中学数学教学参考读物

排列和组合

翟宗蔭編著

中学数学教学参考讀物

排列和組合

翟宗蔭

上海教育出版社

一九六四年·上海

內容提要

本书主要是圍繞教材，有重点地讲清排列和組合的基础知識，并通过例題的分析揭示解題的規律。同时，在教材內容的基础上适当介紹有关有重复的排列、环状的排列等方面的知識。

本书闡述比較清楚，特别对概念、概念和运算之間的关系以及解題的規律等的揭示比較透彻，也注意結合教学中存在的主要問題。可供中学数学教师参考之用。

中学数学教学参考讀物

排 列 和 組 合

瞿 宗 蔭

上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
上海市书刊出版业营业許可証出090号
上海洪兴印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

开本：787×1092 1/32　印張：2 1/2　字数：52,000
1964年8月第1版　1964年8月第1次印刷
印数：1—46,000本

統一书号：7150·1534
定　　价：（八）0.22元

出版者的話

"中学数学教学参考讀物"丛书的編輯出版，目的在于帮助教师正确理解和掌握教材，以便在教学工作中能更好地貫彻执行少而精的原则，运用启发式的教学方法，提高教学质量.

这套讀物拟就中学数学課程中的一些专题进行編写．讀物的內容主要是，根据教学的目的和基本要求，結合当前教学实际，有重点地解釋教材，着重解釋清楚概念、揭示規律．并在这基础上，适当介紹一些与教材有关的內容.

这套讀物的編写还是一种新的尝試，我們希望讀者无論对要求或內容等方面多多提出宝貴的意見，以便不断提高这套讀物的质量.

目　录

前　言

数学是从事生产劳动和科学技术研究的一项重要工具．从排列和組合这部分內容的地位作用，也可以看到这一点．首先，在日常生产劳动中，很多方面要用到排列和組合的知識，例如，人力的安排、物資的調配等．其次，在进一步学习中需要用到排列和組合的知識，例如，学习二項式定理，或者进一步学习行列式、概率論、数理統計等．而概率論、数理統計在科学研究部門和工业部門都被广泛地应用着．第三，通过排列和組合这部分內容的学习，可以提高邏輯思維的能力．所以，无論从参加生产劳动或者进一步学习的需要来看，排列和組合的知識都是很重要的．

对于排列和組合，初学时常常会感到困难．首先，由于这部分內容新的概念較多，如元素、順序、排列、排列的种数、組合、組合的种数等，正确理解、灵活运用这些概念都是比較困难的．其次，由于排列和組合方面应用題的組成形式比較多，題目里的条件有时比較隐晦，而且得数又往往比較大，不便用直观的方法来檢驗，这就需要有較高的分析能力．这些都是产生困难的主要原因．

推导計算排列和組合的种数的公式，或者解有关排列和組合的应用問題时，經常要用到乘法．因此，如果能比較深刻地理解应用乘法来解的問題的实质，对学好排列和組合会有好处的．

下面我們先看一个用乘法来解的例子.

从甲村到丙村必須經过乙村. 已知从甲村到乙村有 3 种走法，从乙村到丙村有 2 种走法. 从甲村到丙村共有多少种走法？(图 1)

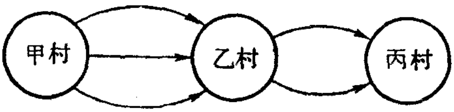

图 1

这里，从甲村到乙村有 3 种走法，在这 3 种走法里每选定一种走法到达乙村后，再由乙村到丙村又有 2 种走法. 所以从甲村到丙村共有 $3\times2=6$ 种走法.

从这个例子可以推得下面的結論：

如果要完成事件 A，必須依次連續地完成事件 A_1 和事件 A_2，完成事件 A_1 的方法有 a_1 种，而不論用哪一种方法完成 A_1 后，再去完成事件 A_2 都有 a_2 种方法，那末完成事件 A 的方法就有 $(a_1\times a_2)$ 种.

这种計算方法，对必須依次連續地完成的事件多于两种(有限个)的情况也是适用的. 我們可以看下面的例子：

一个学生要从 2 本不同的政治书、3 本不同的文艺书、2 本不同的科技书里各选取 1 本，共有多少种不同的选法？

要完成从这三类书里面各选取 1 本这一事件 A，必須依次完成选取一本政治书（事件 A_1）、选取一本文艺书（事件 A_2）和选取一本科技书（事件 A_3）这三个事件. 完成事件 A_1 的方法有 2 种，而不論用哪一种方法完成事件 A_1 后，再去完成事件 A_2 都有 3 种方法，所以，連續完成事件 A_1 和 A_2 就有 (2×3) 种方法；不論用哪一种方法連續完成事件 A_1 和 A_2 后，

再去完成事件 A_3 又都有 2 种方法，因此，完成从这三类书里面各选取一本这一事件 A 就有 $2\times3\times2=12$ 种方法.

为了进一步理解为什么应用乘法，可以用 A、B 代替 2 本政治书，用 a、b、c 代替 3 本文艺书，用 I、II 代替 2 本科技书，这里，选取一本政治书的方法有 2 种，就是：选 A 和选 B；而选好一本政治书以后再选取一本文艺书的方法有 3 种，就是：选 a、选 b 和选 c，所以，选取一本政治书、一本文艺书的方法就有 $2\times3=6$ 种. 就是：

$$Aa;\ Ab;\ Ac;\ Ba;\ Bb;\ Bc.$$

同理可以說明选取一本政治书、一本文艺书、一本科技书的方法共有 $6\times2=12$ 种. 就是：

$$AaI;\quad AbI;\quad AcI;\quad BaI;\quad BbI;\quad BcI;$$
$$AaII;\ AbII;\ AcII;\ BaII;\ BbII;\ BcII.$$

上面这个解法的思考过程如果用下面的图表表示出来，就可以更清楚地看出为什么要用乘法来計算了.

$$A - \begin{cases} Aa - \begin{cases} AaI \\ AaII \end{cases} \\ Ab - \begin{cases} AbI \\ AbII \end{cases} \\ Ac - \begin{cases} AcI \\ AcII \end{cases} \end{cases}$$

$$B - \begin{cases} Ba - \begin{cases} BaI \\ BaII \end{cases} \\ Bb - \begin{cases} BbI \\ BbII \end{cases} \\ Bc - \begin{cases} BcI \\ BcII \end{cases} \end{cases}$$

$$2 \qquad 2\times3 \qquad 2\times3\times2=12$$

在研究排列和組合以前，如果能够思考几个象上面两个例子那样的题目，将有助于掌握应用乘法来解的問題的实质，也将有助于以后推导排列、組合的种数的計算公式，解有关排列、組合的应用問題.

一 排列和組合的基本内容

(一) 排　列

排列的这一部分内容,主要包括三个方面:一是排列的定义;二是計算排列种数的公式;三是解应用問題. 現行高中代数課本里,先从分析具体例子出发,概括、抽象出排列的定义,并根据排列的定义說明区分不同的排列的方法; 然后解釋排列的种数的意义和引进表示排列的种数的符号 A_m^n、P_m, 并推导出計算 A_m^n、P_m 的公式; 最后举例說明怎样应用排列的知識来解应用問題. 下面就从这几个方面来研究.

1. 排列的定义 研究"排列"这个概念,不宜于从它的定义出发,而应当通过具体例子的分析,概括、抽象出这个概念的本质属性,从而得出它的定义. 这对我們正确理解"排列"这个概念是有好处的. 下面我們来看怎样利用两个例子来引出"排列"的概念.

例 1 从 3 位先进工作者張、王、李里面,选出一个人当組长,一个人当副組长,可以有几种选法?

从張、王、李三个人里面选一个人当組长的方法有 3 种,而不論选誰当組长后, 再选另一个人当副組长的方法就都有 2 种, 例如选張当組长后再选一个人当副組长的方法有 2 种,就是选王或者选李;所以,选一个人当組长,一个人当副組长的方法共有 $3\times2=6$ 种.

为了清楚地說明問題起見，我們可以把这些选法列成下表：

組　长：	張	張	王	王	李	李
副組长：	王	李	張	李	張	王

从表里可以看出，第一个选法和第三个选法，选出的两个人是一样的，但是指定他們担任的职务却不同．第一个选法是选張当組长，而选王当副組长；第三个选法是选王当組长，而选張当副組长，所以这是两种不同的选法．这一点反映在表上，就是他們的摆列的順序不一样：張，王和王，張．同理可以說明第二个选法和第五个选法是两种不同的选法，就是：張，李和李，張；第四个选法和第六个选法也是两种不同的选法，就是：王，李和李，王．如果我們把当組长的姓写在前面，当副組长的姓写在后面，那末这 6 种选法就是：

張王，張李，王張，王李，李張，李王．

例 2 从三个不同的数字 4、7、9 里，每次取出两个不同的数字排列起来，一共可以組成多少个两位数？

从三个不同的数字里选出一个数字排在十位上有 3 种方法，每次选定了一个数字排在十位上后，再选一个数字排在个位上就有 2 种方法，所以可以組成 $3\times2=6$ 个两位数．就是：

47，49，74，79，94，97．

上面两个例子所研究的事物是不同的，例 1 是張、王、李 3 个人，例 2 是 4、7、9 三个数字（以后我們都統称为元素）；它們所研究的問題也不一样，例 1 是要知道不同的选法有几种，例 2 是要知道不同的两位数有几个．但是，我們可以看到，这两个問題有共同的特点，实质上，它們都是研究“从 3 个不同的元素里，每次取出 2 个不同的元素，按照一定的順序摆

成一排，一共有多少种不同的摆法？”“从 3 个不同的元素里，每次取出 2 个不同的元素，按照一定的順序摆成一排”，对例 1 来説，就是表示“从 3 个人里，每次选出 2 个人，1 个人当組长，1 个人当副組长”的一种选法；对例 2 来説，就是表示“从三个不同的数字里，每次取出两个不同的数字組成两位数”的一个两位数．而且“从 3 个元素里每次取出 2 个元素，按照一定的順序摆成一排”还可以在其他实际問題里得到它的具体內容．

上面的“3 个”和“2 个”在实际中还可以推广到“m 个”和“n 个”，一般地說：

从 m 个元素里，每次取出 n 个元素，按照一定的順序摆成一排，叫做从 m 个元素里每次取出 n 个元素的**排列**.

根据排列的定义，在例 1 里的每一种选法，在例 2 里的每一个两位数，都是从 3 个元素里取 2 个元素的一个排列．

上面的排列的定义，其中 m 个元素、n 个元素都不一定是各不相同的．而在这一部分里，我們只研究从 m 个各不相同的元素里每次取出 n 个 $(1\leqq n\leqq m)$ 各不相同的元素的排列，以后所說的从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列，都是指这样的排列．

从 m 个元素里每次取出 n 个元素得到一个排列，根据排列的定义，必須完成以下两点：

(1) 要取出 n 个元素；

(2) 要按照一定順序摆成一排．

因此，如果两种排列所含的元素不完全一样，那末就是不同的排列；如果两种排列所含的元素虽然完全一样，但摆的順序不同，那末也是不同的排列．只有当两个排列的元素完全

一样，并且所摆的顺序又完全相同，这两个排列才是相同的排列．例如，排列 79 和排列 74 是两个不同的排列，排列 47 和排列 74 也是两个不同的排列；而排列 47 和排列 47 是两个相同的排列．

上面定义的排列里，如果 $m>n$，这样的排列就叫做**选排列**．例 1 和例 2 都是选排列的問題．如果 $m=n$，这样的排列（也就是每次取出所有元素的排列）就叫做**全排列**．全排列所有不同的排列含有的元素完全一样，只是元素排列的顺序不完全相同．

下面我們来討論有关选排列和全排列的問題．

2．計算排列的种数

1．符号 A_m^n、P_m　从 3 个不相同的元素 a、b、c 里，每次取出 2 个不相同的元素的所有不同的排列有 6 种：ab，ac，ba，bc，ca，cb．也就是說，从 3 个不相同的元素里，每次取出 2 个不相同的元素的所有不同的排列的种数是 6．

从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有不同的选排列的种数，通常用符号 A_m^n 表示．

A_m^n 是一个数，是从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有的排列的种数．必須注意，要把它和“排列”区分清楚，而且也要把它和“从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有不同的排列”区分清楚．例如，从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的排列是指“从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素，按照一定的順序摆成一排”这一事件；从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的所有不同的排列是 ab，ac，ba，bc，ca，cb，而 A_3^2 是从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的所有不同的排列的种数，$A_3^2=6$，就是 A_3^2 表示数 6．当然，如果能够把从

3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素所有不同的排列都写出来，也就知道 $A_3^2=6$ 了.

m 个元素所有的全排列的种数，通常用符号 P_m 表示，就是 $P_m=A_m^m$.

2. 写出所有不同的排列的方法　在实际工作中常常要求写出某个排列問題里所有不同的排列，所以必須学会怎样写. 而且这对推导計算排列的种数 A_m^n 的公式也有帮助.

写出某个排列問題里所有不同的排列，必須做到不重复和不遺漏. 如果不掌握写的方法，常常不能达到这个要求. 例如，要我們写出从 4 个元素 a、b、c、d 里每次取出 3 个元素的所有不同的排列，怎样写才能做到不重复也不遺漏呢? 关于这一点，我們从外文字典的排法和查法可以得到启发. 写出这样的一个排列要从左到右順次写出三个元素，第一个位置上的元素的写法有 4 种，即 a、b、c、d; 每次把第一个位置上的元素写好后，第二个位置上的元素的写法就只有 3 种. 例如，第一个位置上写的是元素 b，那末第二个位置上就只能写元素 a、c、d 三种情况，即 ba, bc, bd. 第一个、第二个位置上的元素写好后，第三个位置上的元素的写法只有 2 种. 把上面这个过程列出表来，可以比較清楚地看出写的方法.

$$a\left\{\begin{array}{l} ab\text{——}\left\{\begin{array}{l} abc\\ abd\end{array}\right.\\[2ex] ac\text{——}\left\{\begin{array}{l} acb\\ acd\end{array}\right.\\[2ex] ad\text{——}\left\{\begin{array}{l} adb\\ adc\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad b\left\{\begin{array}{l} ba\text{——}\left\{\begin{array}{l} bac\\ bad\end{array}\right.\\[2ex] bc\text{——}\left\{\begin{array}{l} bca\\ bcd\end{array}\right.\\[2ex] bd\text{——}\left\{\begin{array}{l} bda\\ bdc\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$
c\begin{cases} ca\text{——}\begin{cases} cab \\ cad \end{cases} \\ cb\text{——}\begin{cases} cba \\ cbd \end{cases} \\ cd\text{——}\begin{cases} cda \\ cdb \end{cases} \end{cases}
\qquad
d\begin{cases} da\text{——}\begin{cases} dab \\ dac \end{cases} \\ db\text{——}\begin{cases} dba \\ dbc \end{cases} \\ dc\text{——}\begin{cases} dca \\ dcb \end{cases} \end{cases}
$$

上表的最右边的 $4\times3\times2=24$ 个排列，就是要求写出的所有的排列．首先，这样写不会有遗漏，因为任意一个合乎题意的排列，都可以用查字典的方法在所写的排列里找到．其次，最后写出的 24 个排列里不会有相同的，也就是这样写不会有重复．例如，第一个位置上是 a 的 6 个排列和其他的 18 个排列，第一个位置上的元素就不相同，而第一个位置上是 a 的6个排列里，开头是 ab 的两个排列和开头是 ac、ad 的 4 个排列，第二个位置上的元素又不相同，开头是 ab 的 2 个排列，第三个位置上的元素又不相同．

如果能够把从 4 个元素里每次取出 3 个元素的所有不同的排列写出来，就很容易計算出 $A_4^3=4\times3\times2=24$ 了．

同样，我們可以写出全排列的所有不同的排列．

3．計算 A_m^n、P_m 的公式　首先，我們来研究怎样推导 A_m^n 的公式．

上面虽然介紹了写出从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有不同的排列的方法，但是当 m 和 n 比較大的时候，要把所有不同的排列都写出来是很困难的．例如，从 11 个不同的元素里，每次取出 10 个不同的元素的所有不同的排列有 39,916,800 种．这么多的排列，不可能在短时間內把它們写

出来. 而在一般情况下，常常只要求我們計算出所有不同的排列的种数，却不要求写出所有的排列来. 所以推导計算 A_m^n 的公式，就十分必要了.

現行代数課本里推导計算 A_m^n 的公式是按照以下步驟进行的:

(1) 当 $n=1$ 时，很明显的，$A_m^1=m$.

(2) 当 $n=2$ 时，因为 $A_m^1=m$，把从 m 个元素里每次取出 1 个元素所有不同的排列写成 m 列，然后在每一种这样的排列的后边，写上其余的 $(m-1)$ 个元素里的每 1 个元素，就得到 $(m-1)$ 种从 m 个元素每次取出 2 个元素的排列，所以 m 列就一共可以得到 $m(m-1)$ 个排列. 就是:

$$A_m^2=m(m-1).$$

(3) 当 $n=3$ 时，把上面 $n=2$ 时的 $m(m-1)$ 个排列写成 $m(m-1)$ 列，然后在每一种这样的排列的后边，写上其余的 $(m-2)$ 个元素里的每 1 个元素，就得到 $(m-2)$ 种从 m 个元素里每次取出 3 个元素的排列，所以 $m(m-1)$ 列就一共可以得到 $m(m-1)(m-2)$ 个排列. 就是:

$$A_m^3=[m(m-1)](m-2)=m(m-1)(m-2).$$

………………………………………………………

因此，一般地說:

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1).$$

这种推导方法是不完全归納法. (在学生学过数学归納法后，这个公式可以用数学归納法来証明.) 在研究这个公式时，我們不能满足于能够記住公式，而更重要的要理解这种推导的思考方法. 这不仅对以后解应用題有好处，就是对記忆公式也有好处. 所以在这个公式推导出来以后，应当想一想:

(1)为什么要用乘法？(2)为什么要有 n 个因数相乘？(3)为什么第一个因数是 m，第二个因数是 $m-1$……第 n 个因数是 $m-n+1$？

計算 P_m 的公式可以从計算 A_m^n 的公式里使 $n=m$ 而导出．就是：

$$P_m=A_m^m=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots2\cdot1.$$

这里需要引进阶乘这个概念，就是自然数 1 到 m 的乘积 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(m-2)(m-1)m$，通常用 $m!$（或者 $\underline{|m}$）表示，讀做"m 的阶乘"．这就有 $P_m=m!$．

4．有关的計算問題

(1) 有关 A_m^n 的計算公式的問題　計算 A_m^n 的公式并不复杂，但是，要在应用这个公式时，做到运算正确而熟练，需要一个练习的过程．現行代数課本里安排了一定数量的計算題、証明題和解方程方面的題目，目的就是通过练习使学生能够熟练地应用公式．这是学好排列这部分內容的重要的一环，值得重視．

从公式 $A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$ 的推导中可以知道，乘积 $m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$ 有以下三个特点：一是第一个因数是 m，后面的每个因数都比它前面的一个因数少 1；二是一共有 n 个因数；三是最后一个因数是 $m-n+1$． 106

应用这公式时容易发生錯誤的地方是后面两个特点，就是往往多写或少写了相乘的因数，和写錯了最后一个因数 $m-n+1$．特别是当"m"、"n"比較复杂的时候，例如 A_{k+1}^{k-1}、A_{k-1}^{k-4}、A_{n+5}^{n+2}，最容易把最后一个因式写錯．另外，当 n 是一个比較小的数目的时候，只要应用前面两个特点就可以很快地