中子碰撞几率方法及其应用

陈仁济 阮可强 著

原子能出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了中子碰撞几率方法及其在核反应堆物理方面的应用。首先阐述碰撞几率方法的理论基础，然后着重讲述中子首次碰撞几率的各种严格的和近似的计算以及碰撞几率方法的各种应用。全书共八章，即中子输运方程及其伴随方程，单体、多体和无限栅格的中子首次碰撞几率，粗网格碰撞几率法，响应矩阵法，中子逐次碰撞过程的瞬态分析和中子碰撞几率法的应用举例。书后附有中子碰撞几率和互屏因子的详细数值表。

本书可供从事核反应堆理论工作的科学工作者参考，也可供高等院校反应堆专业的师生阅读。

中子碰撞几率方法及其应用

陈仁济 阮可强 著

原子能出版社出版
(北京2108信箱)
国防科委印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本850×1168 1/32·印张16 1/8·字数434千字
1981年10月第一版·1981年10月第一次印刷
印数001—1000·统一书号：15175·317
定价：2.40元

序　　言

在非均匀核反应堆的物理设计中，必须仔细地考虑和精确地处理反应堆栅格的各种非均匀效应，碰撞几率方法是处理这类非均匀效应普遍采用的有效方法。它的优点是，中子的迁移和碰撞部分可从求解的问题中分离出来；不仅物理图象清晰，使用灵活，计算简易，而且精确性好。碰撞几率方法的基本概念建立于五十年代初，这种方法经过近三十年的发展，日趋成熟。本书的目的是系统地介绍这种方法及其在反应堆物理方面的应用。

全书共八章，即中子输运方程及其伴随方程，单体、多体和无限栅格的中子首次碰撞几率，粗网格碰撞几率法，响应矩阵法，中子逐次碰撞过程的瞬态分析和碰撞几率方法应用举例。本书着重介绍方法的应用以及中子首次碰撞几率的各种严格和近似计算。用 Z 变换法分析中子逐次碰撞的瞬变过程是新的尝试。对于各向异性散射的问题，严格处理只在第一章第五节中进行了讨论。为了保持碰撞几率方法的简易性，在其他章节中都以输运修正来考虑散射的各向异性效应。

阮可强同志撰写了本书第二章第六节的第3小节，第三章第九节，第四章第九节中带环形空隙燃料棒栅格的互屏因子的计算以及附录三和四，并审阅了全书。

完稿后，李尔康同志看阅了全书，提出了宝贵意见。此外，在本书编写过程中，黄祖洽同志看阅了第二章初稿，张连贵同志看阅了第一和第八章的部分初稿，分别提出了中肯的批评和宝贵的意见。赵世平同志帮助计算了附录二中的 $F(\Sigma_t r_1)$ 和 $G(\Sigma_t r_1)$ 数值表。在此对上述同志一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中一定有谬误和欠妥之处，衷心希望读者批评和指正。

陈仁济

1980年5月

目　录

第一章 中子输运方程及其伴随方程

这一章主要讲各种形式的中子输运方程及其伴随方程。利用角通量格林函数，将玻尔兹曼方程转换为角通量的积分输运方程及其离散形式——广义首次碰撞几率形式的积分输运方程。在中子发射和散射是各向同性的假设下，可进一步得到标通量的积分输运方程及其离散形式——首次碰撞几率形式的积分输运方程（或称第一类碰撞几率形式的积分输运方程）；散射的各向异性效应通过输运修正来考虑。首次碰撞几率形式的积分输运方程用于大系统时，会遇到计算上的困难，为了弥补这缺点，推导了第二类碰撞几率形式的积分输运方程。我们还导出了中子首次碰撞几率满足的四个基本互易关系式，并证明了它们对中子俘获几率同样适用。

这一章的后半部分，根据伴随算符的定义，得到了上述各种中子输运方程的伴随方程，并阐明了伴随函数的物理意义。

一、玻尔兹曼方程

根据德布罗意公式，微观粒子的约化波长为

$$\lambdabar=\frac{\hbar}{p}=\frac{h}{2\pi p} \tag{1.1}$$

式中，h 是普朗克常数，p 是粒子的动量。对于中子，上式变为

$$\lambdabar=\frac{4.55\times10^{-10}}{\sqrt{E}}\,\text{cm} \tag{1.2}$$

其中，E 是中子能量（eV）。若中子能量为 0.01eV——在反应堆内这是很低的中子能量——其约化波长为 4.55×10^{-9}cm。由于这样，在反应堆内，几乎所有中子的约化波长比固体中原子间距小

一个数量级，更远小于宏观尺度和中子平均自由程，因而可将中子看作点粒子；这意味着，中子可以用确定的位置和速度来描述。又由于在反应堆介质的任何体积内存在的中子数与原子数相比，少得可以忽略，因此，当研究中子在反应堆介质内扩散和输运时，完全可以不考虑中子间的相互碰撞。于是，我们能够象处理气体分子扩散和输运那样，处理中子的扩散和输运，基本的中子输运方程也称为玻尔兹曼方程。

现在从中子平衡原理出发，推导玻尔兹曼方程。设在时刻t，体积元dV内能量在E到（$E+dE$）之间，飞行方向在$\vec{\Omega}$到（$\vec{\Omega}+d\vec{\Omega}$）之间的中子数为$N(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)dVd\vec{\Omega}dE$。当时间从$t$增加到$(t+dt)$时，上述中子群中的一部分中子，由于与介质核碰撞，移出该中子群；与此同时，由于外中子源以及其他能量和飞行方向的中子与介质核碰撞，有一部分中子进入该中子群。

中子与介质核碰撞，从该中子群移出的中子数，就是在dt内与介质核发生碰撞的中子数。中子在dt内飞行了vdt距离，与介质发生碰撞的几率是$\Sigma_t(\vec{r},E)vdt$，于是，因与介质碰撞，从该中子群移出的中子数为

$$-N(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)\Sigma_t(\vec{r},E)vdVd\vec{\Omega}dEdt \tag{1.3}$$

这里，$\Sigma_t(\vec{r},E)$是介质的总截面，除了包括俘获、裂变和散射截面外，还包括其他核反应截面，v是中子速度，负号表示该群中子数减少。

在dt内，由外中子源$S(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)$直接进入该中子群的中子数为

$$S(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)dVd\vec{\Omega}dEdt \tag{1.4}$$

现在求由于其他能量和飞行方向的中子与介质核碰撞，进入该中子群的中子数。设碰撞前中子能量为E'，飞行方向为$\vec{\Omega}'$。定义$f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\rightarrow\vec{\Omega},E)$为上述中子在$\vec{r}$处与介质每碰撞一次平均产生的能量为$E$、飞行方向为$\vec{\Omega}$的中子数。裂变中子的发射一般是各向同性的，于是$f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\rightarrow\vec{\Omega},E)$可表示为

$$f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)=\frac{1}{\Sigma_t(\vec{r},E')}\left[\frac{1}{4\pi}\chi(E)\nu\Sigma_f(\vec{r},E')\right.$$

$$\left.+\sum_{x\neq f}\Sigma_x(\vec{r},E')f_x(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)\right] \quad (1.5)$$

式中，$\Sigma_f(\vec{r},E')$是裂变截面，$\Sigma_x(\vec{r},E')$是非裂变发射中子的 x 型核反应截面（例如，弹性、非弹性散射截面，（n,2n）反应截面等）、ν是每次核裂变平均产生的次级裂变中子数，$\chi(E)$ 是归一的裂变中子能谱，$f_x(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)$的定义与$f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)$类似，是能量为 E'、飞行方向为 $\vec{\Omega}'$ 的中子在 $\vec{r}$ 处每发生一次 x 型核反应平均产生的能量为 E、飞行方向为$\vec{\Omega}$的中子数。根据 $f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)$的定义，体积元 dV 内能量为 E'、飞行方向为 $\vec{\Omega}'$ 的中子，因碰撞进入该中子群的中子数为

$$N(\vec{r},\vec{\Omega}',E',t)\Sigma_t(\vec{r},E')v'f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)dVd\vec{\Omega}dEdt$$

对$\vec{\Omega}'$ 和E' 积分，得到

$$\left[\iint N(\vec{r},\vec{\Omega}',E',t)\Sigma_t(\vec{r},E')v'f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)\right.$$

$$\left.\times d\vec{\Omega}'dE'\right]dVd\vec{\Omega}dEdt \quad (1.6)$$

这就是所有其他能量和飞行方向的中子，因碰撞进入该中子群的总中子数。

将(1.3)，(1.4)和(1.6)式相加，应等于 dt 内该中子群净增加的中子数，即

$$\frac{dN(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)}{dt}dVd\vec{\Omega}dEdt=\left[-N(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)\right.$$

$$\times\Sigma_t(\vec{r},E)v+S(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)+\iint N(\vec{r},\vec{\Omega}',E',t)$$

$$\left.\times\Sigma_t(\vec{r},E')v'f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)d\vec{\Omega}'dE'\right]$$

$$\times dVd\vec{\Omega}dEdt$$

或者

$$\frac{dN(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)}{dt}=-N(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)\Sigma_t(\vec{r},E)v$$

$$+\iint N(\vec{r},\vec{\Omega}',E',t)\Sigma_t(\vec{r},E')v'$$

$$\times f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)d\vec{\Omega}'dE'+S(\vec{r},\vec{\Omega},E,t) \qquad (1.7)$$

利用

$$\frac{dN}{dt}=\frac{\partial N}{\partial t}+v\vec{\Omega}\cdot\nabla N \qquad (1.8)$$

就得到

$$\frac{\partial N(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)}{\partial t}+v\vec{\Omega}\cdot\nabla N(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)$$

$$+\Sigma_t(\vec{r},E)vN(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)$$

$$=\iint\Sigma_t(\vec{r},E')f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)$$

$$\times v'N(\vec{r},\vec{\Omega}',E',t)d\vec{\Omega}'dE'+S(\vec{r},\vec{\Omega},E,t) \qquad (1.9)$$

这就是玻尔兹曼中子输运方程，简称玻尔兹曼方程。由于中子角密度 $N(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)$ 与中子角通量 $\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)$ 之间有如下关系：

$$\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)=vN(\vec{r},\vec{\Omega},E,t) \qquad (1.10)$$

玻尔兹曼方程也可写成

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)}{\partial t}+\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)$$

$$+\Sigma_t(\vec{r},E)\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E,t)$$

$$=\iint\Sigma_t(\vec{r},E')f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)\phi(\vec{r},\vec{\Omega}',E',t)d\vec{\Omega}'dE'$$

$$+S(\vec{r},\vec{\Omega},E,t) \qquad (1.11)$$

这是反应堆物理中玻尔兹曼方程的常见形式。

在定态情况下，玻尔兹曼方程为

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)+\Sigma_t(\vec{r},E)\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)$$

$$=\iint\Sigma_t(\vec{r},E')f(\vec{r};\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)$$

$$\times\phi(\vec{r},\vec{\Omega}',E')d\vec{\Omega}'dE'+S(\vec{r},\vec{\Omega},E)$$

(1.12)

由于推导玻尔兹曼方程过程中，我们不计中子与中子的碰撞，也就是说，中子在介质内的运动是彼此无关的，这就使得玻尔兹曼方程成为线性方程。

玻尔兹曼方程是微分-积分方程，在定态情况下，要使它的解有定值，必须给出边界条件。这种边界条件可以从物理直观上直接得到。

对于孤立系统，由于外界没有中子射到系统的边界面 s 上，因此在系统的边界处，入射中子角通量为零，即

$$\phi(\vec{r}_s,\vec{\Omega},E)=0\text{，对于}\vec{r}_s\in s\text{，}(\vec{\Omega}\cdot\vec{n}^+)<0$$

(1.13)

这里，$\vec{n}^+$是系统边界面的向外法线矢量。

在系统内两种介质的交界处，能量为E、飞行方向为$\vec{\Omega}$的中子群，在离开一种介质进入另一种介质时，必定精确地包含相等的中子数，因此在两种介质的交界面 s_{int} 处，中子角通量必须连续，即

$$\phi(\vec{r}_{s^+_{int}},\vec{\Omega},E)=\phi(\vec{r}_{s^-_{int}},\vec{\Omega},E)\text{，对于}\vec{r}_{s^+_{int}}\text{，}\vec{r}_{s^-_{int}}\in s_{int}$$

(1.14)

这里，$s^{\pm}_{int}$ 右上角的角标"＋"和"－"分别表示交界面的右侧和左侧。

在给定的边界条件下（对于非定态情形，还须给定初始条件），中子的扩散和输运行为由玻尔兹曼方程唯一确定。然而，对于实际问题，解玻尔兹曼方程很困难，而是在S_N，P_N或最简单的扩散近似下求解。解玻尔兹曼方程的另一条重要途径是，先将

微分-积分形式的玻尔兹曼方程转换成积分方程，即积分输运方程，然后求解。离散积分输运方法(DIT)和碰撞几率方法(CP)，是解积分输运方程的两种有效的直接方法。

二、格林函数

玻尔兹曼方程(1.12)右边第二项是外中子源，第一项是碰撞密度源，这两项可用总源 $S'(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 表示，于是，方程(1.12)可写成

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)+\Sigma_t(\vec{r},E)\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)=S'(\vec{r},\vec{\Omega},E) \tag{1.15}$$

在形式上，它可看作在源 $S'(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 作用下未碰撞中子角通量满足的方程。如果 $S'(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 极其简单，方程(1.15)能够严格求解。

假设在介质系统内 $\vec{r}_0$ 处，放一单位强度方向点源 $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)\delta(E-E_0)$，它发射能量为 E_0、飞行方向为 $\vec{\Omega}_0$ 的单能单向中子，我们定义未碰撞中子角通量的格林函数 $G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0,E_0\to\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 为

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0,E_0\to\vec{r},\vec{\Omega},E)+\Sigma_t G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0,E_0\to\vec{r},\vec{\Omega},E)$$
$$=\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)\delta(E-E_0) \tag{1.16}$$

其中，$\delta(\zeta-\zeta_0)$是狄拉克-δ 函数，它定义为

$$\begin{aligned}&\delta(\zeta-\zeta_0)=0\,,\quad 当(\zeta-\zeta_0)\neq 0时\\&\int f(\zeta)\delta(\zeta-\zeta_0)d\zeta=f(\zeta_0)\end{aligned} \tag{1.17}$$

从方程(1.16)求得（推导见附录三）

$$G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0,E_0\to\vec{r},\vec{\Omega},E)=\delta\left(\vec{\Omega}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}-1\right)$$

$$\times\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)\delta(E-E_0)\frac{\exp[-\tau_{E_0}(\vec{r},\vec{r}_0)]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2} \tag{1.18}$$

这就是未碰撞中子角通量的格林函数。式中，$\tau_{E_0}(\vec{r},\vec{r}_0)$ 是能量为 E_0 的中子从 $\vec{r}_0$ 到 $\vec{r}$ 所经历的中子光学长度，即

$$\tau_{E_0}(\vec{r},\vec{r}_0)=\int_0^{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\Sigma_t\left(\vec{r}-s\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|},E_0\right)ds \qquad (1.19)$$

显然，$G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0,E_0\to\vec{r},\vec{\Omega},E)$的物理意义是，由单位强度方向点源$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)\delta(E-E_0)$在 $\vec{r}$ 处造成的能量为 E、飞行方向为 $\vec{\Omega}$ 的未经碰撞中子角通量。

由于 $\tau_{E_0}(\vec{r},\vec{r}_0)=\tau_{E_0}(\vec{r}_0,\vec{r})$，格林函数 $G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0,E_0\to\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 满足如下互易关系：

$$G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0,E_0\to\vec{r}_1,\vec{\Omega}_1,E)=G_0(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1,E_0\to\vec{r}_0,-\vec{\Omega}_0,E) \qquad (1.20)$$

由于格林函数代表方向点源在 $\vec{r}$ 处造成的未碰撞通量，变量 E_0或 E 可略去，(1.20)式可写成单速中子形式：

$$G_0(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r}_1,\vec{\Omega}_1)=G_0(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r}_0,-\vec{\Omega}_0) \qquad (1.21)$$

互易关系式表明：单位强度方向点源 $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)\cdot\delta(E-E_0)$在$\vec{r}_1$处造成的能量为$E_0$、飞行方向为$\vec{\Omega}_1$的未碰撞角通量，与单位强度方向点源$\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta(\vec{\Omega}\cdot-\vec{\Omega}_1-1)\delta(E-E_0)$在 $\vec{r}_0$ 处造成的能量为 E_0、飞行方向为 $-\vec{\Omega}_0$ 的未碰撞角通量互为相等。

不仅未碰撞角通量的格林函数满足上述互易关系，在单速中子近似下，可以证明，中子角通量的格林函数也满足同样的互易关系。考虑一既有吸收又有散射和其他核反应的介质系统，总截面为 $\Sigma_t(\vec{r})$，系统体积为 V，外表面为 s。在单速中子近似下，中子角通量的格林函数 $G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})$定义为

$$\begin{aligned}&\vec{\Omega}\cdot\nabla G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})+\Sigma_t G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})\\&=\int\Sigma_s(\vec{r})f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}'\\&\quad+\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)\end{aligned} \qquad (1.22)$$

$G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})$的物理意义是，由单位强度方向点源$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)$在$\vec{r}$处造成的飞行方向为$\vec{\Omega}$的中子角通量。为了证明中子角通量的格林函数也满足互易关系，同样，在$\vec{r}_1$处也放一单位强度方向点源$\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta(\vec{\Omega}\cdot-\vec{\Omega}_1-1)$，它在$\vec{r}$处造成的飞行方向为$-\vec{\Omega}$的中子角通量为$G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})$，它满足如下方程：

$$\begin{aligned}&\vec{\Omega}\cdot\nabla G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})+\Sigma_t G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})\\&=\int\Sigma_t(\vec{r})f(\vec{r};-\vec{\Omega}'\to-\vec{\Omega})G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}'\\&\quad+\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta(-\vec{\Omega}\cdot-\vec{\Omega}_1-1)\end{aligned}\tag{1.23}$$

由于

$$f(\vec{r};-\vec{\Omega}'\to-\vec{\Omega})=f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\tag{1.24}$$

方程(1.23)可写成

$$\begin{aligned}&\vec{\Omega}\cdot\nabla G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})+\Sigma_t G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})\\&=\int\Sigma_t(\vec{r})f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}'\\&\quad+\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta(-\vec{\Omega}\cdot-\vec{\Omega}_1-1)\end{aligned}\tag{1.25}$$

方程(1.22)乘以$G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})$，方程(1.25)乘以$G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})$，两式相减，得到

$$\begin{aligned}&\vec{\Omega}\cdot\nabla[G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}\to\vec{r},-\vec{\Omega})]\\&=\Sigma_t(\vec{r})\int\Big[G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\\&\quad\times G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega}')-G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})\\&\quad\times G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega}')\Big]d\vec{\Omega}'+G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})\\&\quad\times\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)-G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})\\&\quad\times\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_1-1)\end{aligned}\tag{1.26}$$

两边再对系统体积V积分．利用散度定理和狄拉克-δ函数的性质，得到

$$\int_s (\vec{\Omega}\cdot\vec{n}^+)G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r}_s,\vec{\Omega})G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r}_s,-\vec{\Omega})ds$$
$$=\int\Sigma_t(\vec{r})dv\iint\Big[G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})$$
$$\times f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega}')$$
$$-G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})$$
$$\times G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega}')\Big]d\vec{\Omega}'$$
$$+G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r}_0,-\vec{\Omega})\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)$$
$$-G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r}_1,\vec{\Omega})\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_1-1) \qquad (1.27)$$

由于在系统边界处必须满足如下边界条件：

$$G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r}_s,\vec{\Omega})=0\,,\qquad 对于\ \vec{r}_s\in s,(\vec{\Omega}\cdot\vec{n}^+)<0$$
$$G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r}_s,-\vec{\Omega})=0\,,\quad 对于\vec{r}_s\in s,(-\vec{\Omega}\cdot\vec{n}^+)<0$$
$$(1.28)$$

于是，(1.27)式就变为

$$G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r}_0,-\vec{\Omega})\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_0-1)$$
$$-G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r}_1,\vec{\Omega})\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}_1-1)$$
$$+\int\Sigma_t(\vec{r})dV\iint\Big[G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})$$
$$\times f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega}')$$
$$-G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})$$
$$\times G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega}')\Big]d\vec{\Omega}'=0 \qquad (1.29)$$

再对 $\vec{\Omega}$ 积分，利用狄拉克-δ函数的性质，得到

$$G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r}_0,-\vec{\Omega}_0)-G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r}_1,\vec{\Omega}_1)$$
$$=\int\Sigma_t(\vec{r})dV\iiint\Big[G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega})$$
$$\times f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega}')$$
$$-G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\to\vec{r},-\vec{\Omega})f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})$$
$$\times G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\to\vec{r},\vec{\Omega}')\Big]d\vec{\Omega}d\vec{\Omega}' \qquad (1.30)$$

由于

$$f(\vec{r};\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega})=f(\vec{r};\vec{\Omega}\to\vec{\Omega}')$$

因此得到

$$G(\vec{r}_0,\vec{\Omega}_0\rightarrow\vec{r}_1,\vec{\Omega}_1)=G(\vec{r}_1,-\vec{\Omega}_1\rightarrow\vec{r}_0,-\vec{\Omega}_0) \qquad (1.31)$$

这就是中子角通量格林函数的互易关系。

三、中子积分输运方程

前面已经知道，玻尔兹曼方程是线性的。它具有这样一种性质：如果 $\phi_1(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 是在中子源 S_1 下满足给定边界条件的玻尔兹曼方程的解，$\phi_2(\vec{r},\vec{\Omega},E)$是在中子源 S_2 下满足同样边界条件的玻尔兹曼方程的解，则$[\phi_1(\vec{r},\vec{\Omega},E)+\phi_2(\vec{r},\vec{\Omega},E)]$必定是在中子源$(S_1+S_2)$下玻尔兹曼方程的解。一般说来，任意源$S$总可以分解成许多简单源 S_i，即

$$S(\vec{r},\vec{\Omega},E)=\sum_i S_i(\vec{r},\vec{\Omega},E) \qquad (1.32)$$

由于玻尔兹曼方程是线性的，对应于总源 S 的角通量 $\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 可表示为

$$\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)=\sum_i \phi_i(\vec{r},\vec{\Omega},E) \qquad (1.33)$$

这里，$\phi_i(\vec{r},\vec{\Omega},E)$是对应于分源 S_i 并满足给定边界条件的玻尔兹曼方程的解。这种性质称为解的线性迭加性。基于这种解的线性迭加性和未碰撞角通量的格林函数，可将玻尔兹曼方程转换为积分输运方程。

有外源情况下，系统内 $\vec{r}$ 处中子能量为E、飞行方向为$\vec{\Omega}$的中子角通量 $\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)$ 来源于两部分中子：第一部分是从外中子源 S 射来的、未经碰撞的中子，利用未碰撞角通量的格林函数和线性迭加原理，由外源 S 直接造成的 $\vec{r}$ 处中子角通量为

$$\iiint S(\vec{r}',\vec{\Omega}',E)G_0(\vec{r}',\vec{\Omega}',E'\rightarrow\vec{r},\vec{\Omega},E)dV'd\vec{\Omega}'dE'$$

第二部分来源于碰撞密度源，它在 $\vec{r}$ 处造成的中子角通量为

$$\iiiint\!\!\int G_0(\vec{r}',\vec{\Omega}',E'\to\vec{r},\vec{\Omega},E)\Sigma_t(\vec{r}',E'')\phi(\vec{r}',\vec{\Omega}'',E'')$$

$$\cdot f(\vec{r}';\vec{\Omega}'',E''\to\vec{\Omega}',E')dV'd\vec{\Omega}'dE'd\vec{\Omega}''dE''$$

于是，$\vec{r}$ 处总的中子角通量是上述两部分之和，因此得到

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)=&\iiiint\!\!\int G_0(\vec{r}',\vec{\Omega}',E'\to\vec{r},\vec{\Omega},E)\Sigma_t(\vec{r}',E'')\\&\cdot\phi(\vec{r}',\vec{\Omega}'',E'')f(\vec{r}';\vec{\Omega}'',E''\to\vec{\Omega}',E')\\&\cdot dV'd\vec{\Omega}'dE'd\vec{\Omega}''dE''\\&+\iiint S(\vec{r}',\vec{\Omega}',E)\\&\cdot G_0(\vec{r}',\vec{\Omega}',E'\to\vec{r},\vec{\Omega},E)dV'd\vec{\Omega}'dE'\end{aligned}\tag{1.34}$$

将(1.18)式代入方程(1.34)，利用狄拉克-δ函数的性质，得到

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r},\vec{\Omega},E)=&\iiint\Sigma_t(\vec{r}',E')\phi(\vec{r}',\vec{\Omega}',E')f(\vec{r}';\vec{\Omega}',E'\to\vec{\Omega},E)\\&\times\delta\left(\vec{\Omega}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-1\right)\frac{\exp[-\tau_E(\vec{r},\vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\\&\times dV'd\vec{\Omega}'dE'+\int S(\vec{r}',\vec{\Omega},E)\delta\left(\vec{\Omega}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-1\right)\\&\times\frac{\exp[-\tau_E(\vec{r},\vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}dV'\end{aligned}\tag{1.35}$$

这就是中子角通量的积分输运方程。在推导过程中未作任何近似，因此，积分输运方程(1.35)与玻尔兹曼方程是等价的。

对于实际问题，解方程(1.35)很困难。如果假设，不仅外中子源各向同性地发射中子，而且弹性、非弹性散射以及其他类型核反应所发射的中子的角分布在实验室系也是各向同性的，即

$$S(\vec{r},\vec{\Omega},E)=\frac{1}{4\pi}S(\vec{r},E)\tag{1.36}$$