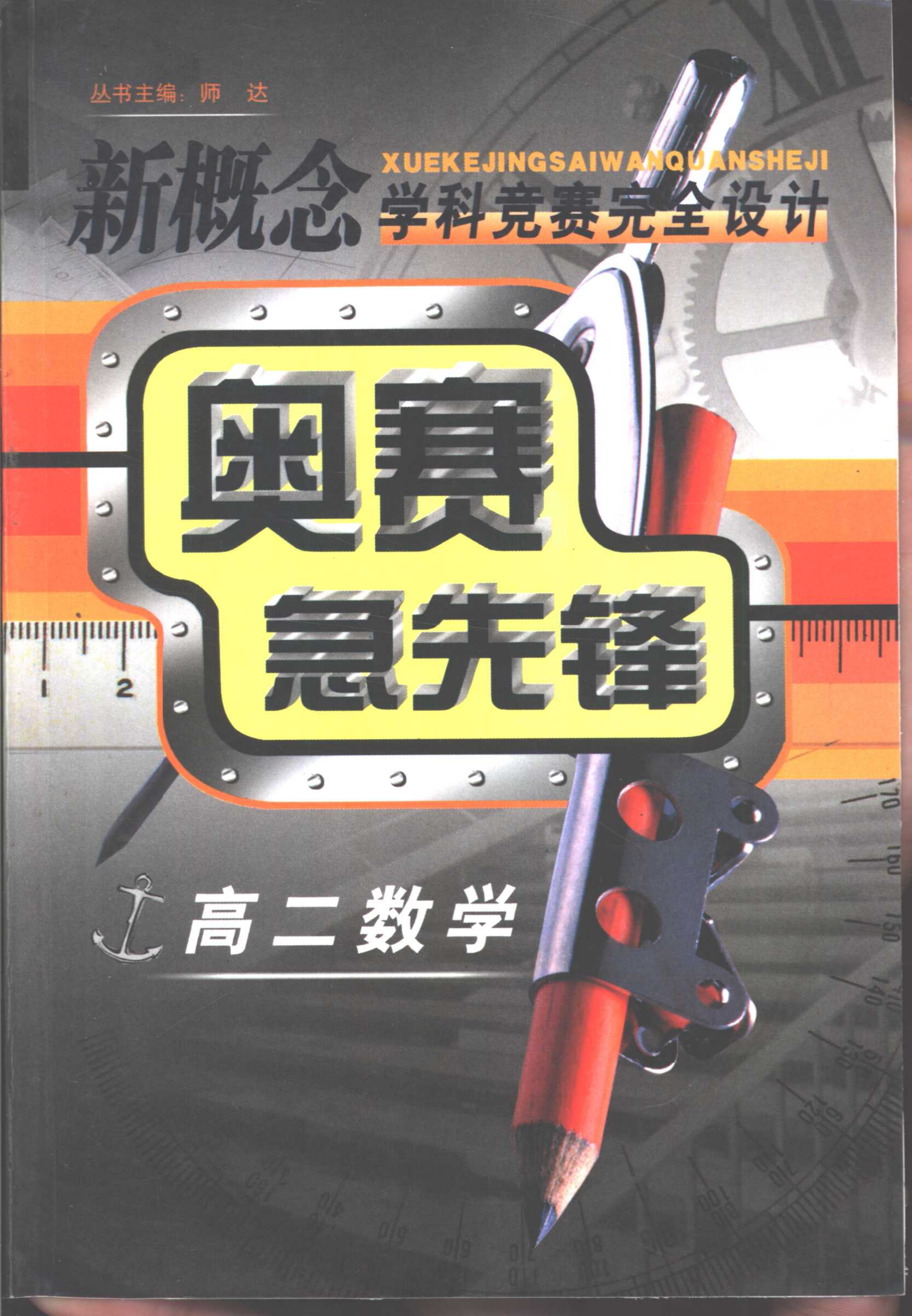
丛书主编：师　达
新概念
XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI
学科竞赛完全设计
奥赛
急先锋
高二数学

新概念 XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI
学科竞赛完全设计

奥赛急先锋

- 高一数学 ◆高一化学 ◆高中计算机信息工程
- 高二数学 ◆高二化学 ◆高中生物
- 高三数学 ◆高三化学 ◆高中语文基础
- 高一物理 ◆高一英语 ◆高中语文阅读
- 高二物理 ◆高二英语 ◆高中语文写作
- 高三物理 ◆高三英语

责任编辑：忠 拜
装帧设计：一枝徐徐

ISBN 7-5007-3786-6

9 787500 737865 >

ISBN7-5007-3786-6/G·2553
（全三册）总定价：41.40元　本册定价：13.80元

XUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

新概念学科竞赛完全设计

奥赛急先锋

高二数学

学科主编：刘汉文

本册主编：甘超一　丁明忠

编　　者：甘超一　汪　博　陈昌乐
丁明忠　邓旭辉　甘智峰
张幸阳　刘汉文　石　松
常　青　刘　辉　武龙人
程善祥　康　健　金　榜
黄　刚　卓凤献　郭希彪

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

新概念学科竞赛完全设计手册. 高二数学 / 师达主编.
—2版. —北京：中国少年儿童出版社，2002.6
ISBN 7-5007-3786-6

Ⅰ.新… Ⅱ.师… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 032142 号

奥 赛 急 先 锋

高二数学

出版发行： 中国少年儿童出版社
出 版 人：

主　　编： 师　达
责任编辑： 惠　玮
责任校对： 刘　新
装帧设计： 钱　明
封面设计： 徐　枝
责任印务： 栾永生

社　址： 北京东四十二条二十一号
邮政编码： 100708
电　话： 010-64032266
咨询电话： 65956688 转 31

印　刷： 南京通达彩印有限公司
经　销： 全国新华书店

开　本： 850×1168　1/32
印　张： 13.125 印张
2002 年 6 月北京第 1 次修订
2002 年 7 月南京第 1 次印刷
字　数： 188 千字
印　数： 1—10000 册

ISBN 7—5007—3786—6/G·2553
(全三册)总定价： 41.40 元　**本册定价：** 13.80 元

图书若有印装问题，请随时向本社出版科退换

前言

国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad简称IMO），是一种国际性的以中学数学为内容、以中学生为参赛对象的竞赛活动。第一届国际数学奥林匹克于1959年夏天在罗马尼亚举行，当时只有保加利亚、捷克、匈牙利、波兰、罗马尼亚和前苏联派代表队参赛，竞赛活动每一年举办一次，1980年因故停办一次。以后每年的国际数学奥林匹克参赛国都在不断地增加，参赛规模都在不断地扩大，如同国际体育奥林匹克竞赛一样，国际数学奥林匹克也已深深地扎根于广大中小学师生的心田中。

在我国奥林匹克竞赛活动始于1956年，当时在著名数学大师华罗庚教授的亲自参与并指导下，在北京举办了首次数学奥林匹克竞赛。“文革”后全国性及地区性的各级各类数学竞赛活动如雨后春笋，深受师生的厚爱。1986年我国首次正式派代表队参加国际奥林匹克数学竞赛，并取得骄人的成绩。更为可喜的是，中学生的数学学

科竞赛活动影响并带动了物理学、化学、生物学、计算机学、俄语、英语等学科的竞赛活动，在相应的国际各学科竞赛活动中，我国都取得了令世人瞩目的优异成绩，充分显示了中华民族的勤劳、智慧，也证明了改革开放后的我国基础教育在国际上是处于领先地位的。各学科竞赛活动的深入发展，也强有力地推动了课堂的学科教学，培养了大批有个性有天赋的中华学子。奥林匹克竞赛活动在40多年的历史中，形成了自己特有的人才培养模式；形成了自己特有的教材、辅导书系列；形成了一套完整的竞赛考试、评估机制。这对改变我国目前基础教育教材版本单一，人才培养模式单调，千军万马挤“普高”独木桥的状况，应该说具有很大积极意义。

奥林匹克教材及辅导图书相对于现行中学教材而言，最大的优势就在于它承认并适应学生的个体差异，在培养个人特长，开发个人潜能，造就拔尖人才方面具有独特的功能。

本书在内容编写上的主要特点有：

1、本书对近年奥林匹克竞赛活动具有集成性。这里所说的集成性含义有二：一是指书中收集到的例题、习题是近几年国内外竞赛和中高考优秀试题；二是指书中对的年奥赛解题思路、方法进行了总结归纳，具有全新的解题方略。

2、恰当处理奥赛和课内学习的关系。本书章节结构的设置既遵循奥赛的规则，同时又参照了中小学教学大纲和现行教材。从内容上讲既能保证学生在各级奥赛中取得好名次；同时又能对应课堂教学，从知识和能力的层面

上强化课内学习，帮助考生在中高考中取得优异成绩。

3、正确处理知识积累与能力培养、打好基础与研究难题的关系。知识的占有是能力形成的基础，掌握知识的速度与质量依赖于能力的发展。只有打好坚实的基础，才会具有研究难题，探究未知的能力。书中设计了一些“难题”。“难题”不同于“怪题”、“偏题”，“怪题”、“偏题”不可取。对“难题”则应下功夫研究。所谓“难题”有两种：一种是综合性强的题，另一种是与实际联系比较密切的题。解析综合性强的题需要使用多个概念、规律，需要把学过的知识有机地联系在一起，有时还需要用到其他学科的知识进行整合。解析联系实际的题需要分析研究实际问题，从大量事实中找出事物所遵循的规律，光靠对知识的死记硬背是不行的。对于这两种“难题”，必须下功夫研究，这种不间断的研究、探究，并持之以恒，就一定会形成学科特长，就一定会在不远的将来成长为拔尖人才。

本丛书含数、理、化、语文、英语、生物学、信息学（计算机）七科，跨小学、初中、高中三个阶段，共40册。

本丛书由师达总体策划并担任丛书主编，由刘汉文、周向霖、金新担任学科主编，由北京、浙江、江苏、湖北重点中小学的特级、高级老师编写，尤其是湖北黄冈市教研室的著名老师们的加盟，更使本丛书增辉。《新概念学科竞赛与题解方略》将帮助每一位学生、家长、老师实现心目中的理想与渴望，我们衷心祝愿每一位朋友成功。

书中难免有一些缺憾，望广大师生及学生家长指正，以便再版时订正。

好学生终于有了训练本

·本·书·特·色·

着眼于课本　落脚于奥赛

把握基础知识　培养创新能力

解题层层递进　另辟提高蹊径

好学生不能不读的训练本

目　　录

第一讲　不等式证明 ………………………………………… (1)

1.1　基本方法 ………………………………………… (1)

1.2　放缩法 ………………………………………… (4)

1.3　数学归纳法 ………………………………………… (10)

1.4　换元法 ………………………………………… (14)

1.5　其他方法 ………………………………………… (20)

第二讲　解不等式 ………………………………………… (24)

2.1　代数不等式解法 ………………………………………… (24)

2.2　超越不等式与函数不等式 ………………………………………… (28)

2.3　不等式中的参数问题 ………………………………………… (35)

第三讲　重要不等式及应用 ………………………………………… (42)

3.1　平均值不等式及推论 ………………………………………… (42)

3.2　柯西不等式及推论 ………………………………………… (47)

3.3　排序不等式与排序法 ………………………………………… (53)

3.4　三角形中重要不等式 ………………………………………… (57)

3.5　最值问题(一) ………………………………………… (62)

3.6　最值问题(二) ………………………………………… (69)

第四讲　直线与平面 ………………………………………… (75)

4.1　直线平面位置关系 ………………………………………… (75)

4.2　空间角及计算 ………………………………………… (79)

4.3　空间距离与求法 ………………………………………… (84)

第五讲　多面体与组合体、旋转体 ………………………………………… (90)

5.1　四面体 ………………………………………… (90)

5.2 多面体与组合体 …… (96)
5.3 旋转体 …… (101)
第六讲 直线与圆 …… (107)
6.1 直线与圆 …… (107)
6.2 直线系与圆系 …… (112)
6.3 解析法 …… (118)
第七讲 圆锥曲线(1) …… (125)
7.1 定义及应用 …… (125)
7.2 直线与圆锥曲线 …… (130)
7.3 轨迹问题 …… (138)
第八讲 圆锥曲线(2) …… (144)
8.1 参数方程 …… (144)
8.2 极坐标 …… (149)
第九讲 排列与组合 …… (155)
9.1 计数基本原理 …… (155)
9.2 排列 …… (160)
9.3 组合 …… (166)
9.4 二项式定理 …… (172)
第十讲 组合数学 …… (178)
10.1 组合恒等式 …… (178)
10.2 组合分析 …… (184)
10.3 组合几何 …… (191)
10.4 集合中的组合问题 …… (198)
第十一讲 复数 …… (205)
11.1 复数的基本概念 …… (205)
11.2 复数的运算 …… (211)
11.3 复数与方程 …… (218)
11.4 复数与几何 …… (223)

第十二讲　概率…………………………………………………………（232）
12.1　基本知识……………………………………………………（232）
12.2　例题选讲……………………………………………………（236）
答案与提示……………………………………………………………（248）

第一讲　不等式证明

1.1　基本方法

证明不等式在所给定范围内成立，有以下几种基本方法：

比较法　分比差和比商两种：即欲证明 $A>B$，可以证明 $A-B>0$ 或在 $B>0$ 条件下证明 $\frac{A}{B}>1$.

分析法　从所求证的不等式出发，将其逐步转化为明显常见的不等式（注意转化过程中每步应可逆推）.

反证法　从所证不等式不成立的假定出发，推出与已知条件或明显事实相矛盾的结果，从而证明结论成立.

综合法　从已知条件、已知定理和不等式出发，以推理方式，每步阐明原因根据，逐步推导出结论.

【典型范例】

●**例 1**　$n\in \mathrm{N}_+$，$n\geqslant 3$. 求证：$n^{n+1}>(n+1)^n$.

分析　对正数 n 以比商为宜，但由 $\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot n$ 难以断定是否大于 1，可以先研究商的单调性.

证明　设 $f(n)=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$，

则
$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}=\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1}$$
$$=\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}>1.$$

故　$f(n+1)>f(n)$.

$\because$　$f(3)=\frac{3^4}{4^3}=\frac{81}{64}>1$，

$\therefore\quad f(n)>f(n-1)>\cdots f(3)>1.$

即 $\quad n^{n+1}>(n+1)^{n}.$

●例 2 设三个正数 a,b,c 满足 $(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$. 求证: a,b,c 一定是某三角形边长.

分析 需要证明 $a+b>c,a+c>b,b+c>a$,从条件所给不等式推出这三式是有困难的. 那么所要证明是否等价于 $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)>0$ 呢? 若左边三因式全为正,则结论成立. 若左边两负一正. 如 $a+b-c<0,a+c-b<0$,则相加得 $2a<0$. 这与 a 为正数矛盾. 其他情况是没有的. 因而只需证明 $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)>0$ 即可. 再考虑已知不等式为 a,b,c 的四次式. 我们应看它能否转化为 $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)>0$ ①

证明 (分析法)欲证结论,只须证明①成立.

即要证明 $[a^2-(b+c)^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]<0,$

即要证明 $a^4+(b^2-c^2)^2-a^2[(b+c)^2+(b-c)^2]<0,$

即要证明 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2<0,$

即要证明 $2(a^4+b^4+c^4)<(a^2+b^2+c^2)^2.$

由已知条件及上述每步可逆. 知结论成立.

●例 3 求证:由实数 $a<1,b<1,c<1$ 构成三个积 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 不能同时大于 $\frac{1}{4}$.

分析 若 a,b,c 中有一个为负数或 0,则结论成立. 故可就 $0<a<1,0<b<1,0<c<1$ 来证明.

证明 (反证法)假定结论不成立,即 $(1-a)b>\frac{1}{4},(1-b)c>\frac{1}{4},(1-c)a>\frac{1}{4}$,三式同时成立.

由 $(1-a)b>\frac{1}{4}$ 及 $a>0$,有 $a(1-a)b>\frac{a}{4}$. 而 $a(1-a)\leqslant$

$\left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$\therefore\ \frac{a}{4}<a(1-a)b\leqslant\frac{b}{4}$. 即 $a<b$.

同理由另两式有 $b<c,c<a$. 于是 $a<b<c<a$. 这是不可能的. 故结论成立.

●例 4 求证：$\pi^e<e^\pi$.

分析 e,π 为数学中两个最重要常数（π 为圆周率，e 为自然对数之底），它们之间是指数不等式，用自然对数来证明为宜.

证明 由 e 定义知 $x>0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{x}}<e$. 取 e 为底对数（$e>1$），有 $\frac{1}{x}\ln(1+x)<\ln e=1$，即 $\ln(1+x)<x$，对 $x>0$ 均成立. 取 $x=\ln\pi-1$. 则有 $\ln(\ln\pi)<\ln\pi-1=\ln\frac{\pi}{e}$，于是 $\ln\pi<\frac{\pi}{e}$. 故 $\pi<e^{\frac{\pi}{e}}$，即 $\pi^e<e^\pi$.

说明 本题已知条件不明显. 用综合法应从与 e,π 有关的重要关系式出发，是证明问题关键. 本题是将不等式 $(1+x)^{\frac{1}{x}}<e$ 作为已知.

【练习 1.1】

1. 设 $a<b<c$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.
2. 设 $x>a>0$，求证：$x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.
3. 设 $a\geqslant0,b\geqslant0$，求证：$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.
4. 设 $a>b>c>0$，求证：$a^a\cdot b^b\cdot c^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.
5. 若 $n>2$，求证：$(n!)^2\geqslant n^n$.
6. 若 $m\in\mathrm{N}_+$，求证：$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{3m+1}>1$.
7. 设 $a>0,b>0$，求证：$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.
8. 若 $a_1\geqslant a_2\geqslant0,a_1\geqslant b_1\geqslant b_2,a_1a_2\geqslant b_1b_2$.

求证：$a_1+a_2\geqslant b_1+b_2$.

9. 若 a,b 为正数，$a+b=4\sqrt{3}$，求证：$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 12$.

10. (1) 若 $x_1+x_2+x_3=0$，求证：$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\leqslant 0$.

(2) 若 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$，求证：$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1\leqslant 0$.

(3) 对 $n\geqslant 5$，证明：命题 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，则 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leqslant 0$ 不一定成立.

11. 设 $ab>0$，$m>n>0$，证明：$(a^m+b^m)^n<(a^n+b^n)^m$.

12. 设 a,b,c 为正数，$abc=1$.

证明：$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1$.

13. 设 $a_i(i=1,2,\cdots,7)$ 是非负数，$a_1=a_7=0$.

求证：对某个 $i\in\{2,3,4,5,6\}$ 有 $a_{i+1}+a_{i-1}\leqslant\sqrt{3}a_i$.

14. 黑板上有 n 个正实数，每次可从中擦去任何两数如 a,b 而代以新数 $\frac{1}{4}(a+b)$，这种步骤共进行 $n-1$ 次，最后黑板上只剩下一个数. 证明：如果黑板上开始写有 n 个 1，则剩下那个数不小于 $\frac{1}{n}$.

1.2 放缩法

在证明不等式中，常将一边（或其中一项）A 放大为 B（或缩小为 B）. 得到不等式 $A\leqslant B$（或 $A\geqslant B$），连续使用可得不等式链 $A\leqslant B\leqslant\cdots\leqslant M$，以达到证明结论 $A\leqslant M$ 的方法，称为放缩法. 其中放缩适度是解决问题的关键，必须通过分析思考，逐步形成能力和技巧，方能得心应手.

【典型范例】

●**例 1** 求证：$16<\sum\limits_{K=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{K}}<17$.

分析　这是对一个数列和估值的不等式.这里的和我们无法用项数 n 表出.但可联想到类似求和问题:如

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

本题 $\sum\limits_{K=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{K}}$ 虽无类似等式,但可通过放缩制造类似不等式来解决.

证明　由 $\frac{1}{\sqrt{K}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{K}+\sqrt{K}}<2\cdot\frac{1}{\sqrt{K}+\sqrt{K-1}}$

$$=2(\sqrt{K}-\sqrt{K-1})$$

于是 $\sum\limits_{K=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{K}}<1+2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{79})$

$$=1+2(\sqrt{80}-1)<1+2(9-1)=17.$$

又由 $\frac{1}{\sqrt{K}}>2\frac{1}{\sqrt{K+1}+\sqrt{K}}=2(\sqrt{K+1}-\sqrt{K})$,有 $\sum\limits_{K=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{K}}>2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{81}-\sqrt{80})=2(\sqrt{81}-1)=16.$

故结论成立.

说明　上述证明为典型放缩法.放缩办法很多,但并非都能达到目的.要体会“适度”二字.

●**例 2**　$\{a_n\}$是两两互异自然数组成的无穷数列,这些自然数不含数字 0,7,8,9.

求证:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<\frac{49}{8}$.

分析　我们知道自然数倒数之和(称调和级数)是发散的.即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 可以无穷大.但去掉其中含 0,7,8,9 的项,则和收敛.这是本题目的.本题中$\{a_n\}$为 1,2,3,4,5,6,11,12,…,16,21,

22,…,26,…,下面按 a_n 为一位数,二位数,…来估计和之大小:

a_n 为一位时,$\sum\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=a\left(a=\frac{49}{20}\right)$.

a_n 为二位时,

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{a_n}&=\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{26}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{61}+\cdots+\frac{1}{66}\right)<\frac{1}{10}\times6+\frac{1}{20}\times6+\cdots+\frac{1}{60}\times6\\&=\frac{6}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{5}a\end{aligned}$$

a_n 为三位时:

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{a_n}&=\left(\frac{1}{111}+\frac{1}{112}+\cdots+\frac{1}{116}+\cdots+\frac{1}{166}\right)+\left(\frac{1}{211}+\cdots+\frac{1}{266}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{611}+\cdots+\frac{1}{666}\right)\\&<\frac{1}{100}\times36+\frac{1}{200}\times36+\cdots+\frac{1}{600}\times36\\&=\frac{36}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^2a.\end{aligned}$$

一般 a_n 为 K 位时,$\sum\frac{1}{a_n}<\left(\frac{3}{5}\right)^{K-1}a$.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<\left[1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots\right]a=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}a=\frac{5}{2}\times\frac{49}{20}=\frac{49}{8}$.

结论得证.

说明 上述证法对 $\{a_n\}$ 中每项适当缩小,和 $\sum\frac{1}{a_n}$ 则放大.使得一个毫无规律的和转化为无穷等比数列 $\left(q=\frac{3}{5}<1\right)$ 之和,而这和是可求的.本题结论也随之得证,放缩的意义和价值也即在此.

●**例 3** 已知 $x_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$.