SHUXUE FENXI XITIKE JIAOCAI

数学分析习题课教材

方企勤　林源渠　编著

北京大学出版社

北 京 大 学 教 材

数学分析习题课教材

方企勤　林源渠　编著

北 京 大 学 出 版 社

内 容 简 介

这是一本数学分析习题课的教科书．全书共分七篇：分析基础、一元微分学、一元积分学、级数、多元微分学、多元积分学，综合题例解．题目都经过精选，难易适中有趣．许多题是作者最近几年积累起来的新题目．全书共有六十四讲，每讲前面列出大课内容的要点，课内题给出详细的证明或解答，以便说明解题的一般方法和特殊技巧；还有一些判断题，以便分析和讨论初学者易犯的错误，以加深对内容的理解．对课外题都有答案或提示．最后一节是综合例题，题目主要选自我校历届研究生试题和数学竞赛试题；读者可以欣赏到各种各样别出心裁的解法．

北京大学教材

数学分析习题课教材

方企勤　林源渠　编著

责任编辑　徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

国防科工委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

850×1168毫米　32开本　14.25 印张　350 千字

1990年11月第一版　1990年11月第一次印刷

印数：00001—3150册

ISBN7-301-01152-0/O·199

定价：6.80元

序　言

数学分析是数学系一门重要的基础课。数学分析大课内容的更新和经验的积累，通过数学分析教材的编写得到很好的推广和继承。与大课配合的数学分析习题课，在培养学生分析问题和解题的能力方面起了重要的作用，学生都反映通过上习题课得很大的收获。但是习题课的教学经验并没有很好的继承，新上习题课的教员都得从头开始做起，把大量时间花在选题上，习题课质量难以进一步提高。我们编写这本教材，就是使多年从事过习题课教学的教员能把经验很好的总结出来供新上习题课的教员借鉴和参考，使习题课的质量能逐年得以提高。

这本数学分析习题课教材是根据我校情况编写的。过去数学分析大课占有 224 学时，后来压缩到 192 学时，限三学期讲完。第一学期每周两次习题课，后两学期每周一次习题课。针对这一情况习题量作了相应的精简。全书共分七篇六十四讲，七篇是：分析基础、一元微分学、一元积分学、级数、多元微分学、多元积分学、综合题例解。前两篇及第三篇的前面部分属于第一学期，所以习题的量较多。后几篇习题量少些。为了使读者更好了解大课与习题课的配合，我们在每讲前面扼要地概述大课所讲的概念、定理和公式等，这样做也便于学生做题时查阅。

根据我们的经验，习题课应包含两方面内容：其一是把学生课外作业中有代表性的错误整理成几条，写在黑板上让学生自己来鉴别，由学生自己得出正确的结论，教员只是起引导作用；其二是做新的题，通过做题教给学生解题的一般方法和一些特殊的技巧。关于第一方面的内容，我们挑选了一些历届学生中常见的错误编成判断题，它们是很好的反面教材，能帮助学生正确理解

概念和定理的条件．关于第二方面的内容，我们对许多题介绍几种解法或证法，这有利于活跃学生的思维，激发学习的兴趣，使他们在掌握基本知识和一些技巧的基础上，进一步去钻研问题．我们在某些题后加了几句说明，有的是想指出题目的作用和意义，使学生对问题的实质有所理解，而不至停留于会解一个问题；有的是把学生接触过的内容归纳起来，使知识更系统化、条理化．对课外题中的运算题，书的最后都有答案，对证明题的大部分给出了提示．

题目安排上，我们把较难的题或有代表性的题放在课内题，有了课内题的示范和启示，课外题相对容易些．课外题中也有个别的难题，目的是使读者知道题目所给出的事实．在选择题目时，考虑围绕几个有意义的主题来安排题目．如多元积分学中围绕单层位势、双层位势及两者关系共安排了六个题，为了计算单层位势又在参变积分与定积分中作了准备．又如围绕调和函数安排了六个题，尽可能把有紧密联系的题编在一起．

第七篇是讲解综合性例题，共有36个题．这些主要选自我校历届研究生试题和几次数学竞赛试题．有些题给出了多种多样解法，某些解法是吸取学生试卷中的想法演变而得的．这一部分题对想进一步提高解题能力的学生，特别是想报考研究生的读者会有所帮助．

有了习题课教材，习题课还要不要上？习题课教员还能不能起作用？我们认为个别能力强的，看了课内题后就能独立完成课外题的学生，提出免修习题课也是可以的．但对绝大多数学生来说，习题课是十分必要的．习题课教员即使采用我们的课内题，要上好习题课还得花时间充分准备．首先课外作业中哪些错误要求学生讨论，怎么引导讨论；其次习题课上怎么启发引导学生做题，不至于使学生的思想陷入茫无头绪之中，也不至于使学生的思路在错误方向上走得太远．这就要习题课教员善于在观察学生做题时发现问题，及时加以引导．要做到这一点，需要习题课教

员事先对内容和有可能产生的问题作充分准备，这样才能在习题课上因势利导，随机应变，很好地掌握说话的火候和分寸。

此书编写得到我系领导的支持，编辑徐信之同志为审编此书付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于编者水平有限，难免会有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

编者于北京大学

1989年3月

目　　录

第一篇　分析基础

§1　实数公理·确界·不等式

1° 实数公理．在集合 $\boldsymbol{R}$ 内定义了分别称为加法"+"和乘法"·"的运算．并定义了元素间的顺序关系"<"．若 $\boldsymbol{R}$ 满足下面三公理，则称 $\boldsymbol{R}$ 为实数系或实数空间．

Ⅰ．域的公理

（1）交换律　$x+y=y+x$，$x\cdot y=y\cdot x$；

（2）结合律　$(x+y)+z=x+(y+z)$，$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$；

（3）存在元素 0 与 1，$0\neq1$，满足：

$$x+0=x,\qquad x\cdot1=x.$$

（4）存在负元素，对非零元素存在逆元素，满足：

$$x+(-x)=0,\qquad x\cdot x^{-1}=1\quad(x\neq0);$$

（5）分配律　$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$．

Ⅱ．全序公理

（1）$\forall x,y\in\boldsymbol{R}$，以下三种关系

$$x<y,\qquad x=y,\qquad y<x$$

有且仅有一个成立；

（2）传递性　$x<y$，$y<z\Rightarrow x<z$；

（3）$x<y$，$z\in\boldsymbol{R}\Rightarrow x+z<y+z$；

（4）$x<y$，$z>0\Rightarrow x\cdot z<y\cdot z$．

Ⅲ．连通公理

若集合 $\boldsymbol{R}$ 的子集 A，B 满足：

（1）$A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$（不空）；

（2）$A\cup B=\boldsymbol{R}$（不漏）；

（3）$\forall x\in A$，$\forall y\in B\Rightarrow x<y$（不乱）；则或集合$A$有最大元素而$B$无最小元素，或集合$B$有最小元素而$A$无最大元素。

2° 上确界定义。

设集合$E\subset \mathbf{R}$，若数M满足：

Ⅰ. $\forall x\in E\Rightarrow x\leqslant M$（即$M$为$E$的一个上界）；

Ⅱ. 若M'是E的上界，则$M\leqslant M'$，则称M是集合E的上确界。记作 $M=\sup E$ 或 $M=\sup\limits_{x\in E}x$。

3° 非空有上界的数集必有上确界。

4° 绝对值不等式：

$$-r\leqslant x\leqslant r\Longleftrightarrow |x|\leqslant r;$$

$$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|;\qquad |x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

第一讲　课内题

1. 求证：1）$|x|-|y|\leqslant|x\pm y|$；2）$||x|-|y||\leqslant|x\pm y|$。

证　1）$|x|=|x\pm y\mp y|\leqslant|x\pm y|+|y|\Rightarrow$1)。

2）由1），$|x|-|y|\leqslant|x\pm y|$，同理得

$$|y|-|x|\leqslant|y\pm x|=|x\pm y|.$$

由绝对值定义（或由$-|x\pm y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x\pm y|$）推出2）。

2. 设$a\leqslant c\leqslant b$。求证：$|c|\leqslant\max(|a|,|b|)$。

证法一

$$\max(|a|,|b|)\geqslant|b|\geqslant b\geqslant c,\tag{1}$$

$$-\max(|a|,|b|)\leqslant-|a|\leqslant a\leqslant c.\tag{2}$$

联合(1),(2)即得$|c|\leqslant\max(|a|,|b|)$。

证法二　分$c\geqslant0$与$c<0$情形。当$c\geqslant0$时，

$$c\leqslant b\Rightarrow|c|\leqslant|b|\leqslant\max(|a|,|b|).$$

当$c<0$时，$0\leqslant-c\leqslant-a\Rightarrow|c|\leqslant|a|\leqslant\max(|a|,|b|)$。

3. 设$a,b>0$，求证：

1）$a^p+b^p\leqslant(a+b)^p$　$(p>1)$；

2）$a^p+b^p\geqslant(a+b)^p \quad (0<p<1)$。

证 1）当 p 是正整数时，利用二项式公式

$$(a+b)^p=a^p+c_p^1a^{p-1}b+c_p^2a^{p-2}b^2+\cdots+b^p,$$

显然结论成立。当 p 为一般实数时，不能用二项式公式，但 $p=2$ 时的推导：

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)\geqslant a^2+b^2$$

是否能用呢？

令 $p=1+h \quad (h>0)$。

$$(a+b)^p=(a+b)(a+b)^h=a(a+b)^h+b(a+b)^h$$
$$\geqslant a\cdot a^h+b\cdot b^h=a^p+b^p.$$

2）令 $p=1-h \quad (0<h<1)$。

$$(a+b)^p=(a+b)(a+b)^{-h}=a(a+b)^{-h}+b(a+b)^{-h}$$
$$\leqslant a\cdot a^{-h}+b\cdot b^{-h}=a^p+b^p.$$

又证 由1），因为 $1/p>1$，所以

$$(a^p+b^p)^{1/p}\geqslant a+b\Rightarrow a^p+b^p\geqslant(a+b)^p.$$

4．设 $f(x)$，$g(x)$ 在集合 X 上有界，求证：

$$\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\begin{cases}\inf\limits_{x\in X} f(x)+\sup\limits_{x\in X}g(x),\\ \sup\limits_{x\in X}f(x)+\inf\limits_{x\in X} g(x).\end{cases}$$

证

$$\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\leqslant f(x)+g(x)$$
$$\leqslant f(x)+\sup_{x\in X}g(x) \quad (\forall x\in X).$$

移项即得

$$\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}-\sup_{x\in X}g(x)\leqslant f(x) \quad (\forall x\in X).$$

由下确界定义，$\inf\limits_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}-\sup\limits_{x\in X}g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in X} f(x)$，即得要证的第一式。又因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所处的地位是对称的，故第二式也成立。

说明 解这类问题的一般方法是：先把三个集合

$$\{f(x)\}, \quad \{g(x)\}, \quad \{f(x)+g(x)\}$$

中的两个放大或缩小成上、下确界，即得第三个集合的下界或上界，从而得到上、下确界。

第一讲 课外题

1．设 $\max(|a+b|,|a-b|)<1/2$，求证：$|a|<1/2$，$|b|<1/2$。

2．求证：对 $\forall a,b\in\boldsymbol{R}$，有

$$\max(|a+b|,|a-b|,|1-b|)\geqslant 1/2.$$

3．求证：对 $\forall a,b\in\boldsymbol{R}$，有

$$\max(a,b)=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2};\quad \min(a,b)=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}.$$

并解释其几何意义。

4．设 $n\in\boldsymbol{N}$，$n\geqslant 2$。求证：

$$(1+x)^n>1+nx\quad(\forall x>-1,\ x\neq 0).$$

5．设 $n\in\boldsymbol{N}$。求证：

1) $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n\geqslant 2)$；

2) $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\quad(n\geqslant 2)$；

3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<4\quad(n\geqslant 1)$。

6．设 $f(x)$，$g(x)$ 在 X 上有界，求证：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sup_{x\in X}f(x)-\inf_{x\in X}f(x)\quad(\forall x,y\in X).$$

7．设 $f(x)$，$g(x)$ 在 X 上有界，求证：

$$\begin{aligned}\inf_{x\in X}f(x)+\inf_{x\in X}g(x)&\leqslant\inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\\&\leqslant\inf_{x\in X}f(x)+\sup_{x\in X}g(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in X}f(x)+\inf_{x\in X}g(x)&\leqslant\sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}\\&\leqslant\sup_{x\in X}f(x)+\sup_{x\in X}g(x).\end{aligned}$$

8．求证：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

§2 函　　数

1° 函数概念．给定数集 X, Y，若有对应法则 f，使对于每个 $x\in X$，都存在唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是从 X 到 Y 的函数或映射．记作　f：$X\to Y$．f 在 x 点的值记作 $y=f(x)$．

X 称为 f 的定义域，Y 称为 f 的取值域．

$$f(x)\triangleq\{f(x)\,|\,x\in X\}$$

称为 f 的值域．当我们只给出对应法则与定义域时，约定取值域即为值域．

若 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ 或 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，则称 f 为单射；

若 $f(X)=Y$，则称 f 为满射；

若 f 既是单射又是满射，则称 f 为双射或一一对应．

2° 反函数．给定 $f:X\to Y$，若 $\forall\, y\in Y$，方程 $f(x)=y$ 在 X 上有且仅有一解，则由此定义一个从 Y 到 X 的函数，称为 f 的反函数，记作 $f^{1-}:Y\to X$．

f：$X\to Y$ 有反函数的充分且必要条件是 f 是一一对应的．若 $f(x)$ 在 X 上严格单调，则 f 的反函数存在．

第二讲　课 内 题

1．设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次}})(x)$．

解　$(f\circ f)(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，$(f\circ f\circ f)(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$．

用数学归纳法可得：

$f\circ f$

$$(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

2．1）作函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$的图形；

2）在$|x|\geqslant 1$上求出上述函数的反函数.

解 1）利用奇对称性和叠加法作图.

2）当 $x\geqslant 1$ 时，$y\geqslant 1$；当 $x\leqslant -1$ 时，$-x\geqslant 1$，从而 $-y\geqslant 1$，即 $y\leqslant -1$. 因此，当$|x|\geqslant 1$时，$|y|\geqslant 1$. 对任意给定的 y $(|y|\geqslant 1)$，对应的 x 由如下二次方程决定

$$x^2-2xy+1=0.$$

于是所求的反函数为

$$x=\begin{cases} y+\sqrt{y^2-1} & (y\geqslant 1), \\ y-\sqrt{y^2-1} & (y\leqslant -1) \end{cases}.$$

说明 注意不要把反函数写成 $x=y+\sqrt{y^2-1}$ $(y\geqslant 1)$ 和 $x=y-\sqrt{y^2-1}$ $(y\leqslant -1)$，这样容易误解为有两个反函数.

3．问$f(x)=x-[x]$是否是周期函数？并作出函数$f(x)$的图形（$[x]$表示 x 的整数部分）.

解 因为$[x]\leqslant x<[x]+1$，所以

$$[x]+1\leqslant x+1<[x]+1+1.$$

按$[a]$的定义，即得$[x+1]=[x]+1$. 从而

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x-[x]=f(x).$$

即 $f(x)$是周期为 1 的周期函数. 为了作出 $f(x)$的图形，只要作出$[0,1)$上函数 $f(x)$的图形（在$[0,1)$上 $f(x)=x$），然后周期延拓即成.

4．设$f(x)=\sqrt{x}$ $(0\leqslant x<1)$.

1）将 $f(x)$开拓到$(-1,1)$，使其成为偶函数，即找一个偶函数$F(x)$ $(|x|<1)$，使得当$0\leqslant x<1$时，$F(x)=f(x)$.

2）将 $f(x)$开拓到$(-\infty,\infty)$，使其成为周期为 1 的周期函数.

解 1）$F(x)=\sqrt{|x|}$； 2）$F(x)=\sqrt{x-[x]}$。

5．设$f(x)=\cos x$，$g(x)=\arccos x$．讨论复合函数$f[g(x)]$，$g[f(x)]$的定义域、奇偶性、周期性，并作图．

解 1）$f[g(x)]=\cos(\arccos x)=x$（$-1\leqslant x\leqslant 1$）是奇函数；

2）$g[f(x)]=\arccos(\cos x)$（$-\infty<x<\infty$）是偶函数，也是以2π为周期的周期函数．当$0\leqslant x\leqslant\pi$时，有

$$g[f(x)]=x.$$

利用偶对称性与周期性即可作出$g[f(x)]$的图形．

6．设$f:X\to Y$，$g:Y\to X$．求证：

1）若$g[f(x)]=x$（$\forall x\in X$）．则f为单射，g为满射；

2）若$g[f(x)]=x$（$\forall x\in X$），$f[g(y)]=y$（$\forall y\in Y$），则f与g互为反函数．

证 1）$\forall x_1\in X$，由条件得$g[f(x_1)]=x_1$，即$\exists\, y_1=f(x_1)\in Y$，使得$g(y_1)=x_1$，故$g$为满射．

若$f(x_1)=f(x_2)$，由条件推出

$$x_1=g[f(x_1)]=g[f(x_2)]=x_2,$$

即f为单射．

说明 只假定$g[f(x)]=x$（$\forall x\in X$），一般推不出f是满射，g是单射．例如

$$f:\begin{array}{l}[0,1]\to[-1,1]\\ x\mapsto\sqrt{x},\end{array}\qquad g:\begin{array}{l}[-1,1]\to[0,1]\\ x\to x^2,\end{array}$$

虽有$g[f(x)]=x$（$\forall x\in[0,1]$），但$f[g(x)]=|x|$（$\forall x\in[-1,1]$）．由此显然，f不是满射的，g也不是单射的．

2）所给的条件表明，f，g为双射．因此，f和g的反函数都存在．条件$f[g(y)]=y$（$\forall y\in Y$）意味着$g(y)$为方程

$$f(x)=y \tag{1}$$

的解．又因为f是单射，所以$g(y)$为方程（1）的唯一解．根据定义即有$g=f^{-1}$．同理 $f=g^{-1}$．

第二讲 课外题

1．作函数$y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$与$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图形。

2．设$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$，$f(x)\not\equiv x$。求使$f(x)\equiv f^{-1}(x)$的条件。

3．设

$$f(x)=\begin{cases}1+x & (x\leqslant 0),\\ x & (x>0),\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x & (x\leqslant 0),\\ -x^2 & (x>0).\end{cases}$$

求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$。

4．设$f(x)=|1+x|-|1-x|$，求$(\overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n\text{次}})(x)$。

5．设$f(x)$在$(0,\infty)$上定义，$a>0,b>0$。求证：

1）若$f(x)/x$单调下降，则$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$；

2）若$f(x)/x$单调上升，则$f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$。

6．利用上题证明：当$a>0$，$b>0$时，有

1）$(a+b)^p\geqslant a^p+b^p(p>1)$；

2）$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p(0<p<1)$。

7．设$f(x)$在$\boldsymbol{R}$上定义，且$f(f(x))\equiv x$。

1）问这种函数有几个？

2）若$f(x)$为单调增加函数，问这种函数有几个？

8 设$f:X\to Y$是满射的，$g:Y\to Z$。求证：

$$g\circ f:X\to Z$$

有反函数存在的充分且必要条件为f与g都有反函数存在，且$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。

§3 序列极限

1° 极限定义。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，

则称序列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时收敛于a。记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

2° 性质与运算。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在，

（1）若序列极限存在，则极限值唯一；

（2）若序列极限存在，则序列是有界的；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n/y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n/\lim\limits_{n\to\infty}y_n \quad (\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0)$；

（4）若$x_n\leqslant y_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

（5）若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

3° 上确界的等价形式。设E是一个实数集合，若$\exists M\in\mathbf{R}$满足

（1）$\forall x\in E\Rightarrow x\leqslant M$；

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists x'\in E$，使得$x'>M-\varepsilon$；

则$M=\sup E$。

4° 单调序列的极限存在性：若序列$\{x_n\}$单调上升，有上界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup_n x_n.$$

若序列$\{x_n\}$单调下降，有下界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\inf_n x_n.$$

5° $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$。

第三讲 课内题

1. 用$\varepsilon-N$方法求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2-1}=0\ (n\geqslant2)$。