SHULIE

递推数列与数列不等式

林炳华 等编

陕西科学技术出版社

递推数列与数列不等式

主编　　林炳华

陕西科学技术出版社

内 容 简 介

本书是中学教师、中学生及数学爱好者的一本实用的参考书．既是教师在教学中的助手，又是中学生复习、巩固、深入学习的有益读物．内容共分四部分：一、数列的基本知识，包括等差数列及等比数列；二、递推数列；三、数列不等式；四、近年来国内、外竞赛题和典型的高考试题精选，帮助师生了解当前数列类型题目发展的动向．

递推数列与数列不等式
主编　林炳华
陕西科技出版社出版发行
（西安北大街131号）
新华书店经销　西北工业大学印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本8印张　169千字
1992年5月第1版　1992年5月第1次印刷
印数：1—8,000
ISBN　7-5369-1192-0/O·39
定　　价：3.80元

前　言

数列是数学中一个重要课题，它既是数学的基础知识，又是通向高等数学和近代数学的基石，因此，有关数列的问题经常出现在竞赛和高考试题中，引起教师和学生的广泛重视.

这本书以不多的篇幅，精练、简明、扼要的讲述了数列的基本知识，在教学中教师容易使用，在学习中学生容易理解，能在教和学中起到很强的辅助作用. 选题范围宽广、既有当前教与学方面的题型，又有进一步学习数列的较深题型；在解题方法上提供了分析与思路，使读者容易掌握解题途径，尤其是比较难解的递推数列和数列不等式. 解题过程既有传统解法，又有个人独创使难解化作易解，难懂化作易懂.

参加本书主要编写人员有：

兰纪正：《中学数学教学参考》编辑部原主编（现退休）担任总审稿。

林炳华：中国数学会会员　福建中学数学高级教师。

周桂香　段养民：《中学数学教学参考》编辑部编辑。

林　敬　福建闽侯虎峰中学。

参加本书编写的还有：福建惠安一中刘连雨、闽侯二中陈明安、同安一中王东南、福州屏东中学张静心，惠安黄塘中学周田金、福州十八中周天亮、龙海二中蓝木成，河南洛宁县二高中杨茂生、甘肃榆中县七中戴述贤、湖北潜江市圆林高中周之夫、浙江龙游县龙游镇教研室周以贵以及福建的

林铁民、王盛菇、杨勇、黄卿、辛秀金、庄友顺、王华辉、蔡加平，湖北的张力、龚文震、邹传铭、郑昭智、刘丰月；安徽的刘晓龙，湖南的毕政之，山西的张申酉；河北的刘克让，江苏的储传能，甘肃的王志亮和浙江的黄关汉。

限于编者水平，书中难免疏编之处，欢迎广大读者批评指正.

编　者

1992 年 3 月

目　录

第一章　基础知识……………………………… (1)
一、等差数列 ……………………………………… (2)
二、等比数列 ……………………………………… (7)
三、混合型数列……………………………………… (13)
四、无穷等比数列…………………………………… (17)
五、其它数列………………………………………… (21)
1. 相同数码型数列 ………………………………… (22)
2. 自然数幂数列 …………………………………… (25)
3. 三角级数 ………………………………………… (30)
4. 调和数列 ………………………………………… (33)
练习题一 ………………………………………… (35)
第二章　递推数列 ……………………………… (39)
一、常系数一阶线性递推数列……………………… (39)
二、非常系数一阶递推数列………………………… (46)
三、二阶常系数齐次线性递推数列………………… (60)
四、二阶非齐次线性递推数列……………………… (68)
五、分式递推数列…………………………………… (74)
六、递推数列方程组………………………………… (82)
七、可化为二阶线性递推数列……………………… (98)
八、其它类型的递推数列 ………………………… (104)
九、递推数列的极限 ……………………………… (120)
练习题二…………………………………………… (132)

第三章、数列不等式 …………………………… (137)
一、一阶递推数列不等式 ………………………… (137)
二、二阶递推数列不等式 ………………………… (143)
三、数列不等式的证明方法 ……………………… (153)
练习题三………………………………………… (196)
第四章　竞赛、高考中数列题选编 …………… (200)
一、竞赛题选 …………………………………… (200)
1. 国内部分……………………………………… (200)
2. 国外部分……………………………………… (212)
二、高考题选 …………………………………… (228)
练习题参考答案……………………………… (241)

第一章　基础知识

本章作为以后各部分的基础，并起到复习巩固中学数学中数列的基本知识的作用，概念在这里就不再重述，这样可以减少篇幅. 我们知道若以数列的项数来分，有有限数列和无限数列；以数列各项之间的关系可分为递增数列，递减数列，等差数列，等比数列，递推数列；以及有界数列和无界数列等等. 但是，在中学阶段多以等差和等比数列为基础伴以递推数列. 本章通过等差和等比数列的范例分析后，重点叙述递推数列及数列不等式.

数列：按照一定顺序排列的一串数叫做数列. 如

(1)　$1, 2, 3, 4, \cdots n, \cdots$

(2)　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(3)　$-1, 2, -3, 4, -5, \cdots, (-1)^n n, \cdots$

一般的可用符号表示为

$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \cdots$

从上边这种表示法可以看出，我们可以给一个数列的每一项排上一个序号，即相应项数的一个自然数（作为脚码）. 然后，将脚码看作自变量，相应的项看作函数值，数列和其序号就是函数关系.

中学所讨论的有关数列的问题是，首项，末项，数列某

些项之和，更多的是数列的极限，以及数列的通项公式. 当然，有时也讨论其它一些问题.

通项公式：将数列的第 n 项表示成 n 的关系式. 这个关系式就称为该数列的通项公式. 这个问题是一个引人注意的问题. 如：前面的例子中：

第 2 例的通项公式为：$a_n=\frac{1}{n}$；

第 3 例的通项公式为：$a_n=(-1)^n n$.

反之，如果知道一个数列的通项公式，就可逐项写出这个数列. 如

例 1 一个数列的通项公式为：

$$a_n=1+(-1)^n$$

其数列为 0，2，0，2，….

例 2 一个数列的通项公式为：

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & (n \text{ 为奇数}),\\ 1+2^{-n} & (n \text{ 为偶数})\end{cases}.$$

其数列为 $1,\frac{2^2+1}{2^2},\frac{1}{3},\frac{2^4+1}{2^4},\frac{1}{5},\frac{2^6+1}{2^6},\cdots.$

我们在大多数范例下边加了“分析”一步，以帮助读者找到解题的思路和方法.

一、等差数列

如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前面一项的差等于一个常数，就把这个数列叫做等差数列，这个常数叫做公

差，用 d 表示.

如果有一个等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_n\cdots$，它的公差为 d，则其通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

若 a,A,b 为等差数列中相邻三项，则 $A=\frac{a+b}{2}$，并且把 A 叫做 a,b 的等差中项.

等差数列的前 n 项之和为

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

若把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入上式，可得 S_n 的另一种表示式

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

在等差数列中有五个元素 a_1,d,n,a_n 和 S_n，只要予先知道其中三个，就可求得另外两个.

例 1 已知等差数列的公差 $d=-\frac{1}{2}$，第 n 项 $a_n=-1\frac{1}{2}$，前 n 项和 $S_n=7\frac{1}{2}$，求它的首项 a_1 与项数.

分析：已知条件中给出了三个元素 d,a_n,S_n，求其它两元素. 由它们关系可列出关系式. 然后求解.

解：依公式可列出方程组

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d, \\ S_n = \dfrac{n(a+a_n)}{2} \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}=a_1+(n-1)(-\dfrac{1}{2}), \\ 7\dfrac{1}{2}=\dfrac{n(a_1-1\frac{1}{2})}{2}. \end{cases}$$

解之得 $$a_1=3, n=10.$$

例 2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_4+a_7=-3, a_1a_4a_7=8$，求此数列的通项.

分析：先设出 a_1,a_4,a_7 的表示式，由于 a_1 与 a_7 对 a_4 是对称的，故可设这三项的对称表示式为 a_4-3d, a_4, a_4+3d. 再代入已给关系式，即可求得通项.

解：设第 1，4，7 项分别为 a_4-3d, a_4, a_4+3d，并代入已知关系式可得 $a_4-3d+a_4+a_4+3d=-3$，

故 $$a_4=-1,$$

故 $$-a_1a_7=8,$$

即 $$-(a_4-3d)(a_4+3d)=8,$$

解之 $$d=\pm 1.$$

故所求数列为 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$，

或 $4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, \cdots$.

通项公式为 $$a_n=-4+(n-1)\cdot 1=n-5,$$

或 $a_n=4+(n-1)\cdot(-1)=5-n$.

例 3 在自然数数列中，若第 $(n-1)$ 项等于前 $n-2$ 个自然数之和，求 n.

分析：先求出前 $n-2$ 项自然数之和，然后由已知关系即可求出 n.

解：依题意得

$$a_{n-1}=n-1, S_{n-2}=\frac{(n-2)(1+n-2)}{2},$$

故 $n-1=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$，故 $n=4$.（$n=1$ 不合，舍去）

即所求的 n 值为 4.

例 4 求介于 1000 与 6500 之间能被 12，15，18 三数同时整除的自然数之和.

分析：先求 12，15，18 的最小公倍数，即为这个数列的公差. 然后，找出这个数列的首项及末项，即可求得自然数之和.

解：依题意得 12，15，18 的最小公倍数为 180，即 $d=180$，故首项 $a_1=1080$，末项 $a_n=6480$，则 $6480=1080+(n-1)180$，

$$故\quad 558=18n, n=31,$$

$$故 S_{31}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}=117180.$$

例 5 三角形的三边成等差数列，周长为 18，面积为 $6\sqrt{6}$，求其三边长.

分析：三角形三边成等差数列，故可设成对称式 $a-d$，a，$a+d$. 然后依据已知条件，列方程求解.

解：设三边为 $a-d, a, a+d$.

$$a-d+a+a+d=18, a=6,$$

即三边为 $6-d, 6, 6+d$，

面积 $\triangle=\sqrt{9(9-6+d)(9-6)(9-6-d)}$，

解之，$d=\pm 1$，

三边分别为 5，6，7.

例 6 有一等差数列，其前 12 项之和为 246，且其前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 66∶57，求公差.

分析:等差数列的奇数项及偶数项分别构成公差为 $2d$ 的两个等差数列, d 为原数列的公差,可先求出奇数项和及偶数项和. 然后,用首项及公差列成二元联立方程组,求解.

解: 设偶数项之和为 $S_{偶}$,奇数项之和为 $S_{奇}$,则

$$\begin{cases} S_{偶} + S_{奇} = 246, \\ S_{偶} : S_{奇} = 66 : 57, \end{cases}$$

解之
$$\begin{cases} S_{偶} = 132, \\ S_{奇} = 114, \end{cases}$$

故
$$\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 132, \\ a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 114, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} 6a_1 + 36d = 132, \\ 6a_1 + 30d = 114 \end{cases},$$

$$d = 3, a_1 = 4.$$

例 7 在等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots$ 中,

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k,$$

$$S_2 = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k},$$

$$S_3 = a_{2k+1} + a_{2k+2} + \cdots + a_{3k},$$

……

$$S_n = a_{(n-1)k+1} + a_{(n-1)k+2} + \cdots + a_{nk}.$$

求证: $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n \cdots$ 仍为等差数列.

分析: 只要证 $S_{m+1} - S_m$ 与 $S_2 - S_1$ 为同一个常数.

证明:
$$S_{m+1} - S_m = [a_{mk+1} + a_{mk+2} + \cdots + a_{mk+k}] - [a_{(m-1)k+1} + a_{(m-1)k+2} + \cdots + a_{(m-1)k+k}]$$

$$= \overbrace{kd + kd + \cdots + kd}^{k\text{个}} = k^2 d,$$

其中 $d = a_{n+1} - a_n$ 为常数,故 $k^2 d$ 为常数.

$$
\begin{aligned}
\text{又 } S_2 - S_1 &= (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}) \\
&\quad - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\
&= k^2 d.
\end{aligned}
$$

故　$\{S_n\}$ 为等差数列.

二、等比数列

如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数。这个数列称为等比数列，这个常数叫做公比，用 q 表示.

如果等比数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 的公比为 q，则通项公式为

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

如果 a, G, b 为等数列中的相邻三项，则 $G^2 = ab$，把 G 叫做 a, b 两项的等比中项.

根据通项公式，等比数列前 n 项之和可表示为

$$S_n = a_1 + a_1 q_1 + a_1 q_1^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

给上式两边各乘以 q，则

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

将上二式相减可得求和公式

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

例 1　在等比数列 $\{a_n\}$：3，…，6561，…，531441 中，6561 是第几项？531441 是第 $2n-4$ 项，求公比 q.

分析：根据此数列的通项公式可列出两个方程联立求解.

解：已知 $a_1 = 3$，又 $3q^{n-1} = 6561 = 3^8$，

故　$q^{n-1} = 3^7$，

又　$3q^{2n-5} = 531441 = 3^{12}$，

故　$q^{2n-5} = 3^{11}$，

$$q^{2(n-1)-3} = \frac{q^{2(n-1)}}{q^3} = 3^{11}$$，

由以上可得 $\frac{(3^7)^2}{q^3} = 3^{11}, q^3 = 3^3$，

即　$q = 3$，

故　公比为 3.

例 2　等比数列前 n 项之和为 3，其后 $2n$ 项之和为 18，试求再后面的 $3n$ 项之和，这里 n 为偶数.

分析：前 n 项之和为 $S_n = \frac{a_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$，要求再后面的 $3n$ 项之和，即总共涉及了 $6n$ 项. 先求 S_{3n}，然后求 q^n，从而可求得 $S_{6n} - S_{3n}$. 即再后的 $3n$ 项之和.

解：由题意知 $q \neq 1$ 时，故有 $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$，设 $\frac{a_1}{q - 1} = P$，

即　$S_n = P(q^n - 1) = 3$，　①

其前 $3n$ 项之和为 $S_{3n} = \frac{a_1(q^{3n} - 1)}{q - 1} = P(q^{3n} - 1)$，

$\therefore$　$S_{3n} - S_n = P(q^{3n} - 1) - 3 = 18$，

$\therefore$　$S_{3n} = P(q^{3n} - 1) = 21$，　②

以上①②两式相除得　$\frac{P(q^{3n} - 1)}{P(q^n - 1)} = 7$，

$$q^{2n} + q^n - 6 = 0,$$

$$q^n = 2 \quad (n \text{ 为偶数})$$

把 $q^n = 2$ 代入 ① 式 $P = 3$.

$$S_{6n} - S_{3n} = P(q^{6n} - 1) - 21 = 168.$$

即所求再后面 $3n$ 项之和为 168.

例 3 等比数列的前 n 项之和为 A，前 $2n$ 项之和为 B，前 $3n$ 项之和为 C，求证 $A^2 + B^2 = A(B + C)$.

分析：分成 $q = 1$ 与 $q \neq 1$ 两种情况，用首项 a_1 与公比 q 表示 A，B，C，即可得到结论.

证明：设等比数列首项为 a，公比为 q，

(1) 当 $q = 1$ 时，$A = na$，$B = 2na$，$C = 3na$，

$\therefore \quad A^2 + B^2 = (na)^2 + (2na)^2 = 5n^2a^2,$

$$A(B + C) = na(2na + 3na) = 5n^2a^2.$$

故 $\quad A^2 + B^2 = A(B + C)$.

(2) 当 $q \neq 1$ 时，$A = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q}$，$B = \dfrac{a(1 - q^{2n})}{1 - q}$，

$$C = \frac{a(1 - q^{3n})}{1 - q},$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad A^2 + B^2 &= \left(\frac{a}{1 - q}\right)^2[(1 - q^n)^2 + (1 - q^{2n})^2] \\ &= \left(\frac{a}{1 - q}\right)^2(1 - q^n)(2 - q^{2n} - q^{3n}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(B + C) &= \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \cdot \frac{a}{1 - q}[(1 - q^{2n}) \\ &\quad + (1 - q^{3n})] \\ &= \left(\frac{a}{1 - q}\right)^2(1 - q^n)(2 - q^{2n} - q^{3n}), \end{aligned}$$

故 $\quad A^2 + B^2 = A(B + C)$.

例 4 等比数列$\{a_n\}$中首项 a 和公比 q 均为整数，求证这个数列的前 $2n + 1$ 项中各项的平方和能被各项的和整除.

分析：先求该数列的各项平方和及各项之和，然后分析

相除后的结果是否为整数，若为整数时即证得结果.

证明：设等比数列的首项为 a，公比为 q，则前 $2n+1$ 项之和为

$$S_{2n+1}=\frac{a(q^{2n+1}-1)}{q-1},$$

前 $2n+1$ 项的各项平方和为

$$S'_{2n+1}=\frac{a^2(q^{4n+2}-1)}{q^2-1}$$

所以 $$\frac{S'_{2n+1}}{S_{2n+1}}=\frac{a^2(q^{4n+2}-1)}{q^2-1}\cdot\frac{q-1}{a(q^{2n+1}-1)}$$

$$=\frac{a(q^{2n+1}+1)}{q+1}$$

$$=a(q^{2n}-q^{2n-1}+q^{2n-2}-\cdots q+1)$$

上式中 a 为整数，q 为整数，因此，q 的任何整数平方仍为整数. 上式结果为整数，故各项平方和能被各项和整除.

例 5 若 $abc\neq 0$，$a\neq c$，二次方程 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+(b^2+c^2)=0$ 有相等实根，则 a，b，c 组成等比数列且公比为 x.

分析：已知二次方程有相等的实根，故判别式等于 0，故可得 $(b^2\text{-}ac)^2=0$，即 a，b，c 成等比数列.

证明：因所给方程有相等实根，

故 $\Delta=[-2b(a+c)]^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)=0$,

$$b^4-2ab^2c+a^2c^2=0,$$

$$(b^2-ac)^2=0, b^2=ac,$$

故 a，b，c 成等比数列.

故 $x=$