数学700题选 上册

〔日〕木村勇三　等编

科学普及出版社

数 学 700 题 选

上 册

〔日〕 木村勇三 大竹 登 大西 安
岩濑重雄 冈东弥彦 奥村夏美 编

孙淑琴
杨培根 译

吕吉庆 校

科学普及出版社

内 容 提 要

这是一本包括中学数学重要内容（数与式、方程与不等式、函数及图象、三角函数、平面图形与方程、向量、概率、集合与逻辑等）的参考书。它不同于一般题解的书。本书编写强调系统性，在每节之前，编者对本单元的内容都列有要点，对所选的例题都示以思路和解题关键。这就能够帮助读者掌握学习重点，学会解题思路和方法。本书对于中学学生和自学青年，可以起到辅导作用；对于中学数学教师，它也是得力的助手。

数学700题选

上册

〔日〕 木村勇三 大竹 登 大西 安 岩濑重雄 冈东弥彦 奥村夏美 编

孙淑琴 杨培根 译

吕吉庆 校

责任编辑：吴之静 颜 实

封面设计：王序德

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

朝 阳 六 六 七 厂 印 刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：13$^3/_8$ 字数：295 千字

1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷

印数：1—93,000册 定价：1.95元

统一书号：13051·1309 本社书号：0483

前　　言

学了一遍数学教科书的人，当进入考场解高考试题时，恐怕会有心中无底之感．要想做到得心应手，我们认为，最好是再学习这样一本参考书：该书大量收集高考的各种类型试题、预试题、独创题等，将这些题分门别类地编成若干章、节，并总结出解题所必需的基本知识和重点内容．每节中都列举一代表性例题，那些不便归类而具有特殊风格的问题，则作为综合习题处理．

基于上述想法，我们首先编写了《700选辑》一书．值得高兴的是，这本书受到了广大读者的热烈欢迎，使我们深受鼓舞．于是，我们又按照现行的教育大纲（1973年实施），以新的构思，重编了《数学700题选》．在这次编写过程中，更侧重于精选习题，提高质量，合理布局等问题．特别是为了适应1979年起开始实行的国立大学通考的需要，进行了较大的修改．

《数学700题选》有如下几个特点：

1．章、节的划分和编排尽量注意由易到难．解题，原则上不提前使用后面章、节的内容，但非用不可时，则加以注明．

2．章内分节，各节包括要点、例题和习题三部分，章末列有综合习题．例题、习题和综合习题统一编号，共计

700 题．书末还附有五次测验题。

3．关于书中各项内容标题的说明．

要点 每节开头都列有要点．要点中叙述了本节的基本内容和重点内容，这不是单纯的定理与公式之罗列，而是提供了重要的解题思路与技巧．

解释 对上述要点进行解释、补充和详细说明，并谈及了要点与其它内容的联系。

例题 每五、六题中有一例题，例题具有广泛而鲜明的代表性。

思路 示出了在充分审题之后，形成解题步骤的思考方法。

解 示出了根据思路进行解答的范例．

关键 在于将该例题、解法的重点、主要技巧、方法等，推而广之用于解其它问题．

第二种解法 这是为让读者体会毫无束缚地大胆思考是可以得出理想答案的，并望读者自己努力探索更多的其它解法。

习题 这不仅包括历届高考题中的好题，还有大量的独创题．标有＊号者为本书中最复杂的难题．

综合习题 甚至包括跨节性的习题和高考中最尖端的问题。

提示 指出解题的要点。

测验题 共有五次，每次五题．前三次是针对解国立大学通考题的，后两次是一般类型题．规定每次解测验题的时间为 90～120 分钟，如果解题时间缩短了，则表明解题者能力的提高．

希望选学本书的读者，最好能独立思考，自行解题．若

时间充裕，应首先理解要点，解例题和无*号习题，待解题能力有所提高后，再着手去解带*号习题和综合习题．倘若时间紧迫，也可以在理解的基础上，边看习题，边看解答．当然还可以只选择自己的薄弱环节进行学习．总之，望能根据自己的实际水平和时间，合理地学习这本书．

编　者

目　　录

第一章　数与式……………………………………………1
一　整式的计算……………………………………………1
二　整式的除法……………………………………………5
三　因式分解………………………………………………13
四　约数和倍数……………………………………………26
五　分式及比例式…………………………………………42
六　有理数、无理数与无理式……………………………60
七　复数……………………………………………………74
八　恒等式…………………………………………………81
综合习题……………………………………………………88
第二章　方程与不等式……………………………………91
一　一元一次和一元二次方程……………………………91
二　高次方程………………………………………………107
三　联立方程………………………………………………119
四　方程应用题……………………………………………124
五　等式的证明……………………………………………128
六　不等式的解法…………………………………………132
七　不等式的证明…………………………………………145
综合习题……………………………………………………156
第三章　函数及其图象……………………………………158

一　一次函数的图象……………………………… 158
二　二次函数的图象……………………………… 162
三　分数函数的图象……………………………… 167
四　函数的最大和最小…………………………… 172
五　函数图象的应用……………………………… 185
六　映射与函数…………………………………… 193
七　无理函数的图象……………………………… 208
八　指数函数……………………………………… 212
九　对数函数……………………………………… 217
十　指数函数与对数函数的应用………………… 223
综合习题…………………………………………… 231
第四章　三角函数………………………………… 236
一　三角函数的计算……………………………… 236
二　三角函数的图象……………………………… 241
三　三角函数和方程式、不等式………………… 246
四　直角三角形的三角函数……………………… 254
五　正弦定理、余弦定理………………………… 258
六　三角形的面积和图形问题…………………… 263
综合习题…………………………………………… 275
第五章　平面图形和方程………………………… 277
一　点的座标……………………………………… 277
二　直线的方程式………………………………… 284
三　圆的方程……………………………………… 293
四　其它二次曲线………………………………… 303
五　轨迹…………………………………………… 314
六　不等式和区域………………………………… 326
综合习题…………………………………………… 331

第六章　向量……………………………………………… 337
一　向量及其运算……………………………………… 337
二　位置向量…………………………………………… 342
三　向量的分量和运算………………………………… 348
四　向量方程…………………………………………… 358
五　向量在图形上的应用……………………………… 368
综合习题………………………………………………… 379
第七章　概率……………………………………………… 381
一　事件的个数………………………………………… 381
二　排列………………………………………………… 384
三　组合………………………………………………… 392
四　概率的定义………………………………………… 400
五　概率的计算………………………………………… 404
综合习题………………………………………………… 418

第一章　数与式

一　整式的计算

1. 计算的基本定律

数和式的计算中利用下列定律：

（1）交换律　加法 $a+b=b+a$　　乘法 $ab=ba$

（2）结合律　加法 $a+(b+c)=(a+b)+c$

乘法 $a(bc)=(ab)c$

（3）分配律　$a(b+c)=ab+ac$

（4）指数律　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，

$(ab)^n=a^nb^n$

2. 乘法公式

（1）$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

（2）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$（复号顺序相同）

（3）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

（4）$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

（5）$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

（6）$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$

$+(ab+bc+ca)x+abc$

（7） $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$[= a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)]$ （复号顺序相同）

（8） $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ （复号顺序相同）

（9） $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

【解释】

1．乘法公式很少单独使用，经常是几个公式反复地组合使用．例如，设$a + b = A$，则

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (A + c)^2 = A^2 + 2Ac + c^2 \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{\text{平方和}} + 2(\underbrace{ab + bc + ac}_{\text{每两个数乘积之和}}).\end{aligned}$$

2．有时运用乘法公式，将式子作如下变换：

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

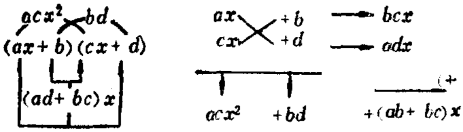
$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}[(a + b)^2 + (a - b)^2]$$

$$ab = \frac{1}{4}[(a + b)^2 - (a - b)^2]$$

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$$

$$abc = \frac{1}{3}[a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)]$$

3．$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ 这个式子，如果象下面这样考虑，就能立即写出来：



【例题 1】（整式的值）

$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=2$，$a^3+b^3+c^3=3$，试求下列各式的值：

（1）$ab+bc+ca$，（2）$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$，（3）abc。

【思路】

（1）试考虑$(a+b+c)^2$的展开式。

（2）原式$=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$，试变换成$a^2(b+c)=a^2(a+b+c)-a^3$等形式。

（3）利用$(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]=a^3+b^3+c^3$。

【解】

（1）$ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]$

$=-\frac{1}{2}$。

（2）原式

$$\begin{aligned}&=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\\&=a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)\\&\qquad+c^2(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)\\&=-1。\end{aligned}$$

（3）$abc=\frac{1}{3}[a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)]$成立，故将给出的整式值及（1）的结果代入上式就得到

$$abc=\frac{1}{3}\left\{3-1\times\left[2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}=\frac{1}{6}.$$

【关键】 下列等式经常使用，因此要牢牢记住：

$$(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca).$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)].$$

【第二种解法】

$$\begin{aligned}&ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\\&=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)\\&\quad-3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc.\end{aligned}$$

成立．若已知式子左边的值〔（2）的结果〕和（1）的结果，就可以求出 abc 的值．若求出了 abc 的值，就可以根据 abc 的值与（1）的结果求出（2）的值（左边的值）．此外，也可以运用下列等式来解算：

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]+6abc.$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]=3abc.$$

习　题

2．化简下列各式

（1） $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$．

（2） $(a+b+c-d)(a+b-c+d)+(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$，

（3） $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$．

3. 填空

（1） $(7x^3+12x^2-4x-3)(x^5+3x^3+2x^2-5)$ 的展开式中，x^5的系数是____，x^3的系数是____。

（2） $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)^4$ 的展开式中，x^3 的系数是____，x^4 的系数是____。

4. （1） 设 $x+\frac{1}{x}=a$，试用 a 表示下列各式：

$$\text{(i)}\ x^2+\frac{1}{x^2},\quad \text{(ii)}\ x^3+\frac{1}{x^3},\quad \text{(iii)}\ x^4+\frac{1}{x^4}.$$

（2） 当 $x+y+z=7$，$xy+yz+zx=14$，$xyz=8$时，求下列各式的值：

(i) $x^2+y^2+z^2$，　　(ii) $x^3+y^3+z^3$，

(iii) $(x+y)(y+z)(z+x)$，　　(iv) $y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2$.

【提示】

2. （1） 把各项展开。

（2） 部分地归纳成 $a+b=A$，$a-b=B$，$c+d=C$，$c-d=D$等形式来提高运算效率。

（3） 因为四个括号内的字母能完全对等处理，所以试对一个括号内的字母进行整理，或是运用 $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$。

3. （2） 省略 5 次方以上的项，进行平方，并省略结果中 5 次方以上的项，再进行平方，再省略结果中 5 次方以上的项。

二　整式的除法

1. 商式与余式

设整式A除以整式B，得到商式Q，余式R，则以下恒等式成立：

$$A=B\cdot Q+R\ （R比B的次数低）$$

当$R=0$时，就说A被B整除。

2. 余数定理

x的整式$f(x)$除以x的一次式$x-\alpha$时，余式R为常数，则

$$R=f(\alpha)$$

成立。

并且，$f(x)$除以x的一次式$ax+b$时，余式R是常数，则

$$R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

成立。

【解释】

1. 商式和余式的求法　例如，$A=x^3-4x+20$除以$B=x^2-x+1$时，

（1）直接计算法：

$$\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\ \hline
x^2-x+1 & x^3\qquad -4x+20 \\
 & x^3-x^2+x \\ \cline{2-2}
 & \quad x^2-5x+20 \\
 & \quad x^2-\ x\ +1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad -4x+19
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & & \\ \hline
1-1\quad 1 & 1 & 0 & -4 & 20 \\
 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline
 & & 1 & -5 & 20 \\
 & & 1 & -1 & 1 \\ \hline
 & & & -4 & 19
\end{array}$$

因此，商式是$x+1$，余式是$-4x+19$。

（2）利用恒等式性质（见第一章 八、恒等式）的方法：设商式为Q，余式为R，则有

$$A = B \cdot Q + R \quad (R\text{比}B\text{的次数低})$$

A 是三次式，B 是二次式，所以 Q 是一次式，R 是一次以下的整式。

设 $Q = ax + b$，$R = cx + d$，则

$$B \cdot Q + R = (x^2 - x + 1)(ax + b) + cx + d$$
$$= ax^3 + (-a + b)x^2 + (a - b + c)x + b + d$$

该式与 A 相等，故比较系数，得到

$$a = 1, \ -a + b = 0, \ a - b + c = -4, \quad b + d = 20$$

解这个联立方程组，得到

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -4, \quad d = 19,$$

所以商式是 $x + 1$，余式是 $-4x + 19$。

2. 余数定理的证明　x 的整式 $f(x)$ 除以 x 的一次式 $x - a$ 时，设商式为 $Q(x)$，余式为 R，R 是常数，故下列等式成立：

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

若只求商式，则以 a 代替上式的 x，得到

$$f(a) = (a - a)Q(a) + R = 0 \cdot Q(a) + R = R$$
$$\therefore R = f(a)$$

对 $f(x)$ 除以 $ax - b$ 时的余式，也可以同样来证明。按上述证明的结论除以 $x + a$，$ax + b$ 时的剩余，就是将 $x + a = 0$，$ax + b = 0$ 的解 $x = -a$，$x = -\dfrac{b}{a}$ 代入 $f(x)$，分别得到的是 $f(-a)$，$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$。

3. 综合除法　对于整式 $f(x)$ 除以一次式 $x - a$ 时的余式 R，余数定理给出明确的结果，但商式 $Q(x)$ 却不知道。现在设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 除以 $x - a$，得到商式 $Q(x)$

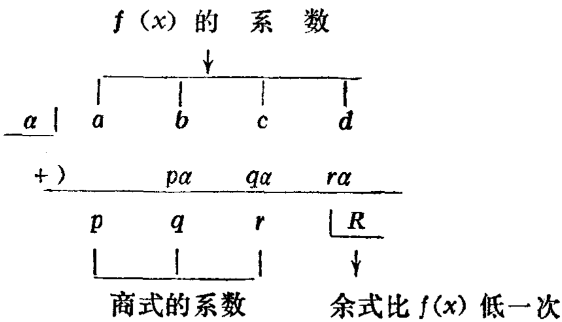
$=px^2+qx+r$，余式 R，则下式成立：

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(px^2+qx+r)+R$$
$$=px^3+(q-\alpha p)x^2+(r-\alpha q)x+R-r\alpha$$

故可知两边各项的系数有如下关系：

$$p=a,\qquad q=b+p\alpha$$
$$r=c+q\alpha,\qquad R=d+r\alpha$$

因此，根据$f(x)$的系数，求 $Q(x)$ 的系数和 R 的运算，可以归纳成下述步骤：



（1）将 $f(x)$ 的系数按降幂排列，缺项的系数为 0。

（2）将 $x-\alpha=0$ 的解 α 写在左上侧.

（3）将 a 拉下来，写作 p。

（4）将 p 与 α 的乘积 $p\alpha$ 写在 b 的下面，与 b 相加为 q。

（5）将 q 与 α 的乘积 $q\alpha$ 写在 c 的下面，与 c 相加为 r。

以下反复进行这种运算。

由上面的形式，就可以求出商式$Q(x)$和余式 R，这叫做综合除法。