《数理天地》丛书　主编：周国镇

历届希望杯

全国数学邀请赛试题详解

·高中二年级·

"希望杯"全国数学邀请赛
命题委员会　编

HOPE

气象出版社

《数理天地》丛书　主编　周国镇

历届"希望杯"全国数学邀请赛试题详解

高中二年级

"希望杯"全国数学邀请赛命题委员会　编

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

历届“希望杯”全国数学邀请赛试题详解. 高二/周国镇主编. --北京：气象出版社，2002.1
ISBN 7-5029-3253-4

Ⅰ. 历…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 数学课-高中-解题　Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 067957 号

责任编辑：黄丽荣　终审：周诗健
封面设计：彭小秋　责任技编：刘祥玉　责任校对：庚　申

气象出版社出版发行

(北京市海淀区中关村南大街 46 号　邮政编码：100081　电话：68406961)
北京市王史山印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
开本：787×1092　1/32　印张：9.875　字数：222 千字
2002 年 1 月第一版　2002 年 1 月第一次印刷
印数：1～4000
ISBN 7-5029-3253-4/G・0950
定价：13.00 元

出版前言

“希望杯”全国数学邀请赛自1990年开始举办，至今已经十二届了。第一届有11万名中学生参加，到第九届，每年的参赛人数都超过百万。12届以来，参赛中学生累计超过800万。国内中学生学科竞赛活动，有如此大的规模，有如此众多的中学生参加，除“希望杯”之外，没有第二个。这充分说明了“希望杯”在中学生中受欢迎的程度。中学生为什么喜欢参加“希望杯”？很重要的一个原因是题目出得好，出得漂亮，有较大的思维空间。“希望杯”命题委员会拥有国内第一流的数学竞赛方面的专家，他们精心地编拟了历届的试题。同学们正是通过做这些题，学习它们、研究它们，从而更扎实、更开阔地掌握了知识，增长了智慧和才干，使学习更有信心，成绩更出色。“希望杯”如同一把金钥匙，对每个参赛的中学生，它既开启了智慧之门，更开启了信心之门。这正是“希望杯”的魅力所在。

在中学任教的数学老师们，同他们的弟子一样也很喜欢“希望杯”——因为，从这个“杯”中，层出不穷，不断涌现出来的一个一个问题，为改进自己的教学，带出高水平的学生提供了难得的素材和有益的启示。

为了让更多的中学生和他们的老师（尤其是没有参加过“希望杯”的），也能共享我们十余年来的智慧结晶，我们将第一届至第十一届的试题按初一、初二、高一、高二这四个年级分四册出版，供四个年级分别使用。书中不当之处，请读者批评指正。

周国镇

“希望杯”命题委员会主任

2001年11月1日

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会

主　任　周国镇　《数理天地》杂志社社长、总编

副主任　周春荔　首都师范大学数学系教授

　　　　那吉生　中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员

　　　　余其煌　中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员

高中二年级命题组成员

组　长　那吉生　中国科学院数学科学与系统科学研究院研究员

成　员　郑学安　北京师范大学数学系教授

　　　　王建民　中国科技大学附中特级教师

　　　　储瑞年　北京师范大学附属实验中学特级教师

　　　　梁丽平　中国人民大学附中高级教师

　　　　熊　斌　华东师范大学数学系副教授

　　　　吴伟朝　广州师范学院数学系副教授

希望杯数学邀请賽有利于学生有利於教師將促进中国数学教育的发展

王寿仁

一九九〇年五月

王寿仁：中国著名老数学家、原中国数学奥委会主席

寄希望于教育，
寄希望于青少年。

祝首届"希望杯"数学邀请赛胜利举行

杨乐
1990年5月

杨 乐：中国科学院院士、国际著名数学家

肩负着祖國的希望，
迎接廿一世纪的到来！

95年7月

龚 昇：原中国科学技术大学副校长、著名数学家

青出于蓝而胜于蓝，希望寄托在年轻一代身上。

梅向明

90.11.30.

梅向明：原北京师范学院院长、著名数学家、民进中央副主席

目　录

试题及解答

第一届(1990年)

第一试

试　　题

一、选择题　以下每题的四个结论中,仅有一个是正确的,请将正确答案的英文字母填在每题后的圆括号内.

1. 等差数列的第 p 项是1990,第1990项是 p,那么第 $p+q(q \geqslant 1991)$ 项.　(　　)

(A) 是个正数.　　(B) 是个负数.

(C) 是零.　　(D) 符号不能确定.

2. 设 $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}$,则　(　　)

(A) $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2k+2}$.

(B) $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$.

(C) $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$.

(D) $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1}$.

3. 函数 $y = \sqrt{(2+x)(6-x)}$　(　　)

(A) 有最小值,没有最大值.

(B) 有最大值,没有最小值.

(C) 有最小值,也有最大值.

(D) 没有最小值,也没有最大值.

4. $a,b\in R$，那么 $|a+b|=|a|-|b|$ 是 $ab\leqslant 0$ 的（　　）

(A) 充分且必要的条件．

(B) 充分但不必要的条件．

(C) 必要但不充分的条件．

(D) 不充分也不必要的条件．

5. $\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi(k\in Z)$，那么，$\sec\alpha$ 与 $\sin 2\alpha\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$ 的符号（指正负号）　（　　）

(A) 总是相同．

(B) 总是相异．

(C) α 在第 1,3 象限时，它们同号；α 在第 2,4 象限时，它们异号．

(D) α 在第 1,3 象限时，它们异号；α 在第 2,4 象限时，它们同号．

6. 正四面体内切球的体积是 V，则它的外接球的体积是　（　　）

(A) $8V$．　(B) $27V$．　(C) $64V$．　(D) $4V$．

7. 一个平面把空间分为两部分，两个平面最多把空间分为四部分，三个平面最多把空间分为八部分，那么，四个平面最多把空间分为　（　　）

(A) 16 部分．　(B) 14 部分．

(C) 15 部分．　(D) 20 部分．

8. 设 $a=\arcsin(\sin\frac{1}{7})$，$b=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$，$c=\arcsin\left(-\frac{1}{7}\right)$，则 a,b,c 的大小关系是　（　　）

(A) $a>b>c$．　(B) $b>a>c$．

(C) $c>a>b$．　(D) $b>c>a$．

9. 方程 $\operatorname{arccot}x+\arcsin x=\pi$ 的实根数目是

( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

10. 在四个数：$\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$2\arctan(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 中，与 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ 数值相等的个数是

( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

二、填空题

11. 方程 $\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)=\frac{\pi}{2}$ 的解集是____________.

12. 直线 $x+2y-3=0$ 关于直线 $x=a$(a 为常数)对称的直线为 l，l 的方程是____________.

13. 若平面内的动点 P 到定点 $F(1,0)$ 的距离比 P 点到 Y 轴的距离多 1，则动点 P 的轨迹方程是____________.

14. 函数 $y=2-3\sqrt{4x-x^2-3}$ $(x\in[1,2])$ 的反函数为 $y=f(x)$，则 $f[f(-1)]=$____________.

15. $\triangle ABC$ 中，A,B,C 是三个内角，那么 $\cos2A+\cos2B+\cos2C+4\cos A\cos B\cos C=$____________.

16. 坐标平面内有两个圆：$x^2+y^2=16$ 和 $x^2+y^2-6x+8y+24=0$，这两个圆的内公切线的方程是____________.

17. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 在线段 AC 内，$CP=1$，则直线 AD 和 C_1P 所成的角的弧度值是____________.

18. 不等式$\sqrt{1-x^2} \geqslant x+t$的解集是$\varnothing$，实数$t$的取值范围(用区间形式)是____________.

19. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1, a_2=2, a_{n+1}-a_n-a_{n+2}=0$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{1990}$ ____________.

20. 若$x, y>0$，且$x+2y=1$，则$u=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{4y}\right)$的最小值是____________.

答・提示

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	C	B	A	B	C	B	A	D

提示：

1. 该数列的公差$d=\dfrac{1990-p}{p-1990}=-1$，设第$p+q$项为$x$，则$\dfrac{x-1990}{(p+q)-p}=\dfrac{x-1990}{q}=-1$，得$x=1990-q$. 因为$q \geqslant 1991$，所以$x<0$. 选(B).

2. $$S_{k+1}=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

$$= S_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)}$$

$$= S_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}.$$

故　选(C).

3. 当 $x = 6$ 或 $x = -2$ 时，$y_{\min} = 0$；

当 $x = 2$ 时，$y_{\max} = 4$. 选(C).

4. 假设由 $|a+b| = |a| - |b|$ 可以推出 $ab > 0$. 那么，当 $a,b > 0$ 时，$|a+b| = a+b$，$|a|-|b| = a-b$，显然 $a+b = a-b$ 是矛盾的. 这表明 $ab \leqslant 0$. 可见，$|a+b| = |a| - |b|$ 是 $ab \leqslant 0$ 的充分条件.

另一方面，当 $ab \leqslant 0$ 时，取 $a=0$，$b=1$，得不出 $|a+b| = |a| - |b|$. 这表明 $|a+b| = |a| - |b|$ 是 $ab \leqslant 0$ 的充分但不必要的条件. 选(B).

5. 由 $\sec\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = 2\sin\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$ 及 $\alpha \neq \frac{k}{2}\pi (k \in Z)$ 知 $\sin^2\frac{\alpha}{2} > 0$，所以知：$\sec\alpha$ 与 $\sin 2\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$ 同号. 选(A).

6. 设体心为 O. 正四面体为 $ABCD$. O 为内切球和外接球的球心. O 到平面 BCD 的距离为内切球半径，OA 为外接球的半径. 易知：$V_{O-BCD} = \frac{1}{4}V_{A-BCD}$，且它们具有公共底. 所以，它们的高之比为 1∶4. 即内切球半径与外接球半径之比为 1∶3. 因此，它们体积之比为 1∶27. 选(B).

7. 设第四个平面为 α. 前 3 个平面与 α 都相交，且交线中没有两条平行并且没有三线共点时，这四个平面把空间分成的部分最多. 这时，α 被前 3 个平面的交线最多分成 7 部分. 每一个部分都作为前三个平面已剖分的空间中某些新出现的

空的"隔板". 因此,在三个平面已剖分空间最多数目的基础上要加 7,即 15 部分. 选(C).

8. b 为纯角,a 为锐角,c 为负角. 选(B)

9. 由于方程中含有 $\arcsin x$,所以 $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 当 $-1 \leqslant x \leqslant 0$ 时,$\operatorname{arccot} x < \pi$,$\arcsin x < 0$,所以 $\operatorname{arccot} x + \arcsin x < \pi$;当 $0 < x \leqslant 1$ 时,$\operatorname{arccot} x < \frac{\pi}{2}$,$\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$,可见 $\operatorname{arccot} x + \arcsin x < \pi$. 选(A).

10. 作直角边长为 2,$\sqrt{2}$ 的直角三角形,可知 $\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$,$\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$,$\frac{1}{2}\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 与 $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ 相等. 它们都是锐角. 而 $2\arctan(\sqrt{2}+\sqrt{3}) > 2\arctan 1 > \frac{\pi}{2}$,可见,$2\arctan(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \neq \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$. 选(D).

二、填空题

题号	11	12
答案	$\left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in Z\right\}$	$x - 2y + 3 - 2a = 0$

题号	13	14	15
答案	$y^2 = 4x$ 和 $y = 0(x < 0)$	1	-1

题号	16	17	18
答案	$3x - 4y - 20 = 0$	$\frac{\pi}{3}$	$t \in (\sqrt{2}, +\infty)$

题号	19	20
答案	5	$\frac{25}{8}$,当且仅当 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ 时取这个值