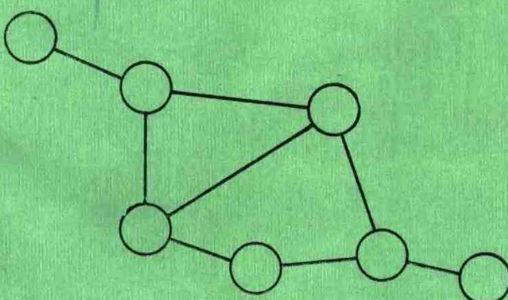
经济管理数学方法

高紫光　和金生　范贻昌　编



天　津　大　学　出　版　社

内 容 提 要

本书介绍了现代化管理中最常用的几种数学方法，包括线性代数、概率与数理统计、线性规划和网络计划技术。选材以普及为主，兼顾提高，叙述力求深入浅出。本书可供广大管理干部及工程技术人员阅读，或选作具有中专以上文化程度的现代化管现培训班教材，也可供各大专院校师生参考。

〔津〕新登字012号
津南文图字(91)印0079号)

经 济 管 理 数 学 方 法

高紫光　和金生　范贻昌　　编

*

天津大学出版社出版
（天津大学内）
天津市政印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米1/16　印张：25　字数：150　千字
1992年3月第一版　　1992年3月第一次印刷
印数：1—2000
ISBN 7-5618-0335-4
O·37
定价：14　元

前　言

随着我国社会主义建设和科学技术的发展，对现代化管理科学的研究越来越显得重要，特别是在现代化经济管理中充满着各种各样的数量关系，要全面提高经济管理水平，除了必须具备坚实的专业知识、丰富的实践经验，做好定性分析工作以外，还必须努力加强定量分析的工作，而且随着计算机的发展、管理水平的提高，定量分析的内容和范围也在逐渐扩大。为此，经济管理工作者必须具备一定的现代数学基础。

经济管理工作所需要的数学，涉及面很广，几乎涉及到现代数学的各个分支。鉴于本书的宗旨和篇幅所限，仅编入最常用的线性代数、概率与数理统计、线性规划及网络计划技术四部分，其中每一部分都侧重于应用，而把有关定理本身的推导过程从略。我们深信，这些数学基础对每一个科技工作者和经济管理干部来说都是最必需的，而且对学习其他专业知识也提供了必不可少的数学工具。

本书第一章、第四章由高紫光编写，第三章由范贻昌编写，第二章由和金生、李文提编写，高紫光对全书进行了总纂。鉴于编者水平有限，时间仓促，书中难免有疏漏和错误之处，恳请读者提出宝贵意见。

编　者

1991年3月

目　录

第一章　线性代数

第二章　概率论与数理统计

第三章　数学规划方法

第四章 网络计划技术

第一章　线性代数

在经济理论研究和经济管理工作中，会经常遇到线性方程组求解问题，而线性代数是研究线性方程组的重要工具。作为经济管理数学基础之一，本章将介绍行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量等基本知识。

§1—1　行列式

行列式的理论是由研究线性方程组的解法而产生的。本节将从分析二阶和三阶行列式的共同特征出发，引入n阶行列式概念，并介绍n阶行列式的基本性质和计算方法，最后给出用行列式解线性方程组的克莱姆法则。

一　n阶行列式

（一）二阶与三阶行列式

对于含两个未知量的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

显然，当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程组（1.1）有唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆，引进二阶行列式。

定义　符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$的代数和，称为二阶行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$-$　　　　　$+$

这可以用交叉相乘再相加的方法记忆。因此，方程组（1.1）的解，可改写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad \text{（其中）}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

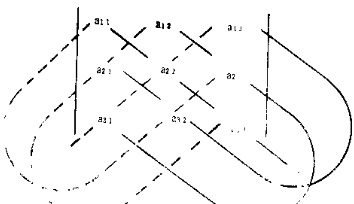
$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

与引进二阶行列式的概念一样，在讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \qquad (1.2)$$

的解时，为便于记忆，定义三阶行列式。

定义 符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 的代数和，称为三阶行列式。即



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

同样可用交叉相乘再相加的方法记忆。对于方程组（1.2），当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这就是求解三元线性方程组的克莱姆法则。

在行列式中横着的一排数称为行，竖着的一排数称为列，行列式由此得名。行列式中的每一个数称为元素，用a_{ij}表示，i表示行号，j表示列号。

例1.1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 3x_1-x_2=-2 \end{cases}$$

解

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1+4=3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-2-3=-5$$

所以 $x_1=\frac{3}{-7}=-\frac{3}{7}$，$x_2=\frac{-5}{-7}=\frac{5}{7}$ 是方程组的解。

例1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-7x_2+5x_3=-1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=10-12+7+56+5+3=69\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix}=69$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=23$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}=-23$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{69}{69}=1$ $\qquad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{23}{69}=\dfrac{1}{3}$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-23}{69}=-\frac{1}{3}$$

是方程组的解。

在实际问题中所要解的方程组，其方程个数往往不是两个、三个，未知数个数也不止两个、三个，而是十几个、几十个，因而要考虑n元线性方程组的求解问题。

（二）n阶行列式

为了给出n阶行列式的定义，需先介绍排列的逆序数概念。

1．排列的逆序数

定义 由数1，2……n组成的一个有序数组称为一个n级排列。

例如，52431是一个5级排列；645312是一个6级排列。

显然，由n个数组成的所有n级排列共有n！个。在n！个n级排列中，1，2，3……n是唯一的一个按自然数顺序排成的n级排列，通常称此排列为n级标准排列。

例如，由1，2，3组成的所有3级排列共有3！＝6个，即

123，132，213，231，312，321。

定义 在一个排列中，与自然数顺序相反的一对数构成一个逆序。排列中逆序的总和称为该排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数（包括0）的排列为偶排列。

设排列为$i_1i_2\cdots i_n$，其逆序数记为$N(i_1i_2\cdots i_n)$。例如排列23154中，共$N(23154)=3$。上述1，2，3构成的各种排列中

123，231，312 为偶排列。

132 213 321 为奇排列。

定义 把排列$i_1i_2\cdots i_n$中某两个数的位置互换，而其余数不动，则称在排列$i_1i_2\cdots i_n$中经过了一次对换。

例如，对排列21354施以（1，4）对换后得到排列24351。

定理1.1 排列经过一次对换，其奇偶性改变。

证明 （1）先证一种特殊情况：对换排列中相邻的两个数

$$AijB \xrightarrow{(i,\ j)} AjiB$$

其中A，B为排列中其余部分，经过$(i,\ j)$一次对换后，显然A，B中数码次序没有变，并且i，j与A，B中数码的次序也没有变，仅仅改变了i，j的次序，因此，当$i<j$时原排列将增加一个逆序，而当$i>j$时原排列将减少一个逆序，所以它们的奇偶性相反。

（2）一般情况：设排列

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB \xrightarrow{(i,\ j)} Ajk_1k_2\cdots k_siB$$

由 $$Aik_1k_2\cdots k_sjB \xrightarrow{(i,k_1)} Ak_1ik_2\cdots k_sjB \xrightarrow{(i,\ k_2)}$$

$$Ak_1k_2ik_3\cdots k_sjB \longrightarrow \cdots\cdots \xrightarrow{(i\ k_s)} Ak_1k_2\cdots k_sijB$$

又由 $$Ak_1k_2\cdots k_sijB \xrightarrow{(i,\ j)} Ak_1k_2\cdots k_sjiB \xrightarrow{(k_s,j)}$$

$$Ak_1k_2\cdots jk_siB \longrightarrow \cdots \xrightarrow{(k_1,j)} Ajk_1k_2\cdots k_siB$$

由上述变换可知，从排列$Aik_1k_2\cdots k_sjB$到排列$Ajk_1k_2\cdots k_siB$共进行了（2S+1）次相邻两数的对换，由（1）的结论可知它改变了排列的奇偶性，即它与原排列的奇偶性相反。

2．n阶行列式定义

根据前面的讨论，将二阶、三阶行列式在结构上的规律性加以推广并列表如下：

阶数＼规律性	含元素的个数	展开式中的项数	每项中含因子个数	每项中因子的位置特征	带“+”号“−”号的项数	各项前的“+−”号特征
二阶行列式	$4=2^2$	$2=2!$	2	每行每列有一个且只有一个	各占$\frac{2!}{2}$	各项中因子的行下标按自然数顺序排列时，其列下标组成的排列为偶排列时，该项为“+”，为奇排列时，该项为“−”。
三阶行列式	3^2	$3!$	3	同上	各占$\frac{3!}{2}$	同上
n阶行列式	n^2	$n!$	n	同上	各占$\frac{n!}{2}$	同上

定义　由n^2个数a_{ij}（$i, j=1, 2, \cdots\cdots n$）所构成的和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdots\cdots a_{nj_n}$$

称为n阶行列式

并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1j_2\cdots j_n$是各项列下标排列，它是自然数1，2…n的一个n级排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对n！个n级排列求和。

例1.3　判断下列各项是否四阶行列式中的项

①$a_{11}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{41}$；　②$a_{11}\ a_{23}\ a_{34}$；

③$a_{11}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{42}\ a_{23}$；　④$a_{12}\ a_{43}\ a_{31}\ a_{24}$

解　①含有两个第一列的元素a_{11}和a_{41}，因而不是四阶行列式中的项。

②只有三个因子，不是四阶行列式的项

③有五个因子，不是四阶行列式的项

④是位于行列式中不同行不同列的四个元素所组成的乘积，因而是四阶行列式的项。将行下标按自然数顺序排列为$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，其列下标2413的逆序数N（2413）＝3，因而应取负号。

二　行列式的性质

为简化行列式的计算，需要研究行列式的一些性质。

定义　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

将D中行与列互换，得

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

则称D′为D的转置行列式。

性质1 行列式D和它的转置行列式D′相等。

性质1说明：在行列式中行与列的地位是对称的，因此凡是有关行的性质，对于列也成立。

定义 满足条件$a_{ij}=0$（$i \neq j$, i，j＝1，2，……n）的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为对角线行列式。

满足条件$aij=0$（$i>j$，i，j＝1，2，…，n）的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为上三角形行列式。

满足条件$a_{ij}=0$ （$i<j$，i，j＝1，2，…，n）的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为下三角形行列式。

对角线行列式、上三角形行列式、下三角形行列式的值均为主对角线（从左上角到右下角的对角线）上元素的乘积。

性质2 互换行列式D的两行（列），行列式改变符号，即

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ (\text{第}i\text{行}) \\ \\ (\text{第}j\text{行}) \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
=-\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ (\text{第}i\text{行}) \\ \\ (\text{第}j\text{行}) \\ \\ \\
\end{array}
$$

性质3　如果行列式两行（列）的对应元素相等，则行列式等于零。

性质4　如果行列式有一行（列）元素全为零，则行列式等于零。

性质5　如果行列式某一行（列）元素同乘以数K，则等于以K乘该行列式，即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=k\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

性质6　如果行列式中有两行（列）对应元素成比例，则行列式等于零，即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}=0
$$

性质7　如果行列式D的第i行（列）每个元素都可以表示成两个数的和，则行列式D可以分成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为第i行（列）的对应元素，其余各行（列）元素与D相同，即

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

这个性质可以推广到行列式某一行（列）元素是多个数和的情形。

例1.4　计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 210 & 102 & -99 \end{vmatrix}$

解
$$
\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 201 & 102 & -99 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 200+1 & 100+2 & -100+1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 200 & 100 & -100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=100\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=0+(-18)=-18
$$

性质8　如果行列式某一行（列）的各元素乘以同一个数后加到另一行（列）的对应元素上，则行列式不变，即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ （第i行） \\ \\ （第j行） \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

例1.5 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解　对于阶数一定的行列式，一般利用行列式的性质把它转化为上、下三角形行列式计算。

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}=-14$$

为了说明方便，以下规定，在等号上面的记号ⓘ+kⓙ表示以数k乘第j列各元素后加到第i列的各对应元素上去；在等号下面的记号ⓘ+kⓙ表示以数k乘第ⓙ行各元素后加到第ⓘ行的各对应元素上。

例1.6 证明

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$$

证明

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[③-①]{②-①}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2b & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$$

定义 满足条件$a_{ij}=a_{ji}$（i，j=1，2，…，n）的行列式称为对称行列式。满足条件$a_{ij}=-a_{ji}$（i，j=1，2，…，n）的行列式称为反对称行列式。

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ 为三阶对称行列式。

而 $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -3 & 0 & 8 \\ 9 & -8 & 0 \end{vmatrix}$ 为三阶反对称行列式。

可见，反对称行列式主对角线上的元素全为零。

三 行列式按行（列）展开

定义 在n（n>1）阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，将元素a_{ij}所在的第i行与第j列划去，剩下的元素按原来的顺序组成的n－1阶行列式称为元素a_{ij}的余子式。记为M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots\ a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots\cdots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots\cdots a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots\cdots a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\ a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}即