
3.3 圆柱坐标系中的平移变换 .....	77
3.4 张量磁导率的坐标变换 .....	79
3.5 几种典型的非均匀磁化系统的张量磁导率 .....	82
3.6 坐标变换小结 .....	84
3.7 多中心磁化概念 .....	85
第一编参考资料 .....	88

## 第二编 微波在旋磁介质中的传播

第四章	微波在旋磁介质中传播的一般理论	90
4.1	纵向磁化下的波动方程	90
4.2	横向磁化下的波动方程	93
第五章	“无限”旋磁介质中的简正波和耦合波	98
5.1	纵向磁化——法拉第旋转效应	98
5.2	横向磁化——互易双折射效应及变极化效应	101
第六章	简正波理论	106
6.1	矩形波导中的简正波	106
6.2	圆波导中的简正波	125
6.3	微扰法	136
第七章	耦合波理论	145
7.1	规则波导的电波和磁波 <sup>[12]</sup>	145
7.2	旋磁波导系统的耦合传输线方程	148
7.3	纵向磁化解	150
7.4	横向磁化解	156
7.5	旋磁矩波导系统中波型的分类	162
第八章	铁氧体方波导中的双模传播	166
8.1	方波导的耦合传输线方程	166
8.2	纵向磁化铁氧体方波导的法拉第旋转效应	167
8.3	全充满横向磁化铁氧体方波导	170
8.4	最佳直流磁化场分布	184
8.5	部分充填横向磁化铁氧体方波导	186
8.6	$H_{10}$ 模和 $H_{01}$ 模传播特性小结	189
第九章	铁氧体圆波导中的双模传播	193
9.1	圆波导的耦合传输线方程	193
9.2	部分充填铁氧体波导中的法拉第旋转	194
9.3	全充满横向磁化铁氧体圆波导	197
9.4	部分充填横向磁化铁氧体圆波导	200
9.5	$H_{11}$ 模传播特性汇总表	211
9.6	附录——贝塞尔函数积分公式和数值表	211
第十章	双模传播的一般理论	217
10.1	“强耦合”和“弱耦合”	217
10.2	双模耦合波方程的本征值问题	219
10.3	简正波和耦合波	221
10.4	波型阻抗	222
10.5	传播常数	225
10.6	有效磁导率和有效介电常数	229
10.7	双模波导中基本旋磁效应的解释	230
10.8	非简并双模波导——矩波导互易移相器	232
10.9	互易移相器的分析和计算	237

第二编参考资料 .....240

### 第三编 双模器件的设计原理和实践

第十一章 双模器件的网络理论 .....241

- 11.1 概论 ..... 241
- 11.2 双模器件的网络理论 ..... 241
- 11.3 变极化环行器 ..... 246
- 11.4 双模隔离器 ..... 247
- 11.5 铁氧体变极化器<sup>[1][2]</sup> ..... 248
- 11.6 旋转线极化器 ..... 249
- 11.7 单边带调制器<sup>[3][4]</sup> ..... 250
- 11.8 电控衰减器 ..... 251
- 11.9 反射式多极化移相器<sup>[5]</sup> ..... 252
- 11.10 通过式多极化移相器 ..... 253
- 11.11 双模互易移相器<sup>[6][7]</sup> ..... 254
- 11.12 非互易旋转场移相器<sup>[8][9]</sup> ..... 255
- 11.13 环行移相双工器<sup>[12]</sup> ..... 256

第十二章 双模波导移相器 .....259

- 12.1 概述 ..... 259
- 12.2 双模圆极化移相器 ..... 261
- 12.3 双模多极化移相器 ..... 267
- 12.4 双模互易移相器 ..... 273
- 12.5 旋转场移相器 ..... 277
- 12.6 双模移相器的共同性问题 ..... 281

第十三章 双模变极化器 .....289

- 13.1 概述 ..... 289
- 13.2 双模变极化器 ..... 289
- 13.3 变极化器的性能参数 ..... 297
- 13.4 变极化器的设计 ..... 300

第十四章 双模极化调制器及其应用 .....304

- 14.1 极化旋转调制器 ..... 304
- 14.2 旋转线极化辐射器 ..... 306
- 14.3 旋转场多卜勒频移装置 ..... 307
- 14.4 隐蔽式圆锥扫描 ..... 308
- 14.5 单脉冲双模变换器 ..... 310

第十五章 其他双模器件 .....312

- 15.1 变极化开关 ..... 312
- 15.2 旋转式微波功率分配器(或合成器) ..... 313
- 15.3 磁调衰减器 ..... 314
- 15.4 变极化环行器的实践 ..... 314
- 15.5 双工变极化器 ..... 320
- 15.6 双工移相器 ..... 323

第三编附录 .....	326
附 3.1 传播常数的微扰公式、内场准静态近似和外介电常数 .....	326
附 3.2 传播常数的等效公式、有效介电常数 $\epsilon_{eff}$ .....	327
附 3.3 介质波片波型差相移的计算公式 .....	328
附 3.4 介质槽波片波型差相移的计算公式 .....	330
附 3.5 介质匹配器的传播常数和阻抗计算 .....	331
附 3.6 双模铁氧体器件的照片 .....	333
第三编参考资料 .....	336

## 第四编 结环行器

第十六章 结环行器的网络理论 .....	337
16.1 对称结环行器的散射矩阵理论 .....	337
16.2 非互易结的流图表示 .....	343
16.3 旋磁性与非互易结散射 <sup>[4]</sup> .....	345
16.4 结环行器的阻抗矩阵和导纳矩阵 .....	346
16.5 理想三端结环行器的矩阵表示 <sup>[1]</sup> .....	352
16.6 环行器的带宽公式 .....	354
第十七章 集总参数环行器 .....	357
17.1 概论 .....	357
17.2 非互易结的耦合电路方程 .....	358
17.3 集总参数环行器的本征值理论 .....	359
17.4 环行结的本征值 .....	363
17.5 窄带集总参数环行器 .....	364
17.6 宽带集总参数环行器 .....	368
17.7 集总参数环行器的耦合模理论 .....	373
17.8 集总参数环行器的结构参数和磁参数的设计曲线 .....	378
第十八章 带线结环行器 .....	380
18.1 Y形结铁氧体圆盘中的场方程解 <sup>[9-10]</sup> .....	380
18.2 Y结带线环行器的环行条件 .....	383
18.3 环行器的等效电路 .....	387
18.4 带线环行器的带宽 .....	388
18.5 带线环行器的宽带化 .....	389
18.6 双Y结环行器 .....	391
第四编参考资料 .....	405



# 第一编 旋磁介质的唯象理论

掌握旋磁介质的基本旋磁特性，是研究微波铁氧体应用到微波频段中去的重要环节之一。因此，在讨论微波铁氧体器件的理论和应用之前，有必要系统地介绍一下微波铁氧体材料的旋磁特性及其理论。众所周知，研究旋磁介质的理论，主要有两类方法：第一类是量子力学的处理方法，它能解决磁性理论的根本问题，本编不去涉及这个方法，因为它不能和工程中的实际问题直接地联系起来；第二类方法是用经典统计方法或热力学方法来讨论旋磁介质的基本特性，这是本编所采用的主要方法，因为它更适合于工程应用。

本编共分三章：第一章从磁矩进动方程这一唯象进动模型出发，描述旋磁介质磁导率(或磁化率)的张量特性；第二章从有耗情况下的张量磁导率的表达式出发，导出材料的损耗与铁磁共振线宽的关系，从而得到材料在各种磁化状态下的微波损耗参量——“线宽”，这给选择优异的低耗微波材料和了解磁损耗机理甚为重要；第三章是一般地讨论了张量磁导率的坐标变换，求出了张量磁导率在直角坐标系和圆柱坐标系中的表示形式，以及求出各种均匀磁化系统和几种特殊的非均匀磁化系统的张量磁导率的表达式，为第二编中解决微波铁氧体耦合波器件的理论打下基础。

## 第一章 张量磁导率和磁矩进动现象

### 1.1 磁矩进动方程

本节将讨论一下磁矩与外加磁场相互作用而产生的进动(磁矩运动的一种形式)。在旋磁介质中存在着许多“元”磁矩，若这些“元”磁矩的运动状态(包括其振幅和相位)都是一致的，那么我们可以用某一个磁化强度矢量  $M$  的运动来描述整个磁介质中“元”磁矩的运动状况。这种运动状态称为一致进动。事实上一致进动是旋磁介质中“元”磁矩进动的一种主要模式。除此以外，还有非一致进动的模式存在(这将在 2.4 节中讨论)。但一致进动模式是处于主要地位的，因此这里着重地讨论它。

如图 1.1 所示，磁化矢量  $M$  (简称磁矩  $M$ ) 围绕着恒磁场  $H_0$  ( $z$  轴方向) 作进动， $M$  的进动状态亦代表着介质中所有“元”磁矩的进动状态。 $\phi$  称为进动角； $dM/dt$  为磁矩  $M$  的变化率，它亦是一个矢量，它的方向既与  $M$  垂直又与恒磁场  $H_0$  垂直，在图中表示为沿圆周的切线方向。实际上这种进动是不会延续很久的，因为磁介质内部均有损耗存在，即磁矩进动均受到某种阻力。这种阻力迫使进动角  $\phi$  不断减小，最后使  $M$  趋向于恒磁场  $H_0$ 。这个过程就是直流磁化过程，磁介质所以能被磁化就说明其内部存在有阻尼损

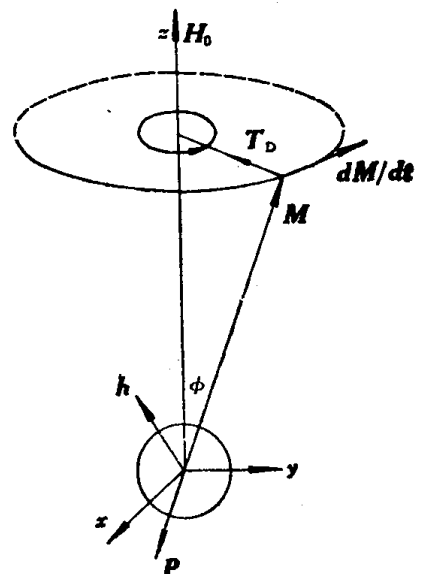


图 1.1 磁矩进动模型



耗。图中  $T_D$  标志着阻尼力的大小与方向，总的趋向是朝向  $H_0$  方向，它的具体表示待以后讨论。磁矩  $M$  受阻尼力的作用很快地转向  $H_0$  方向，其周期约为  $10^{-6}$  秒— $10^{-9}$  秒，如果要维持其进动，必须另外供给能量。因而，一般来说外加磁场  $H$  由两部分组成：一是恒磁化部分  $H_0$ ，二是交变磁化部分  $h$ 。磁矩进动方程由下式表示

$$dM/dt = -\gamma(M \times H) + T_D \quad (1.1)$$

式中， $\gamma$  称为回旋磁比，即磁离子（或自旋电子）的磁矩和动量矩的比值。对自旋电子而言， $\gamma = 2.8 \times 10^6$  周/秒·奥（或  $1.76 \times 10^7$  弧度/秒·奥）。 $H = H_0 + h$ ，一般情况下其恒磁场幅度  $|H_0|$  比交变磁场幅度  $|h|$  大得多， $|H_0| \gg |h|$ ，所以  $dM/dt$  的方向与  $H \times M$  的方向相一致。

方程 (1.1) 的建立，完全是从进动模型的物理概念引来的，所以称为唯象性理论。式 (1.1) 虽无严格推导，但它却是旋磁介质理论的基本公式，以后导出的许多旋磁特性，都是以这公式为基础的。如果  $T_D = 0$ ，就是非阻尼进动； $T_D \neq 0$  就是阻尼进动。若外加磁场不包括交变分量  $h$ ，这时非阻尼进动方程变为

$$dM/dt = -\gamma(M \times H_0) \quad (1.2)$$

式 (1.2) 可求出磁矩  $M$  的自由进动频率  $\omega_0$ 。设由于某种因素使打开的进动角为  $\phi$ ，磁矩  $M$  的运动按  $M = m_x, y, e^{i\omega_0 t}$  规律进动，而恒磁场  $H_0 = H_0 i_z$ ，代入式 (1.2)，写出其分量表示

$$\left. \begin{aligned} j\omega_0 m_x &= -\gamma H_0 m_y \\ j\omega_0 m_y &= \gamma H_0 m_x \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

解出式 (1.3)，得

$$\omega_0 = \gamma H_0 \quad (1.4)$$

若  $H_0 = 10^3$  奥，则自由进动频率  $\omega_0 = 17.6 \times 10^9$  弧度/秒，它落在微波波段范围之内。

非阻尼进动和阻尼进动的一个显著差别就是：在非阻尼进动时，其磁化矢量  $M$  的顶点轨迹为圆；在阻尼进动时，其磁化矢量  $M$  的顶点轨迹为螺旋线，阻尼越大，进动角  $\phi$  衰减越快。所以衰减很大的阻尼进动可看作是磁矩作转动的磁化过程。这时介质的旋磁特性就不十分明显了。

## 1.2 无耗旋磁介质的张量磁导率

在无限介质中，即不考虑边界“磁荷”引起的退磁场情况下，略去损耗项  $T_D$ ，求其磁矩进动和外加交变磁场的关系，由此导出无耗旋磁介质的张量磁导率，这是本节的主要目的。

为了清楚起见，先假定恒磁化场  $H_0$  平行于  $z$  轴，交变磁化场  $h$  在任意方向。在线性条件下，交变场幅度远小于恒磁场幅度。可令

$$H = H_0 i_z + h e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

式中， $\omega$  为交变场的频率（角频率的简称）。对磁矩  $M$  亦分为恒定部分  $M_0$  和交变部分  $m$  两部分，磁矩  $M$  的进动频率亦为  $\omega$ ，因为在强迫进动的情况下，进动频率等于强迫力的频率，因此磁矩  $M$  可写成

$$M = M_0 i_z + m e^{i\omega t} \quad (1.6)$$

把磁场和磁矩写成矩阵形式

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

把式(1.5)–(1.8)代入式(1.1), 当  $\mathbf{T}_D = 0$  时, 可写成下列分量形式:

$$\left. \begin{aligned} dm_x/dt &= -m_y\gamma(H_0 + h_z) + h_y\gamma(M_0 + m_z) \\ dm_y/dt &= m_x\gamma(H_0 + h_z) - h_x\gamma(M_0 + m_z) \\ dm_z/dt &= -m_x\gamma h_y + m_y\gamma h_x \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

在小信号近似条件下,  $h_x, h_y, h_z \ll H_0, m_x, m_y, m_z \ll M_0$ , 略去二级微量, 则得

$$\left. \begin{aligned} dm_x/dt &= -m_y\gamma H_0 + h_y\gamma M_0 \\ dm_y/dt &= m_x\gamma H_0 - h_x\gamma M_0 \\ dm_z/dt &\simeq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

解微分方程组(1.10), 其结果是

$$\left. \begin{aligned} 4\pi m_x &= \frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + j \frac{\omega\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y \\ 4\pi m_y &= -j \frac{\omega\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + \frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y \\ 4\pi m_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

注意, 上式中  $4\pi$  是人为加上去的, 这样可使后面的磁化率和磁导率之间的关系式中不出现  $4\pi$ . 式中,  $\omega_0 = \gamma H_0$ ,  $\omega_m = \gamma 4\pi M_0 = \gamma 4\pi M_s$  (因为进动角很小,  $M_0 = M_s$ ). 把式(1.11)写成矩阵形式

$$4\pi \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

顺便指出, 本书所用的单位制是混合使用的. 在式(1.12)中磁学量用高斯单位制, 以后各编用到麦克斯韦方程组时, 就用有理化的实用单位制, 则式(1.12)应写为

$$\mathbf{m} = \mu_0 \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{h} \quad (1.13)$$

式中,  $\mu_0$  为真空中的磁导率,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  亨/米;  $\mathbf{h}$  的单位是安·匝/米,  $\mathbf{m}$  的单位是韦伯/米<sup>2</sup>.

式(1.12)中张量磁化率可表示为

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

上式张量磁化率的分量分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \chi_{xx} = \chi_{yy} &= \frac{\omega_0\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \chi_{xy} = -\chi_{yx} &= j \frac{\omega\omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

根据张量磁化率  $\chi$  便可求得张量磁导率  $\mu$  的表示式

$$\mu = I + \chi \quad (1.16)$$

式中,  $I$  为单位矩阵. 磁感应密度  $b$  和磁场强度  $h$  的关系为

$$\begin{aligned} b &= h + 4\pi m \\ &= (I + \chi) \cdot h \\ &= \mu \cdot h \end{aligned} \quad (1.17)$$

式中

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu & -j\kappa & 0 \\ j\kappa & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

故张量  $\mu$  具有反对称特性, 以后我们会知道反对称性是微波铁氧体非互易特性的根本所在. 其中

$$\left. \begin{aligned} \mu &= 1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \kappa &= -\frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \mu_z &\approx 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

由上式可知, 张量磁导率的分量  $\mu$ ,  $\kappa$  具有强烈的频散特性, 当电磁波的频率  $\omega$  等于磁矩自由进动频率  $\omega_0$  时,  $\mu$ ,  $\kappa$  趋于无限大, 这现象叫铁磁共振现象. 除此以外,  $\mu$ ,  $\kappa$  还出现负值, 如图 1.2 所示. 我们知道铁磁介质在高频磁化时, 其磁导率总是正值, 而这里却出现负值, 这是旋磁性的另一特点.

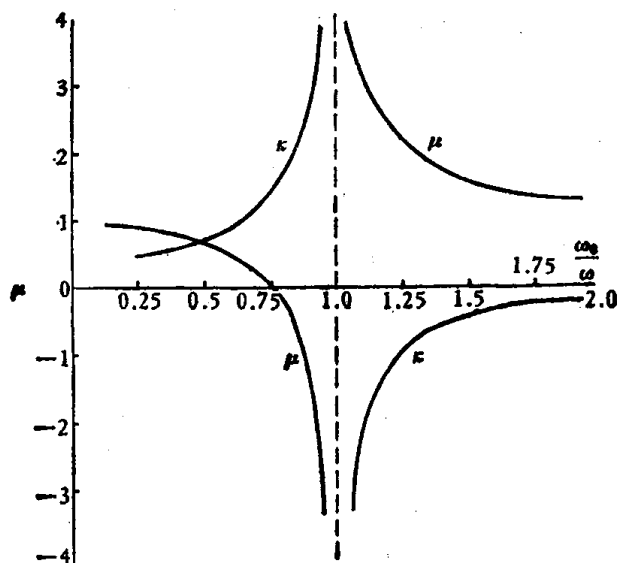


图 1.2 张量磁导率分量  $\mu$ ,  $\kappa$  的磁场变化曲线

### 1.3 任意磁化方向的张量磁导率

在上面的讨论中, 都假定磁化场  $H_0$  平行于坐标轴  $z$ . 如果磁化方向在空间的任意方向,  $\mu$  的形式会否变化呢? 这个问题虽然对解决大多数波导传输问题并不十分重要, 因

为在选取波导的坐标轴时,总可能选磁化方向和座标轴平行,使张量  $\mu$  的形式尽可能简单,避免解题时带来人为的复杂性.但在讨论晶格和磁畴趋向时,可能相对于坐标轴趋向在任意方向,这就需要讨论一下任意方向磁化时的张量磁导率.

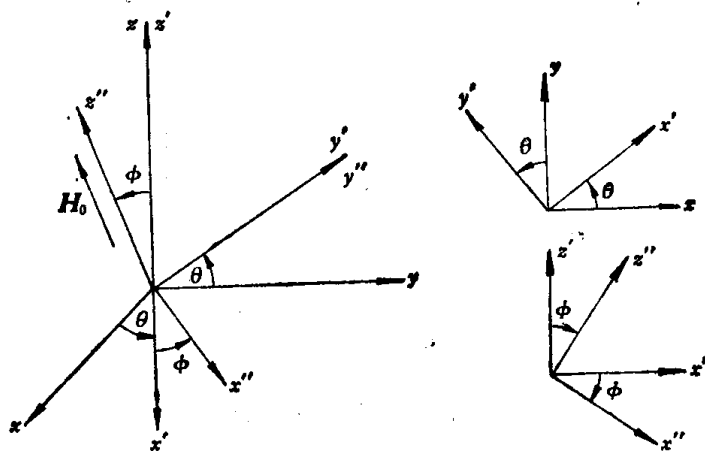


图 1.3 空间坐标旋转关系

图1.3为空间三个坐标系的相互关系,原坐标系  $(x, y, z)$  绕  $z$  轴旋转  $\theta$  角后得到  $(x', y', z')$  坐标系;  $(x', y', z')$  坐标系绕  $y'$  轴旋转  $\phi$  角后得到  $(x'', y'', z'')$  坐标系. 若磁化方向  $H_0$  平行于  $z''$  轴,把  $(\theta, \phi)$  视为  $H_0$  在  $(x, y, z)$  坐标系中的相对趋向角. 我们的目的是要通过三个坐标系中的旋转关系,求出任意磁化方向下的张量磁导率  $\mu$  在  $(x, y, z)$  坐标系中的表示式.

首先求出坐标系之间的旋转变换关系. 设从  $(x, y, z)$  坐标系变换到  $(x', y', z')$  坐标系的绕  $z$  轴  $\theta$  角的变换叫  $\Theta$  变换:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.20a)$$

其逆变换为

$$\Theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.20b)$$

同理,求出从坐标系  $(x', y', z')$  通过绕  $y'$  轴旋转  $\phi$  角到  $(x'', y'', z'')$  坐标系的变换叫  $\Phi$  变换,有

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (1.21a)$$

其逆变换

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (1.21b)$$

磁感应强度矢在  $(x'', y'', z'')$  坐标系中表示为  $b''$ ; 磁场强度矢在  $(x'', y'', z'')$  坐标

系中表示为  $\mathbf{h}''$ ,  $\mathbf{b}''$  和  $\mathbf{h}''$  之间的关系为已知:

$$\mathbf{b}'' = \boldsymbol{\mu}(x'', y'', z'') \cdot \mathbf{h}'' \quad (1.22)$$

式中,  $\boldsymbol{\mu}(x'', y'', z'')$  为  $\boldsymbol{\mu}$  在  $(x'', y'', z'')$  坐标系中的表示,  $\mathbf{z}''$  表示  $\mathbf{H}_0$  沿  $z''$  轴. 因为  $\mathbf{H}_0$  平行于  $z''$  轴, 故  $\boldsymbol{\mu}$  的表示式取为标准形式(详见 3.1 节).

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x & -j\kappa & 0 \\ j\kappa & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

式中,  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  仅表示张量  $\boldsymbol{\mu}$  的三个对角分量,  $\pm j\kappa$  为其非对角分量. 设矢量  $\mathbf{b}, \mathbf{h}$  在  $(x', y', z')$  坐标系中表示为  $\mathbf{b}', \mathbf{h}', \mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{h}'$  和  $\mathbf{b}'', \mathbf{h}''$ , 它们之间有下列变换关系

$$\mathbf{h}'' = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{h}' \quad (1.24a)$$

及

$$\mathbf{b}' = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{b}'' \quad (1.24b)$$

把式(1.22)代入式(1.24b), 得到

$$\mathbf{b}' = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{h}' \quad (1.25)$$

同理, 根据  $\mathbf{b}', \mathbf{h}'$  和  $\mathbf{b}, \mathbf{h}$  之间变换关系可求出:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{b}' \\ &= \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{h} \\ &= \boldsymbol{\mu}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{h} \end{aligned} \quad (1.26)$$

式中,  $\boldsymbol{\mu}(\theta, \phi)$  为任意  $\theta, \phi$  方向磁化下的  $\boldsymbol{\mu}$  值:

$$\boldsymbol{\mu}(\theta, \phi) = \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Theta} \quad (1.27)$$

把(1.20a), (1.20b)和(1.21a), (1.21b)的表示式代入式(1.27)并展开它, 求出  $\boldsymbol{\mu}(\theta, \phi)$ :

$$\boldsymbol{\mu}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mu_{xx} &= (\mu_x \cos^2 \phi + \mu_z \sin^2 \phi) \cos^2 \theta + \mu_y \sin^2 \theta \\ \mu_{xy} &= (\mu_x \cos^2 \phi + \mu_z \sin^2 \phi - \mu_y) \sin \theta \cos \theta - j\kappa \cos \phi \\ \mu_{xz} &= (\mu_z - \mu_x) \sin \phi \cos \phi \cos \theta + j\kappa \sin \theta \cos \phi \\ \mu_{yx} &= (\mu_x \cos^2 \phi + \mu_z \sin^2 \phi - \mu_y) \sin \theta \cos \theta + j\kappa \cos \phi \\ \mu_{yy} &= (\mu_x \cos^2 \phi + \mu_z \sin^2 \phi) \sin^2 \theta + \mu_y \cos^2 \theta \\ \mu_{yz} &= (\mu_z - \mu_x) \sin \phi \cos \phi \sin \theta - j\kappa \sin \phi \cos \theta \\ \mu_{zx} &= (\mu_z - \mu_x) \sin \phi \cos \phi \cos \theta - j\kappa \sin \theta \sin \phi \\ \mu_{zy} &= (\mu_z - \mu_x) \sin \phi \cos \phi \sin \theta + j\kappa \sin \phi \cos \theta \\ \mu_{zz} &= \mu_x \sin^2 \phi + \mu_z \cos^2 \phi \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

由此可见, 任意磁化方向的张量磁导率具有九个分量, 其非对角分量元素有如下共轭关系,  $\mu_{ij} = \mu_{ji}^*$

现在来观察一下几种特殊情况:

(1) 若  $\mathbf{H}_0$  平行  $z$  轴(即  $\theta = 0, \phi = 0$ ), 代入式(1.29)得到

$$\boldsymbol{\mu}(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu_x & -j\kappa & 0 \\ j\kappa & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

显而易见,当  $\mu_x, \mu_y$  相等时,式(1.30)与式(1.18)完全相同.

(2) 若  $H_0$  平行  $x$  轴(即  $\theta = 0, \phi = \pi/2$ ), 代入式(1.29)得到

$$\boldsymbol{\mu}(0, \pi/2) = \begin{bmatrix} \mu_z & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & -j\kappa \\ 0 & j\kappa & \mu_x \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

(3) 若  $H_0$  平行于  $y$  轴(即  $\theta = \pi/2, \phi = \pi/2$ ), 代入式(1.29)得到

$$\boldsymbol{\mu}(\pi/2, \pi/2) = \begin{bmatrix} \mu_y & 0 & j\kappa \\ 0 & \mu_z & 0 \\ -j\kappa & 0 & \mu_x \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

(4) 若  $H_0$  平行于  $(x, 0, y)$  平面(即  $\theta$  任意,  $\phi = \pi/2$ ), 代入式(1.29)得到

$$\boldsymbol{\mu}(\theta, \pi/2) = \begin{bmatrix} \mu_z \cos^2 \theta + \mu_y \sin^2 \theta & (\mu_z - \mu_y) \sin \theta \cos \theta & + j\kappa \sin \theta \\ (\mu_x - \mu_y) \sin \theta \cos \theta & \mu_z \sin^2 \theta + \mu_y \cos^2 \theta & - j\kappa \cos \theta \\ - j\kappa \sin \theta & j\kappa \cos \theta & \mu_x \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

## 1.4 外张量磁导率<sup>[1]</sup>

在 1.2 节中解无耗进动方程时仅考虑无限大旋磁介质情况, 没有考虑样品边界表面“磁荷”对磁矩进动的影响. 实用中往往不是无限旋磁介质的情况, 所以有必要考虑一下有边界情况下的张量磁导率, 叫外磁导率. 在本节中, 为区别起见, 把无界情况的张量磁导率(或磁化率)称为内张量磁导率  $\boldsymbol{\mu}_i$  (或内张量磁化率  $\boldsymbol{\chi}_i$ ); 而把有界情况的张量磁导率(或磁化率)称为外张量磁导率  $\boldsymbol{\mu}_e$  (或外张量磁化率  $\boldsymbol{\chi}_e$ ).

和铁磁学中处理静磁问题相类似, 为了描述边界“磁荷”对进动的影响, 引入了退磁场的概念, 即把表面磁荷的影响作为有效退磁场来处理. 样品内部的有效磁场等于外加磁场减去退磁场, 因而有

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{H}_i &= \mathbf{H}_e - \mathbf{N} \cdot 4\pi \mathbf{M}_e \\ \text{(b)} \quad \mathbf{h}_i &= \mathbf{h}_e - \mathbf{N} \cdot 4\pi \mathbf{m} \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

式中,  $\mathbf{H}_i$  为恒定内磁场,  $\mathbf{H}_e$  为恒定外磁场;  $\mathbf{h}_i$  为交变内磁场,  $\mathbf{h}_e$  为交变外磁场;  $\mathbf{N} \cdot 4\pi \mathbf{M}_e$  和  $\mathbf{N} \cdot 4\pi \mathbf{m}$  分别表示恒定退磁场和交变退磁场;  $\mathbf{N}$  为样品的形状退磁因子, 它反映对不同样品形状、不同磁化方向有不同的表面“磁荷”分布, 因而有不同的退磁场. 它一般可用张量表示:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{xy} & N_{xz} \\ N_{yx} & N_{yy} & N_{yz} \\ N_{zx} & N_{zy} & N_{zz} \end{bmatrix}$$

随着内磁场  $\mathbf{h}_i$  和外磁场  $\mathbf{h}_e$  的引入, 必然要考虑内张量磁化率  $\boldsymbol{\chi}_i$  和外张量磁化率  $\boldsymbol{\chi}_e$  的定义, 它们和  $\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_e$  的对应关系是这样的:

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad 4\pi \mathbf{m} &= \boldsymbol{\chi}_i \cdot \mathbf{h}_i \\ \text{(b)} \quad 4\pi \mathbf{m} &= \boldsymbol{\chi}_e \cdot \mathbf{h}_e \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

把式(1.34b)代入式(1.35a), 得

$$4\pi \mathbf{m} = \boldsymbol{\chi}_i \cdot \mathbf{h}_e - \boldsymbol{\chi}_i \cdot \mathbf{N} \cdot 4\pi \mathbf{m}$$

解出

$$(I + \chi_i \cdot N)4\pi m = \chi_i \cdot h_c$$

故可求出  $4\pi m$ :

$$4\pi m = (I + \chi_i \cdot N)^{-1} \cdot \chi_i \cdot h_c \quad (1.36)$$

把式(1.36)和式(1.35b)相比较,便得出外张量磁化率  $\chi_e$  的表示式:

$$\chi_e = (I + \chi_i \cdot N)^{-1} \cdot \chi_i \quad (1.37)$$

式中,  $I$  为单位张量矩阵,可写成单位矩阵的形式:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而外张量磁导率可根据定义求出

$$\begin{aligned} \mu_e &= I + \chi_e \\ &= I + (I + \chi_i \cdot N)^{-1} \cdot \chi_i \end{aligned} \quad (1.38)$$

式(1.38)中的  $\chi_i$  是已知的,它就是未考虑边界退磁场影响时的张量磁导率(即式(1.14)中的  $\chi$ )。所以外张量磁导率  $\mu_e$  可直接从式(1.38)算出。这种处理方法比较方便,否则把退磁场项引入进动方程,然后直接解进动方程也可求出  $\mu_e$ ,但处理起来非常麻烦。

若样品是椭球体,样品的主轴与坐标轴平行,而且磁化方向与主轴平行,这时  $N$  就退化为对角化矩阵

$$N = \begin{bmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

而内张量磁化率  $\chi_i$  表示为

$$\chi_i = \begin{bmatrix} \chi & -j\chi_a & 0 \\ j\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

式中,  $\chi$  及  $\chi_a$  分别为张量磁化率  $\chi_i$  的对角分量和非对角分量。

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \chi_a &= \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

把式(1.39)、(1.40)代入式(1.38)便得到  $\mu_e$  的表示式

$$\mu_e = \begin{bmatrix} \mu_x^e & -j\kappa^e & 0 \\ j\kappa^e & \mu_y^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

式中,  $\mu_x^e$ 、 $\mu_y^e$  和  $\kappa^e$  为外张量磁导率的分量,其表示式为

$$\left. \begin{aligned} \mu_x^e &= 1 + [1 + N_x(\chi^2 - \chi_a^2)]/\Delta \\ \mu_y^e &= 1 + [1 + N_y(\chi^2 - \chi_a^2)]/\Delta \\ \kappa^e &= \chi_a/\Delta \\ \Delta &= (1 + \chi N_x)(1 + \chi N_y) - N_x N_y \chi_a^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.42-1)$$



所以外张量磁导率  $\mu_c$  在形式上和无界情况的张量磁导率  $\mu$  是一致的,只是其中分量的具体表达式不同。

为了把式 (1.42-1) 的分量表达式写得更清楚,使其物理概念更明确些,我们将式 (1.41) 中的  $\chi, \chi_0$  值代入之。在无界情况下,  $\chi_i$  中没有考虑恒定退磁场的影响,而  $\chi_c$  中必须计及这个影响,因为在式 (1.42-1) 中的  $N_x, N_y$  只计及交变退磁场的作用。考虑到这点,只要把式 (1.41) 中的  $\omega_0$  换成  $\omega_0 - N_z \omega_m$ , 其中  $N_z \omega_m$  就代表恒定退磁场项。从而把式 (1.42-1) 改写成

$$\left. \begin{aligned} \mu_x^c &= 1 + \frac{1}{D} \omega_m \omega_y \\ \mu_y^c &= 1 + \frac{1}{D} \omega_m \omega_x \\ \kappa^c &= \frac{1}{D} \omega_m \omega \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

式中

$$\begin{aligned} D &= \omega_r^2 - \omega^2 \\ \omega_r &= \sqrt{\omega_x \omega_y}^{[2]} \\ \omega_x &= \omega_0 + \omega_m (N_x - N_z) \\ \omega_y &= \omega_0 + \omega_m (N_y - N_z) \end{aligned}$$

$\omega_r$  称为有界情况下的铁磁共振频率。 $\omega_x, \omega_y$  的物理意义可以这样来理解: 即它们的几何平均值就是铁磁共振频率  $\omega_r$ 。把  $\omega_x, \omega_y$  及  $\omega_0 = \gamma H_0, \omega_m = \gamma 4\pi M_0$  代入  $\omega_r$  的表示式中,得到著名的基特尔 (Kittle) 公式

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{[\omega_0 + \omega_m (N_x - N_z)][\omega_0 + \omega_m (N_y - N_z)]} \\ &= \gamma \sqrt{[H_0 + (N_x - N_z) 4\pi M_0][H_0 + (N_y - N_z) 4\pi M_0]} \quad (1.44) \end{aligned}$$

当  $\omega \rightarrow \omega_r$ , 即交变场的频率等于铁磁共振频率时,且  $D \rightarrow 0, \mu^c \cdot \kappa^c \rightarrow \infty$ 。式 (1.44) 告诉我们: 当  $N_x = N_y = 0$ , 即无横向退磁场的情况下,  $\omega_r = \gamma(H_0 - N_z 4\pi M_0)$ , 这时只有纵向退磁场(恒定的退磁场)对共振频率有影响。但在一般情况下,基特尔公式中包含着交变退磁场和恒定退磁场两部分的影响。

样品退磁因子  $N_x, N_y, N_z$  的值,取决于样品的形状、磁化方向及旋转椭球体主轴相对于坐标轴的位置时,有下列计算公式<sup>[3]</sup>:

(1) 对扁的旋转椭球体,即轴半径满足  $a < b = c$ , 当磁化在主轴方向时,有

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 1 - 2N_z \\ N_y = N_z &= \frac{1}{2} \left[ \frac{k^2}{(k^2 - 1)^{3/2}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} - \frac{1}{k^2 - 1} \right] \\ k &= c/a \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

(2) 对长的旋转椭球体,即轴半径满足  $a = b < c$ , 当磁化在主轴方向时,有

$$\left. \begin{aligned} N_x = N_y = (1 - N_z)/2 \\ N_z = k^2 - 1 \left[ \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}} \ln (k + \sqrt{k^2 - 1} - 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

(3) 对平行立方体,无严格解,但是可以根据工程近似公式计算退磁因子,若坐标轴平行于各立方体边,则有

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{A_x}{A_x + A_y + A_z} \\ N_y &= \frac{A_y}{A_x + A_y + A_z} \\ N_z &= \frac{A_z}{A_x + A_y + A_z} \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

其中,  $A_x, A_y, A_z$  分别表示样品在三个坐标面上的投影面积.

有了退磁因子的值,就可计算各种典型的样品形状的外张量磁导率的表示式.

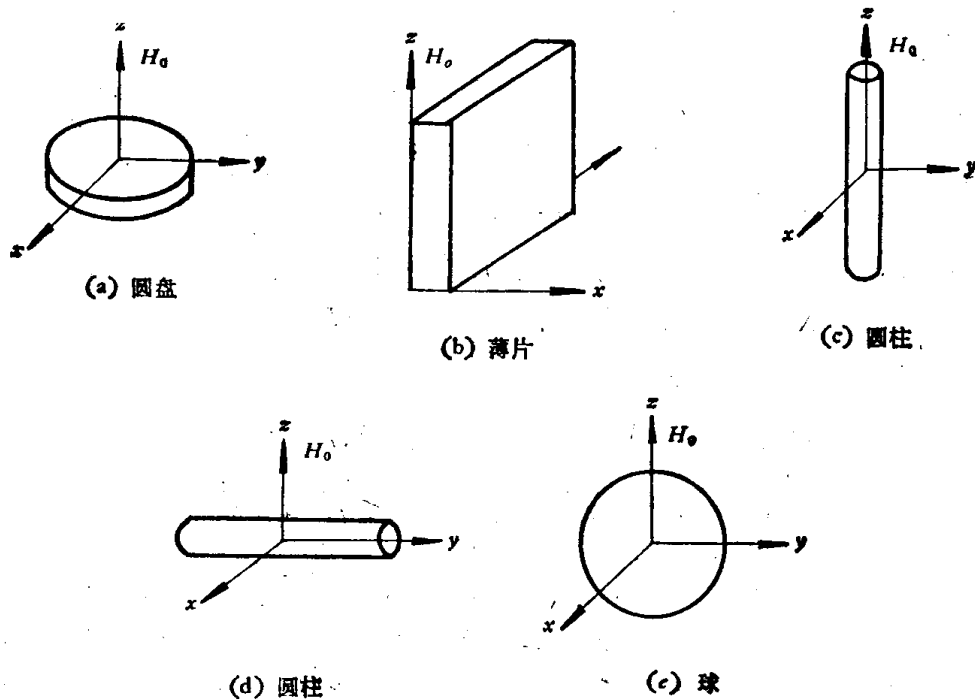


图 1.4 几种典型形状样品

(1) 对薄圆盘样品(图 1.4a),

$$\left. \begin{aligned} N_x = 0, N_y = 0, N_z = 1 \\ \mu_x^e = \mu_y^e = 1 + \frac{1}{D} \omega_m (\omega_0 - \omega_m) \\ \kappa^e = \frac{1}{D} \omega \omega_m \\ D = (\omega_0 - \omega_m)^2 - \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

(2) 对薄片样品(图 1.4(b)),