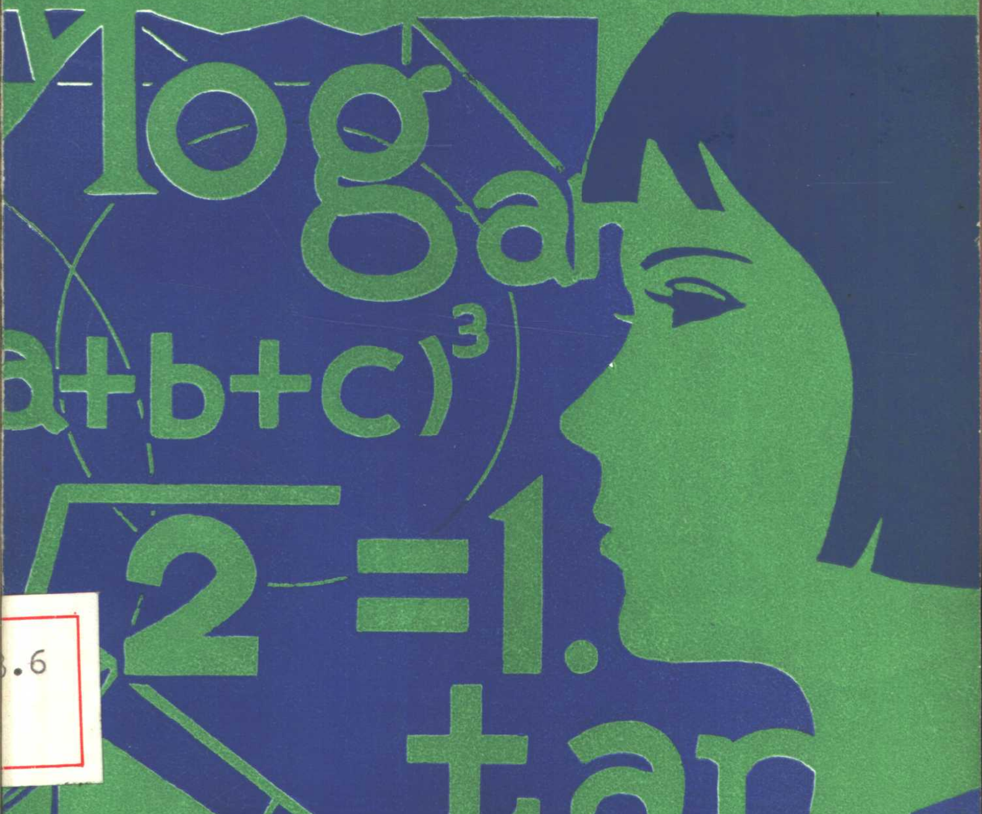
赵振威 著

怎样学好数学



科学出版社

怎样学好数学

赵振威 著

科学出版社

1986

内 容 简 介

学好数学除智力及勤奋外，方法也是重要因素．科学的学习方法有助于活跃思维、发展智力和大幅度提高学习效果．本书作者积多年教学经验，编写了这本旨在给自学青年、中学生、进修班学员等提供学好数学的钥匙，供中学教师和师范院校师生以教好数学的借鉴的参考书。

书中以丰富有趣的实例、深入浅出的叙述，分十二章介绍了怎样学好数学、怎样思维、怎样自学、怎样听课、怎样解题、怎样检验、怎样记忆、怎样复习、怎样应用等内容。所介绍的学习方法简明、实用、行之有效，本书在理论与实践的结合上具有一定特点。

本书可供自学青年、中学生、学生家长、进修班学员、业余大学和电视大学低年级学生及师范院校师生参考。

怎样学好数学

赵振威 著

责任编辑 徐一帆

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年8月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1986年8月第一次印刷 印张：11⅞

印数：0001—20,000 字数：271,000

统一书号：13031・3242

本社书号：4143・13—1

定价：2.20 元

前　言

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学．它和其它一切科学一样，也是人类在认识自然、改造自然、与大自然作斗争的过程中，由于生产实践的需要而产生，并随着科学技术的进步而发展起来的．现在，这门学科已经渗透到物质世界的各个领域，成为各门科学共同发展的工具．

马克思曾经指出，一种科学只有成功地运用数学的时候，才算达到了真正完善的地步．随着科学技术的迅猛发展，特别是微电子学的广泛应用，自然科学、社会科学、思维科学的各门学科，都越来越需要数学的支持；各级各类学校的学生，各行各业的工人、干部中，学数学、用数学的人越来越多．从而，“怎样学好数学”也就越来越引起人们的关心，成为教育科学的一个重要研究课题．

怎样学好数学，这是一个十分复杂的问题，涉及到许多方面的知识．就学习的过程而论，学习过程是以认识为基础的复杂心理过程，参与学习过程的心理成分，既有感知、想象、思维、记忆等学习过程本身所涉及的心理成分；又有动机、兴趣、注意、意志等激发学习积极性的心理成分．在学习中，二者总是同时交织在一起进行的．这就表明，学习数学必须有明确的目的，充足的动力，必须以心理学、教育学、认识论等科学理论作指导．

从知识和智力的关系来说，知识是人类实践活动的经验总结；掌握数学知识，主要是接受书本上的间接经验，掌握数学的基本结构，即基本概念、基本规律和基本方法；智力

是指人的认识能力的总和，是掌握知识，解决问题的速度、深度和广度。在学习中，二者应是相辅相成的，知识是启迪智慧的基础，智力是学习知识的先导和保证。这样，学习数学必须把知识和智力辩证地统一起来，在掌握知识的同时，重视发展智力，培养能力。

就数学的内容、意义和方法而论，数学是一门极度抽象的学科，它的高度的抽象性，决定了它的严密的逻辑性，保证了它的广泛的应用性；数学不但研究那些直接从现实世界中抽象出来的数量关系和空间形式，而且还需要在已有数学理论的基础上，形成新概念、新理论。这些特点，给学习数学带来了一定的困难，也决定了学习数学必须讲究学习方法，注重思维训练，在总结解题思路、发展技能和技巧上多下功夫。

本书试图从数学的特点出发，以马克思主义的认识论作指导，综合运用心理学、教育学、逻辑学的基本原理，系统分析思维、自学、听课、解题、检验、记忆、复习、应用等学习数学的各个主要环节，从理论和实践的结合上，总结一套科学的学习方法。

一般说来，成功的学习方法是和学习者的个性相适应的。在学习中，读者不必拘泥于本书所述的具体方法，可以根据书中的有关原理，创造出合乎自己特点的好方法。限于著者水平，缺点、错误在所难免，恳请广大读者批评指正。本书如果能在指导读者掌握科学的学习方法，提高学习数学的效果方面有所裨益，则将为之感到欣慰。

作者

目　　录

第一章　绪论

数学是科学的大门和钥匙。

——罗吉尔·培根

数学是一门非常有用的科学．现在，它已经渗透到各个领域，成为各种科学、技术、经济建设以至日常生活所不可缺少的工具．

学习数学，有没有规律可循？怎样才能学好数学？怎样才能提高学习效果？这是广大青少年十分关心的问题．要完满地解决这些问题，必须对数学观念有一个完整的认识．本章从数学的研究对象入手，深入地讨论数学的特点和作用，并以此为基础，系统分析学好数学的一些基本因素．

一、什么是数学

数学，由于实践活动的需要，在古代便已经产生了，现在已发展成为分支众多的庞大系统．如果我们把各个分支的内容仔细分析一下，就可以发现，数学的研究对象，大致可以分成两类：一类是研究现实世界的数量关系的；一类是研究空间形式的．换句话说，整个数学，不论是初等数学，还是高等数学，都是以数和形作为研究对象的．

例如，算术、代数是研究数和数量关系的学科，主要考察数量的运算规律；平面几何、立体几何是研究形和空间形

式的学科，主要考察物体的形状、大小和位置；平面三角既研究数又研究形，主要考察三角函数的数量关系和三角形的边角关系；解析几何则把数和形结合起来考察，以坐标为桥梁，运用代数方法研究几何图形；数学分析则更是以函数为主线，系统研究数、形关系的一个数学分支，等等。

数和形这两个基本概念，是数学的两块基石。整个数学大体上都是围绕这两个概念的提炼、演变、发展而展开的。为了对这个问题有一个完整的认识，我们不妨简要地回顾一下数学的发展概况。

从远古时代起，人类就在长期的生产实践中．积累了许多数学知识，逐渐形成了数的概念，产生了关于数的运算方法．由于土地测量和天文观测的需要，引起了几何学的初步发展．但是，直到公元前六世纪，这种知识还是片断的、零碎的，没有形成具有逻辑关系的严谨体系，因而只能作为数学的萌芽载入史册。

公元前五世纪，古希腊有人开始研究数学知识间的内在联系．公元前三世纪，人们已积累了相当丰富的几何经验知识，有待进行系统的加工整理；同时，形式逻辑已经形成，为这种加工整理提供了必要的工具．在这样的条件下，古希腊数学家欧几里得（Euclid，约公元前 330—前275 年）的《几何原本》问世．此后，直到十六世纪，包括初等几何、算术、初等代数、三角学的初等数学（即常量数学）已大体上完备了。

十七世纪，生产力的不断提高，推动了科学技术的发展，不但已有数学成果得到巩固、充实和扩大，而且由于实践的需要，开始研究运动着的物体和变化着的现象，变量的概念应运而生．这是数学上的一个转折点．十七世纪上半叶，法国数学家笛卡尔（Descartes，1596—1650年）以力学

的要求为背景，用代数形式的方法研究几何内容的课题，建立了解析几何学。十七世纪下半叶，英国物理学家、数学家牛顿（Newton，1642—1727年）和法国数学家莱布尼兹（Leibniz，1646—1716年）彼此独立地建立了微积分。此后，又形成了微分方程、微分几何、概率论等分支。直到十八世纪末大约二百年间，是以微积分为基本思想的变量数学长足发展的时期。

十九世纪以来，数学发生了一连串本质的变化。在试图证明欧几里得的平行公设的过程中，俄罗斯数学家罗巴切夫斯基（Лобачевский，1792—1856年）建立了非欧几何学；在研究五次以上代数方程解法的一般理论时，挪威数学家阿贝尔（Abel，1802—1829年）和法国数学家伽罗华（Galois，1811—1832年）开创了近世代数的研究；在研究分析基础精确化的过程中，德国数学家康托尔（Cantor，1845—1918年）创立了集合论。此外，拓扑学、实变函数论、泛函分析以及代数几何、分析拓扑等交叉学科相继形成。由于对数学基础的研究，又建立和发展了数理逻辑的各个新分支。

近几十年来，由于现代生产和国防建设的需要，对资源、设备等条件的合理使用和统筹规划，涌现出对策论、规划论、排队论、最优化方法等运筹类学科。现代大工业要求对工程系统的操作能更可靠与更经济，并能自动控制，出现了一门介于数学和工程之间的边缘学科控制论。电子计算机的出现，大大促进了计算数学的发展，形成了计算机科学的数学理论。数学与其它科学的相互渗透，又出现了物理数学、生物数学、经济数学等边缘学科。

从上述简要的历史回顾中，我们不难看出：数学是一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学；生产实践的需要，科学技术的发展，为数学提供了丰富的源泉和广阔的前

景，使数和形的概念不断深化，由此把数学推向前进。

二、数学的特点

任何一门科学，都有自己固有的特点。数学也不例外，它有三个显著的特点：一是极度的抽象性；二是严密的逻辑性；三是广泛的应用性。这些特点，都是为数学的研究对象所决定的。深刻地认识数学的特点，对于明确学习目的，端正学习态度，改进学习方法，提高学习效果，具有十分重要的指导意义。

1. 极度的抽象性

任何科学都具有抽象性，但是，数学的抽象与自然科学、以及社会科学的抽象却有着显著的差异。首先，数学的抽象撇开对象的具体内容，仅仅保留数量关系或空间形式；其次，数学的抽象是经过一系列的阶段形成的，它的抽象程度大大超过了自然科学或社会科学中一般的抽象；第三，不仅数学的概念是抽象的，而且数学方法本身也是抽象的。自然科学家为了证明自己的理论，常常求助于实验，数学家证明定理只需用推理或计算。

数学的抽象性的特点，在数和形的一些原始概念中，就已经显示出来了。例如，自然数的概念，是从计数的需要产生的。人类在原始社会的时候，以狩猎、捕鱼和采集果实为生。当时，人们关心的问题，是野兽、鱼、果实的有和无。这样，就逐渐产生了数量的观念。开始，用“扳指头”的办法，一个一个地数集合中的物体。以后发展到用一只手表示五，整个人表示二十等等。那时的“五”还不是抽象的数，而是简单地理解为物体的个数“就象手上的指头那样多”；

同样，“二十”被理解为“就象一个人身上所有的手指头和脚趾头那样多”。

在相当长的历史时期里，人们的数量观念都是和事物的具体内容联系在一起的，一头野兽，一条鱼，或者其它一个什么具体事物．随着实践活动的发展，人们又发现了量的共同特征．比如，一头野兽和一条鱼是完全不同的两个量，可是它们有一个共同的地方，即都是一个东西．一头野兽添上一头野兽是两头野兽，一条鱼添上一条鱼是两条鱼．也就是说，一个东西添上一个同类的东西总是两个同样的东西．这样一来，把一头野兽、两条鱼、三个矛头等等的具体内容抛开，就变成了一些抽象的数．这些一、二、三等等的数，在不同的场合，就可以表示各类量的多少． 引进了数字符号后，就变成1、2、3、……等等抽象的数的系统，形成了作为集合标志的自然数的概念．

又如几何学中的点的概念，也是从现实世界中抽象出来的．日常生活中经常遇到的水点、雨点、万米长跑的起点、河流的交会点、某学校的所在地点等，都可以作为“点”的现实原型．这些例子中的点的物理性质各不相同，大小也不一样，但它们有一个共同特征，即各自占据着一定的位置．几何学中的点，舍弃了事物的物理性质，更无大小可言，仅仅表示位置，也就是纯属观念性的东西．点是几何学中的基本元素，除了表示位置，还有其它作用．比如，点的集合可以构成直线、曲线，也可以构成平面、曲面，甚至还可以构成整个空间．这些都是数学家的观念的需要．

随着实践活动的发展，数学的抽象程度逐步提高．数学不但研究那些直接从现实世界中抽象出来的数量关系和空间形式，而且还需要在已有数学理论的基础上，形成新概念、新理论．因此，数学的抽象性不仅表现在广度上，而且表现

在不同层次的深度上。恩格斯称数学是“一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学。”这是对数学抽象性的深刻概括。

2. 严密的逻辑性

任何科学都要运用逻辑工具，但是，数学对逻辑性的要求，与其它科学也有所不同。这是因为，数学的研究对象是具有高度抽象性的数和形，整个数学体系难于通过实验来进行，而只能借助于严密的逻辑结构来实现。

具体地说，在数学理论的整理和加工中，无论是概念的表述，还是进行判断或推理，都需要运用形式逻辑的规则，遵循思维的基本规律。并且，在数学理论的探索过程中，还需要运用分析和综合、抽象和概括、归纳和演绎、类比和假说等形式逻辑的各种方法，需要从一定的概念出发，运用逻辑推理，引出进一步的结论来。这样，数学就必然地要具有严密的逻辑性的特点。

欧几里得的《几何原本》，可以作为严密的逻辑性的一个很好的例子。《几何原本》的基础是由原始概念的定义以及公理与公设所组成的。它的原始概念只是描述性的定义；它的公理与公设都是一些不加数学证明而直接采用的命题。全书以此为前提，利用逻辑推理的方法，推演出整个几何体系，把丰富而零散的几何材料，整理成了系统严明的整体。《几何原本》是用公理法建立起演绎的数学体系的最早典范，一直被后世所推崇。二千多年来，所有初等几何的教科书和有关初等几何的论著，大多是以《几何原本》为根据的。

当然，数学的严密性并不是绝对的，数学的原则也不是一成不变的，而是处在变化、发展之中。例如，上面说到的

《几何原本》，也有不完善的地方，某些概念定义得不甚明确，某些基本命题还缺乏严密的逻辑根据。因此，二千多年以后，德国数学家希耳伯特（Hilbert，1862—1943年）又逐步建立了更严密的希耳伯特公理体系。

3. 广泛的应用性

任何科学都有其重要的应用，但是，数学的应用范围更加广泛。这是为数学的抽象性所决定的。数学所研究的数量关系或空间形式，不只存在于某一特定的物质运动形态中，而是普遍地存在于各种物质运动形态之中，因而它必然地能够应用于各种物质运动形态的研究。

数学应用的例证是不胜枚举的。海王星的发现，就是其中一个光辉的范例。

太阳系九大行星之一的海王星，是于1846年在数学计算的基础上被发现的。1781年发现了天王星以后，英国天文学家亚当斯和法国天文学家、数学家勒维烈，分析了天王星运动的不规律性，认为这种不规律性是由于其它行星的引力所造成的。1845年勒维烈以力学法则和引力法则为依据，经过一年多的计算，确定了这颗行星的位置，于1846年9月把结果告诉了德国柏林天文台助理员加勒，而加勒果然在勒维烈指出的位置相差不到一度的地方，找到了这颗后来被命名为海王星的行星。这一发现不仅是力学和天文学特别是哥白尼学说的胜利，而且也是数学应用的胜利。

十九世纪末，恩格斯在《自然辩证法》一书中，曾经总结过当时的数学应用："在固体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中已是比较困难了；在物理学中多半是尝试性的和相对的；在化学中是最简单的一次方程式，在生物学中＝0。"一百多年来，随着科学技术的飞速发

展，数学的应用已迥异往昔。

例如，拿当年应用“= 0”的生物学来说，现在已越来越多地需要数学。比如指数函数可以描述示踪元素在机体内随时间的衰变；对数函数可以描述细胞、微生物的生长过程；极坐标系统可以描述鸟类、鱼类等的定向、定位的行为，还可以建立描述植物叶子、花瓣、叶脉形状的各种曲线方程；常微分方程组可以描述生物细胞内各种液体流动及生物热传递和能量传递的过程，模糊集理论可以描述衰老、细胞变形和染色体变形等现象。凡此种种，生动地说明了，一切科学技术原则上都可以用数学来解决有关的问题，只有现在还不能应用数学，而没有原则上不能应用数学的领域。

容易看出，数学的三个特点是互相联系的。数学的极度抽象性，决定了它的严密的逻辑性，保证了它的广泛的应用性。这些特点深刻地反映了：实践是数学发生的源泉；实践是数学发展的动力；实践是检验数学真理的标准；实践的需要，也是学习和研究数学的目的。

三、为什么要学习数学

学习数学，有一个动力问题。车船没有动力不能前进，机器没有动力不能运转。只有明确学习数学的目的，才能激发强烈而旺盛的学习动机，才能产生充足而持久的学习动力，从而也才能以顽强的革命毅力，战胜学习中的重重困难，最终登上数学高峰。

那么，究竟为什么要学习数学呢？关于这个问题，我们可以从三方面来认识。

首先，学习数学是四化建设的需要。

数学的广泛的应用性，决定了它在四化建设中的重要作

用. 我们知道，实现四个现代化，关键在于科学技术的现代化. 按照科学分类方法，物质世界的运动，按其矛盾的特殊性，可分为自然、社会和思维三大基本领域. 与物质世界三大基本领域相对应，现代科学包括五大基本部类：研究自然界运动规律的自然科学；研究社会运动规律的社会科学；研究思维运动规律的思维科学；研究三大领域共同具有的量的关系的数学；研究三大领域最一般规律的哲学. 它们之间的关系，如图 1－1 所示.

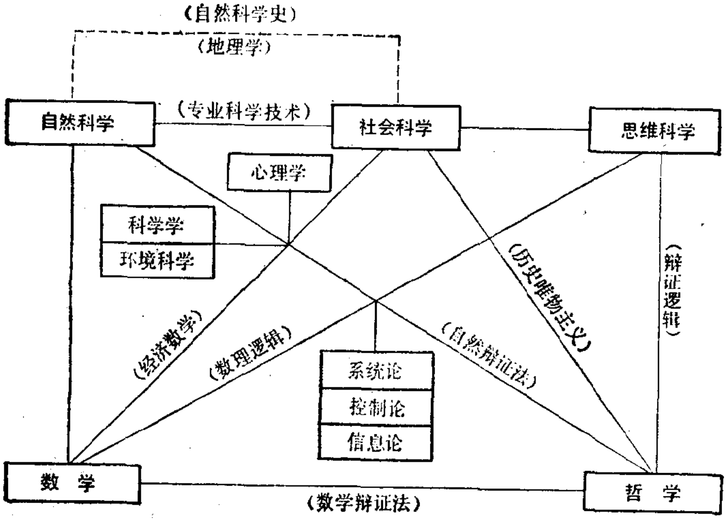


图 1－1 现代科学总分类示意图

图1-1 中，黑体字表示大部类科学；无括号者表示大部类之次级部类学科；圆括号表示次级过渡学科或边缘学科；长方括号表示横断或综合学科；实线表示一级联系，虚线表示次级联系.

从图中可以看出，数学已经广泛地渗透到物质世界的各