

误差理论与精度分析

毛英泰 主编

国防工业出版社

内 容 简 介

本教材包括误差理论和精度分析两部分。

误差理论部分以概率论和数理统计学的观点阐述了误差理论的基本规律。其内容有误差和精度的基本概念；评定误差的基本原理；最小二乘法；系统误差；误差的合成及实验数据的处理。

精度分析部分包括机构的精度分析；光学系统和光电系统的精度分析以及总体精度分析。

本书的特点是理论与实践相结合，理论阐述简明扼要、通俗易懂。精度分析从简单的机械传动副入手到光电系统，继之总体精度分析，使之体系完整，且逻辑性强。

本书可作为大专院校的精密机械专业和光学仪器专业教材，也可以作为从事计量测试工作的工程技术人员的参考书。

误差理论与精度分析

毛英泰 主编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张 25¹/₂ 593 千字

1982年6月第一版 1982年6月第一次印刷 印数：0,001—8,500册

统一书号：15034·2402 定价：2.60元

前 言

误差和精度这两个术语使用得非常广泛，并为大家所熟悉。由于目前国内、国际上有关误差和精度方面的名词术语很多，而且它的含义、使用和处理方法也尚未统一，因此，本书取名为“误差理论和精度分析”，只是使读者易于了解本书的内容，包括误差理论和精度分析两部分而已。

由于现代科学技术飞速发展的需要，在世界各国，愈来愈多的科学家和工程师对误差和精度的研究十分重视。从某种意义上说，也由于我们是生活在一个量度的世界，各种知识几乎都是用数字具体体现的，并且只有精确而可靠的数字才能构成科学技术的坚实基础，也只有相当精密的测量和足够精度的数字，才能为商品的交换、工业产品的互换性、乃至为科学技术信息的一致性提供必不可少的前提。

我院根据科学技术发展的趋势和培养目标的要求，在1962年开设了“机构精度原理”课，由长春光机所龙射斗、孙麟治、梁浩明、林祥棣、陈国勋、邹自强等研究人员编写讲义和授课，毕业生在工作中深受裨益。本书就是在原讲义的基础上编写的，并得到中国科学院长春光机所和光电技术所的大力支持和热情帮助。

近来，国内的高等院校及研究生院陆续开设误差理论方面的课程，国外更是如此，如美国麻省理工学院，还曾为工程师和研究人员举办暑期讲习班，讲授误差理论和数据处理方面的知识。因此，编写本书并作为一门课程来讲授是很有必要的。由于误差和精度的研究，涉及范围很广，现今未能达到成熟的境地，资料也颇分散，因此，编写本书的目的是希望能够比较系统地阐述误差理论的基本概念和精度分析的基本方法，以及它们在计量测试、产品设计和装校等方面的应用，并将误差的理论分析与实际测定和产品的设计（包括总体设计和零部件设计）、装校、鉴定等能够结合起来，成为一个体系。显然，这只是一个尝试。

本书的内容经审稿会审定后，按会议代表意见，删去“用电子计算机计算测量结果”一章，并删去和有关课程重复的内容，如概率论知识等，增加“总体精度分析概述”一章。为自学方便，将概率论基本知识列于附录I中。在审稿会期间，兄弟院校和研究室的许多同志提出不少宝贵意见，在此致以谢意。

本书承蒙长春光机所龙射斗、孙麟治、梁浩明、张业兴、谢金瑞、史光辉、刘栖山、姚力常、王家桢等同志审订，在此致以衷心感谢。

本书系集体编写，毛英泰同志负责主编，龙射斗同志负责主审。参加编写的还有毛英泰（一~六，十五，十八章），赵贵文（七章），郑文学（八，十一，十二章），马宏（九，十，十八章），王志坚（十三章），马佳光（十四章），梁浩明、庄夔（十六、十七章）。全部图稿由朴丽君、魏丽娜、靳卫明、马宏绘制。另外尚得到国洪志、贾述平、田守信等同志的大力帮助，在此致以衷心感谢。

编者 于长春光机学院

目 录

第一章	误差和精度的基本概念	1
§ 1	概述	1
§ 2	误差	2
§ 3	精度	6
§ 4	灵敏度和鉴别误差	7
§ 5	测量误差处理中应注意的问题	8
第二章	评定误差的基本原理	9
§ 1	误差和概率分布	9
§ 2	随机子样及其数字特征	10
§ 3	最大似然性原理	12
§ 4	t 分布原理	16
§ 5	假设检验概说	18
第三章	随机误差	20
§ 1	随机误差的基本特性	20
§ 2	评定随机误差的尺度	23
§ 3	标准偏差的几种计算方法	25
§ 4	不等精度测量时随机误差的估计	31
§ 5	间接测量时随机误差的估计	36
第四章	最小二乘法	47
§ 1	最小二乘法的基本概念	47
§ 2	线性参数的最小二乘估计	50
§ 3	用最小二乘法解条件测量问题	61
§ 4	非线性参数的最小二乘估计	68
第五章	系统误差	72
§ 1	系统误差的基本概念	72
§ 2	系统误差的分类	74
§ 3	系统误差的发现	77
§ 4	系统误差的消除	87
§ 5	系统误差已消除的准则	92
第六章	误差的合成	94
§ 1	概 述	94
§ 2	误差合成方法之一(不确定度的合成)	98
§ 3	误差的合成方法之二	99
§ 4	检定设备的 1/3 及 1/10 法则	101
第七章	实验数据的处理	102
§ 1	数字运算与数据处理	102

§ 2	实验数据的合理性检验	105
§ 3	概率分布的检验	109
§ 4	实验数据的相关性	110
§ 5	实验数据的图解处理	113
第八章	评定机构精度的指标与计算方法	117
§ 1	影响机构精度的主要因素	117
§ 2	机构正确度及计算方法	117
§ 3	精密度	131
§ 4	变动度	132
§ 5	迟钝度	136
第九章	导轨副的精度分析	141
§ 1	概述	141
§ 2	滑动导轨副的精度分析	144
§ 3	滚动导轨副的精度分析	147
§ 4	影响导轨副精度的因素	151
第十章	轴系的精度分析	161
§ 1	概述	161
§ 2	轴系的精度指标	161
§ 3	影响轴系精度的因素	168
§ 4	轴系回转精度分析示例	182
第十一章	螺旋副传动精度分析	192
§ 1	螺旋副的原始误差及其对旋合性的影响	192
§ 2	螺旋副传动螺纹啮合特点	195
§ 3	螺旋副传动精度	199
§ 4	提高螺旋副传动精度的措施	206
第十二章	齿轮机构的精度分析	208
§ 1	齿轮传动的基本概念	208
§ 2	齿轮固有位置误差	211
§ 3	齿轮固有侧隙	218
§ 4	齿轮机构的传动误差	222
§ 5	齿轮机构的空回	228
§ 6	齿轮机构精度的计算实例	239
§ 7	消减齿轮机构空回和传动误差的措施	245
第十三章	光学系统及其元件精度分析	250
§ 1	光学仪器的对准精度	250
§ 2	透镜误差分析	253
§ 3	平行玻璃板及分划板误差分析	264
§ 4	反射棱镜误差分析	273
第十四章	光学仪器电气系统精度分析	297
§ 1	概述	297
§ 2	光学仪器电气测量系统的精度原理	297

§ 3 光学仪器控制系统的精度分析	305
§ 4 控制系统误差计算实例	312
§ 5 计算机误差	319
第十五章 总体精度分析概述	322
§ 1 总体精度分析的基本概念	322
§ 2 仪器精度和测量精度	324
§ 3 提高总体精度的一些方法	327
第十六章 精密圆刻度机的总体精度分析	330
§ 1 概述	330
§ 2 圆刻度机精度分析	334
§ 3 提高精度的几个途径	343
第十七章 衍射光栅刻划机的总体精度分析	349
§ 1 概述	349
§ 2 精度分析	351
§ 3 精度综合及讨论	359
§ 4 提高精度的几个途径	361
第十八章 光学经纬仪和光电经纬仪的总体精度分析	365
§ 1 经纬仪概述	365
§ 2 光学经纬仪的总体精度分析	369
§ 3 光电经纬仪的总体精度分析	381
附录 I	385
附录 II	394
附录 III	397
附录 IV	398
附录 V	398
参考资料	399

第一章 误差和精度的基本概念

§1 概 述

一、研究误差的重要意义

人们在生产斗争和科学实验中，不断地探索和揭示客观世界的规律性。其方法有两种：一是理论分析的方法；二是实验测量的方法。并且常常需要极其精确的实验测定，以希望得到没有误差的测量结果。因为误差会在一定的程度上歪曲客观事物的规律性。

实验测量的研究方法是极为重要的。著名的科学家门捷列夫说：“科学始于测量”。实验研究不仅能定性地验证理论分析的正确性，而且能够定量地验证理论结果的正确性和可靠程度，并且能够极其精确地测定出许多理论公式中的待定常数。伟大的物理学家爱因斯坦的著名的相对论，直至1919年英国天文学家利用日食时进行的天文观测才得到证实。根据爱因斯坦的相对论，光速是宇宙间的最高速度。然而，有些科学家经过多年的精细观测，提出了可能存在超光速的所谓“快子”。为什么要花许多年的时间进行辛劳的测量呢？因为误差可能歪曲事实，导致错误的结论。因此，研究误差的来源及其规律性，减小和尽可能地消除误差，以得到精确的实验测量结果，对于科学技术的产生及进展是非常重要的。

远在伽利略时代，伽利略就研究提高物理实验的精确性。以后，法国数学家列朗德尔和德国数学家、测量学家高斯在天体运行轨道的理论研究中，都提出了用最小二乘法来处理观测结果，奠定了误差理论的基础。

正是由于实验测量技术和误差处理方法的不断改进，对科学技术的发展和物理定律的发现起了很大的推动作用。例如对天体质量及其距离的测定，奠定了万有引力定律；我国科学家吴有训与美国科学家康普顿，通过对X射线散射角和波长的改变的精密测定，奠定了光量子的能量守恒定律和冲量守恒定律；吴剑雄教授的实验测定证实了杨振宁博士和李政道博士的宇称不守恒定理，推翻了宇称守恒定理等等。在军事技术和工业技术中，这样的例子也是很多的。例如火箭和导弹的发射，需要非常精确的装定发射角，工业计量则已进入 $0.1\sim 0.01$ 微米的精确度。又如制造光导纤维的材料，其杂质含量要求少于 10^{-9} 。可以说，人们在生产斗争和科学实验中所取得的进展和成就，都是通过对误差的斗争和实验测量技术的改进而取得的。

二、误差理论的基本任务

- 1) 研究误差的来源和特性，对误差作出科学的分类。
- 2) 研究误差的评定和估计的合理方法，研究误差的传递、转化和相互作用的规律性，以及误差的合成和分配的法则。
- 3) 研究在各种测量方式及测量条件下，降低误差提高精度的途径，以最经济简便的方法得到最优的测量结果。

三、误差理论的实际应用

1) 对测量数据进行判断和统计处理, 如对测量数据的合理性、可靠性、相关性及其分布规律的判断和估计, 通过一系列的计算和处理, 得到测量结果的数学表示及其精度评定。

2) 综合评定某实验方法或测量仪器的精确性和可靠性。

3) 产品设计时, 进行误差的分析和分配, 预估产品的精度。

4) 确定最有利的实验条件。

5) 根据被测参数或被检仪器的精度, 合理选择测量仪器或检定仪器的精度。

6) 根据测量精度, 合理选择测量方法、测量方程式及必要的测量次数。

7) 判断旧产品的精度是否蜕化降低, 或技术革新和改进后的效果。

§ 2 误 差

一、误差的定义

研究误差是以测量误差作为研究对象, 因为它具有普遍性和代表性。误差可定量地表示为

$$\text{误差值} = \text{测得值} - \text{真值}$$

用符号表示即为

$$\Delta_i = x_i - x_g \quad [i = 1 \sim n \text{ (测量序数)}]$$

Δ_i 称为真误差, 它的大小表示每一次测得值对真值的不符合的程度。此外, 我们应从以下几个方面更好地理解误差的含义。

1) 真误差 Δ_i 恒不等于零, 即误差的必然性原理。不管主观愿望如何, 以及在测量时怎样努力, 实际上误差总是要产生, 而且就其理论极限来说, 也不可能等于零。例如测量电量时, 误差不可能小于一个电子所带的电量, 测量块规的长度时, 误差决不可能小于块规的材料分子的尺寸。

2) 真误差 Δ_i 之间, 或测得值 x_i 之间, 一般是不相等的, 即误差具有不确定性。否则, 可能是由于测量仪器的分辨力太低的缘故。

3) 真误差 Δ_i , 一般来说是未知的。因为通常真值是未知的。预知真值的情况, 只有以下几种:

理论真值: 如平面三角形三内角之和恒为 180° 。理论真值亦称绝对真值。

约定真值: 世界各国公认的一些几何量和物理量的最高基准的量值。如米基准的长度约定为 $1 \text{ 米} = 1650763.73 \lambda$, λ 为氪 86 的 ($2P_{10} - 5d_5$) 跃迁在真空中的辐射波长。

相对真值: 如果标准仪器的误差比一般仪器的误差小一个数量级, 则标准仪器的测定值可视为真值, 称为相对真值。两者误差的比值, 根据使用要求可适当放宽至 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{5}$ 。

4) 由于真误差 Δ_i 在大多数情况下是未知的, 所以研究误差通常是从残余误差 v_i 入手, 残余误差定义为:

$$v_i = x_i - \bar{x} = x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

\bar{x} 称为测得值的算术平均值。以后将要证明 \bar{x} 为测得值的最或是值（最佳值）。

5) 由于误差的不确定性，或测试数据的不确定性，所以可把误差看成为随机变量，借助于概率论和数理统计学这个有力的工具来研究误差。

二、误差的来源

由于误差的必然存在，测得值与真值总不能相符。那么，误差从何而来呢？对于测量误差而言，其来源有三个方面：测量仪器、测量条件和测量者。

1. 仪器误差

由于仪器（测量工具）的设计、制造和装配校正等方面所引起的测量误差。例如，仪器设计时违反阿贝原理和采用简化机构所产生的设计误差，刻尺的刻度误差，度盘的装配偏心，以及仪器调整校正后的残留误差。又如电工仪表的额定值与实际值不符等等。

2. 条件误差

由于测量过程中测量条件的变动所引起的测量误差。如工作室温度变化，气流及振动的影晌。对于野外作业的经纬仪和测距仪，更受到大气扰动及阳光照射角度改变等的影响。

3. 人差

由测量者造成的误差，如测量者的估读误差，瞄准误差，以及测量者的感官生理变化和精神状态所引起的测量误差。

前两种误差亦称客观误差。后一种误差则称主观误差。为了减小主观误差，目前许多测量仪器的读数采用数字显示或电子计算机打印等所谓客观读数方法，以及采用光电瞄准等客观瞄准方式以消除主观误差。

我们分析测量过程中产生的误差，就是从上述三个方面去寻找各种误差因素，但有时误差因素也产生于测量过程结束之后，如摄影测量后，感光片在显影、定影过程中所产生的变形和乳剂漂移也引起测量误差。

三、误差的表示方法

1. 绝对误差

用被测量 L 的误差 ΔL 本身来表示误差，称为绝对误差。应该注意，不要把误差的绝对值和绝对误差混为一谈。

2. 相对误差

用绝对误差 ΔL 与被测量的比值来表示误差，称为相对误差。用绝对误差有时很难衡量测量精度的高低。只有当被测量的数值彼此相等或近似相等时，绝对误差可以评定测量精度的高低。否则应采用相对误差来评定。例如测量两段直线距离，测得值及其绝对误差如下

$$L_1 = 100 \text{ 米}, \Delta L = 0.2 \text{ 米}$$

$$L_2 = 5000 \text{ 米}, \Delta L = 1.0 \text{ 米}$$

若按绝对误差评定测量精度, 则认为 L_1 的测量精度比 L_2 高, 这是错误的。按相对误差计算则分别为:

$$\Delta L_1/L_1 = 1/500, \quad \Delta L_2/L_2 = 1/5000$$

可见 L_2 的测量精度较高。

应该注意, 绝对误差为一有量纲的数值, 相对误差是无量纲的真分数, 在测量学中常表示为分子为 1 的分数, 如上述的 $\frac{1}{500}$ 或 $\frac{1}{5000}$ 等。而在电工仪表中, 则常用百分比来表示, 例如电工仪表的准确度等级分为: 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.5 和 5.0 七级, 如果某一仪表为 5.0 级, 则表示该仪表的最大相对误差不大于 5%。电工仪表的最大相对误差定义为

$$\text{最大相对误差} = \text{最大示值误差} / \text{仪表的最大刻度值}$$

例如, 检定一个最大刻度值为 100 伏的电压表, 发现 50 伏的刻度点的示值误差为 2.5 伏, 100 伏的刻度点的示值误差为 2 伏, 则其最大相对误差为 2.5%。

在精密仪器中, 对多档量仪也常用相对误差来表示仪器的测量精度, 如中原量仪厂生产的电感测微仪, 具有四档示值范围: ± 100 , ± 30 , ± 10 和 ± 3 微米; 其示值的绝对误差相应为: ± 2 , ± 0.6 , ± 0.2 和 ± 0.06 微米, 故其示值的相对误差均为 $\pm 2\%$ 。

3. 分贝误差

在无线电及声学测量中, 常用分贝 (dB) 来表示误差。设两个电压的比值为

$$\alpha = U_2/U_1$$

则分贝的表达式为

$$A = 20 \lg \alpha \text{ (dB)}$$

若 α 产生了误差 $\delta\alpha$, 则相应地 A 亦产生一个误差 δA , 故有

$$A + \delta A = 20 \lg(\alpha + \delta\alpha) \text{ (dB)}$$

$$\delta A = 20 \lg\left(1 + \frac{\delta\alpha}{\alpha}\right) \text{ (dB)}$$

由于

$$\lg\left(1 + \frac{\delta\alpha}{\alpha}\right) = 0.4343 \ln\left(1 + \frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)$$

而

$$\ln\left(1 + \frac{\delta\alpha}{\alpha}\right) \approx \frac{\delta\alpha}{\alpha} \quad \left(\text{当 } \frac{\delta\alpha}{\alpha} \ll 1 \text{ 时}\right)$$

所以

$$\delta A \approx 8.69 \left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right) \text{ (dB)}$$

〔例 1.1〕 某一电压表测出某电压为 125 伏, 标准表测出为 127 伏, 试求其误差。

〔解〕 绝对误差 = $125 - 127 = -2$ 伏

$$\text{相对误差} = -2/127 = -1.6\%$$

$$\text{分贝误差} \approx 8.69 \times (-1.6\%) = -0.14 \text{ (dB)}$$

以上所说的误差的表示方法, 特别是绝对误差和相对误差, 不仅适用于测量误差, 也适用于其它各种误差。例如设计允差, 制造误差和温度误差等等。

四、误差的分类

为了便于对各种误差进行分析计算和统计处理, 应将误差进行分类。

（一）按误差的性质分

1. 随机误差

误差的单独出现，其符号和大小没有一定的规律性，但就误差的整体来说，服从统计规律，这种误差称为随机误差。随机误差的产生是由许多独立因素的微量变化的综合作用的结果。例如在测量过程中，温度的微量变化，空气的扰动，地面的微振，机构间隙和摩擦力的变化等等。随机误差不能用实验方法加以修正，只能估计出它对测量结果的影响和减小它对测量结果的影响。

2. 系统误差

误差的大小及符号在测量过程中不变，或按一定的规律变化，称为系统误差。例如某一误差曲线为正弦曲线，则误差的大小和符号都作周期性的变化，循环重复，有确定的规律，它属于系统误差，称为周期误差。系统误差可以用理论计算和实验方法求得，并用加修正值的方法消除它对测量结果的影响。例如在万能工具显微镜上测量工件的长度，由于玻璃刻尺的刻度误差所产生的测量误差是系统误差，如果对玻璃刻尺进行精密检定，则可用加修正值的方法对测量结果进行修正，以提高测量精度。

还有一种误差，常被称为疏失误差，如仪器操作不正确，读错读数，记录错误，计算错误等等。疏失误差的数值远远大于随机误差或系统误差，事实上已不属于误差的范畴，而是不应发生的但由于粗心大意而产生的一种错误。

（二）按各误差之间是否独立分

1. 独立误差

各原始误差之间是独立的，互不相关。在计算总误差时，可应用误差独立作用原理，不必考虑相关系数，因相关系数为零。

2. 非独立误差

各原始误差之间不独立，相关系数不为零，介于-1和+1之间。在计算总误差时，要考虑相关系数的影响。

（三）按被测参数的时间特性分

1. 静态参数误差

被测参数不随时间而变化的称为静态参数。静态参数的观测误差（静态精度）可以看作是随机变量。

2. 动态参数误差

被测参数是时间的函数，称为动态参数。如对人造卫星、导弹的跟踪观测，其观测距离是时间的函数。动态参数的观测误差（动态精度）应看作是一个随机过程。通常要用随机过程的理论来解决。

五、误差和修正值

由误差的定义（误差=测得值-真值）可知被测量的测得值含有误差，即，测得值=真值+误差，而误差又恒不等于零。所以，欲得真值，只有对误差进行修正。因为

$$\text{真值} = \text{测得值} - \text{误差} = \text{测得值} + \text{修正值}$$

由此可知：修正值=-误差。这就是修正值的定义。在大地测量的测量平差计算中，所谓

的改正数即为修正值。

在实际测量中,常常采用加修正值的方法来提高测量精度。例如块规,可用绝对光波干涉法精确测量其尺寸偏差,并载入检定证书中。当我们使用块规进行尺寸测量时,即可在测量结果中加修正值,以消除块规的实际尺寸与名义尺寸不符的影响。又如在折射率的高精度测量中,要对温度波动和气压波动进行修正。修正值可通过实验测定或理论计算得到。

§3 精 度

一、精度的一般含义

精度的高低是用误差来衡量的,误差大,精度低;误差小,则精度高。所以,精度是误差的反义词。显然,误差大就不准确,准确一词已经使用得很普遍很习惯了。例如钟表走时很准确,炮弹准确地命中目标等等,因此精度的高低意味着准确的程度,即所谓准确度,而精确度可理解为准确度的同义词。

二、精度的具体含义

精度的一般含义比较笼统,通常用绝对误差或相对误差来表示。如测量某一角度,测量精度为1弧秒;测量某一长度,其测量精度为 10^{-4} 等等。

既然精度是用误差来衡量的,而误差按其性质可分为系统误差和随机误差。因此精度也要相应地区分为:

(一) 正确度

由系统误差引起的测得值与真值的偏离程度,偏离越小,正确度越高。系统误差越小,测量结果越正确。

(二) 精密度

由随机误差引起的测得值与真值的偏离程度,偏离越小,精密度越高。随机误差越小,测量结果越精密。

(三) 准确度

由系统误差和随机误差共同引起的测得值与真值的偏离程度,偏离越小,准确度越高。综合误差越小,测量结果越准确。

以射击为例,此时靶心相当于测量中的真值,弹痕相当于测得值,准确的射击相当于准确的测量。在图1-1中可以看到:(a)图中系统误差大,正确度低;但随机误差小,精

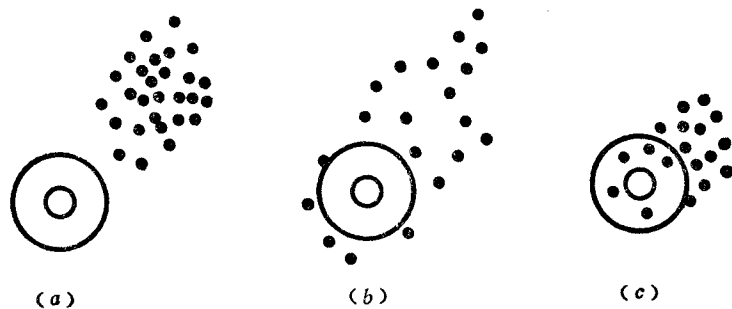


图 1-1

密度较高。(b)图则相反,可见正确度和精密度是互相独立的。正确度高,精密度不一定高,反之亦然。但正确度和精密度都高却是完全可能的,如图(c)所示。这也是我们所希望的,即射击很准确。

只有精密度高或只有正确度高,不能说准确度高。精密度和正确度,分别取其精字与确字,又可称为精确度,但使用准确度一词较为习惯和广泛。也有把系统误差的大小定义为准确度,显然不妥,因为随机误差亦使测得值偏离真值,而使测量结果不准确。目前,国外一些国家也使用正确度一词。

三、精度的其它含义

(一) 测量的重复性

用同一测量方法,同一观测者,同一测量仪器,在同一实验室内,用很短的时间间隔对同一量作连续测量时,其测量结果间相一致的接近程度。

(二) 测量的复现性

用不同的测量方法,不同的观测者,不同的测量仪器,在不同的实验室内,用较长的时间间隔对同一量作多次测量时,其测量结果间相一致的接近程度。

对于某一量的测量,若其重复精度和复现精度很高,即测量结果的一致性很好,则测量结果是准确而可信的。否则,就必须找出不一致的原因。重复性和复现性是两个重要的精度概念,尤其是复现性,常常用来确定和验证测量结果的准确性和可靠性。

§ 4 灵敏度和鉴别误差

选择测量仪器,用它来测量某一量时,除了上述要考虑测量仪器的精度之外,通常还要考虑到仪器的测量灵敏度和鉴别误差。它们的定义根据国际法制计量组织的规定如下:

一、灵敏度

测量仪器的灵敏度用仪器的示值增量与其对应的被测量的增量之比值来表示。

对于带刻度的测量仪器,刻度间隔与分度值之比即为灵敏度。例如机械式杠杆比较仪,分度值为0.001毫米,其刻度间隔为1毫米,则灵敏度为1000。此时灵敏度即等于比较仪的传动比或转移函数。在设计测量仪器时,需要考虑到灵敏度。

必须注意,上述所定义的灵敏度和习惯上所说的灵敏度含义不同。习惯上所说的灵敏度和下面所说的鉴别阈或分辨力相同。

二、鉴别误差和鉴别阈

(一) 鉴别误差

不能引起仪器示值可见变化的被测量的变化。

(二) 鉴别阈 (最大鉴别误差)

能引起仪器示值产生可见变化的被测量的最小变化。例如,80毫克载荷不能引起天平指针的任何位移,而90毫克载荷才确实引起天平指针的位移,则其鉴别误差为80毫克,而鉴别阈为90毫克。鉴别阈又常称为分辨力。又如光电数字式测角仪,若光栅盘的刻线

数为 64800，则其线周期为 20 弧秒，经电阻链 80 细分后，其最小读数值为 0.25 弧秒，即为仪器的最大鉴别误差，俗称为分辨力。

三、分辨力和精密度、准确度的关系

1) 要提高仪器的测量精密度，必须相应地提高仪器的分辨力。若分辨力很低，而测得值的一致性很好，很可能是一种假象。若数字式测角仪的分辨力为 0.5 弧秒，则小于 0.5 弧秒的变化量，仪器是无法分辨的。

2) 分辨力和准确度有时是紧密连系的，提高仪器的分辨力能提高测量的准确度，但有时则是完全独立的。例如我们要测量放射性“衰减”试验中的损耗，可以采用放射性示踪技术和天平来测定。放射性示踪技术具有很好的分辨力，它能检出小到 10^{-10} 克的微量损耗，但却不很准确，即使是损耗量非常大的时候，譬如说 1 克，其准确度不高于 3×10^{-2} ；天平测定则相反，其分辨力为 10^{-4} 克，而 1 克重量时，其测量准确度为 10^{-4} 。

§ 5 测量误差处理中应注意的问题

一、误差的测定

1) 在实验室进行误差的精密测定，必须保证测量过程中实验条件的稳定不变。除了对温度、湿度、气压和振动等环境条件进行严格控制和调节外，测量次数也不应过多，各次测量的操作也应具有一致性。例如用光学镜管瞄准被测物时，应使视场中心瞄准被测物上的固定部分，以及操作计量仪器时使测量力稳定不变等。

2) 测量对象或测量仪器，必须有一个相对来说是稳定不变的。若测量仪器是高精度且稳定不变，则误差完全反映出被测对象的精度特性。如用柯氏干涉仪检定一等量块，反之亦然，例如用三等量块检定比较仪，测量误差主要反映了比较仪的精度特性。否则，它们的误差混杂在一起，难于处理。

二、测量方法的分类

测量方法不同，测量误差的处理方法和计算公式是不同的，测量结果的精度也不相同。因此，对测量方法进行分类，对测量误差的处理来说，是必不可少的前提条件。

- 1) 等精度测量和不等精度测量。
- 2) 直接测量和间接测量。
- 3) 独立测量和条件测量。

以上三种分类，对于叙述误差的处理和计算，是很方便的，其定义及误差处理方法见以下各章。此外，测量方法还可以分为绝对测量和相对测量，个别测量和综合测量，接触测量和非接触测量等等。

第二章 评定误差的基本原理

§ 1 误差和概率分布

本章以读者已具有概率论的基本知识为基础，若读者没有学过概率论，可参看本书附录 I。

一、误差的随机性

由于误差的随机性，就不可能离开概率来谈误差的大小和精度的高低，这是一个基本原理。

对于随机误差而言，可视为一个随机变量是很明显的。在测量误差中，绝大多数随机误差是属于离散型随机变量，这是由于测量仪器有一定的分辨力，因此测得值（或误差）不可能在数轴上的某一区间内连续取值，而只能离散地取一系列的数值。但是由于测量仪器的分辨力和测量总误差相比，一般来说是很小的，因此将随机误差按连续型的随机变量进行处理更为方便。

系统误差也具有随机性，这是由于测量条件不可能绝对恒定，而使系统误差不变。测量条件通常是在一定的范围内随机变动的，因此系统误差也具有一个与测量条件密切相关的概率分布。

此外，系统误差按掌握程度可分为已定系统误差和未定系统误差（误差的大小或符号至少有一个尚未掌握）。未定系统误差常可估计为 $\pm e$ ，因此可以认为它在区间 $(-e, +e)$ 内有着确定的概率。

二、误差和概率分布

如图 2-1 所示，我们测定某一参数 x ，其真值为 x_2 ，第 i 次测量的测得值为 x_i 。从图中可以看出，由于误差的存在，测得值与真值不能重合。

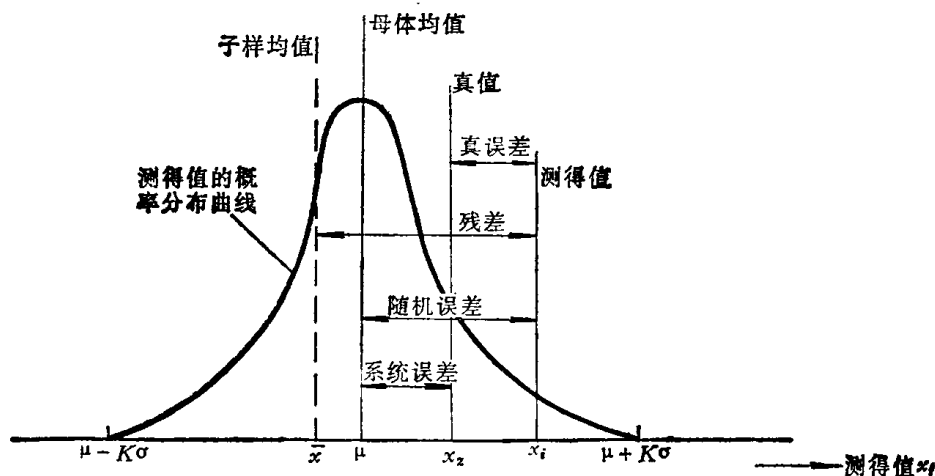


图 2-1

设测得值为具有正态分布的随机变量 $N(\mu, \sigma)$ ，由图中可以看出，正态分布曲线在数轴上的位置（即 μ 值）决定了系统误差的大小，反映了测量的正确度。正态分布曲线的形状（由 σ 值决定的）决定了随机误差的分布范围 $[\mu - K\sigma, \mu + K\sigma]$ ，以及在该分布范围内取值的概率，反映了测量的精密度。

由此可见，误差和它的概率分布是密切相关的，用随机变量来描述误差的特性，并借助概率论和数理统计学的方法来评定误差是非常有效的。

若上述的被测参数 x ，代表精密仪器的精度，那么系统误差和随机误差的大小，即反映了仪器的正确度和精密度。对指读式量仪而言，即为量仪的平均示值误差和示值的变动性。

由误差的定义可知

$$\begin{aligned} \text{误差} &= \text{测得值} - \text{真值} = (\text{测得值} - \text{母体均值}) + (\text{母体均值} - \text{真值}) \\ &= \text{随机误差} + \text{系统误差} \end{aligned}$$

即任意一个真误差均为系统误差和随机误差的代数和。用符号表示则有

$$\Delta_i = \varepsilon_i + \delta_i \quad [i = 1 \sim n \text{ (测量次数)}]$$

§2 随机子样及其数字特征

在数理统计中，随机变量 X 所取的一切可能值的全体称为母体；每一个可能值称为个体；包含若干个个体的全体称为子样；子样所容纳的个体数目 n 称为子样大小（子样容量）。子样是母体的一部分。从母体中随机抽取的子样称为随机子样。

由上一节可知，为了确定系统误差和随机误差，必须求得母体参数 μ 和 σ ，通常是采用理论计算法和实验估算法两种方法。

理论计算法是根据概率论的知识进行，即

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx \end{aligned}$$

但是，要从理论上确定分布密度函数 $f(x)$ 是很困难的，只有正态分布和一些典型的非正态分布已经解决，而误差的实际概率分布往往偏离正态分布。用实验方法也不能得到母体中的一切可能值。

因此，在实际工作中，只能进行有限次数的试验。由子样近似地找出母体的分布密度函数及其数字特征。用统计直方图近似代替分布密度曲线就是实验估算法，而且非常直观。

近来，随着计算技术的发展和电子计算机的应用，又出现了以若干直线段连接成折线来分段逼近任一分布密度曲线的方法，然后再按其概率分布特性来评定误差。

一、统计直方图（频率直方图）

我们作一试验：测量某一钢球的直径 150 次，得到观测值 $x_i (i = 1 \sim 150)$ 。为了便于进行数据处理，把观测值 x_i 及其频数 m_i ，相对频数 $f_i (f_i = m_i/n)$ ，列于表 2-1 中。表 2-1 称为频数表。

表 2-1

子区间号码	子区间中心值(毫米)		频数 m_i	频率 $f_i(\%)$	累积频率 $F_i(\%)$
	观测值 x_i	残差 v_i			
1	$x_1 = 7.31$	-0.05	1	0.66	0.66
2	$x_2 = 7.32$	-0.04	3	2.00	2.66
3	$x_3 = 7.33$	-0.03	8	5.33	8.00
4	$x_4 = 7.34$	-0.02	18	12.0	20.00
5	$x_5 = 7.35$	-0.01	28	18.66	38.66
6	$x_6 = 7.36$	0	34	22.66	61.32
7	$x_7 = 7.37$	+0.01	29	19.33	80.65
8	$x_8 = 7.38$	+0.02	17	11.33	91.98
9	$x_9 = 7.39$	+0.03	9	6.00	97.98
10	$x_{10} = 7.40$	+0.04	2	1.32	99.3
11	$x_{11} = 7.41$	+0.05	1	0.66	99.96
	$\bar{x} = 7.36$	$\sum v_i = 0$	$n = 150$		

根据频数表中的数据,就可按以下步骤作出统计直方图:

- 1) 以横坐标记数据值,以纵坐标记频率 f_i (或频数 m_i)。
- 2) 在横坐标上划分出等分的子区间。本例中子区间的数目为 11,各子区间的中心值即为观测值 x_i ,各子区间的边界值取决于各子区间的间距。本例中间距 $\Delta x = 0.01$ 毫米,则 $x_2 = 7.32$ 毫米的频率为 2%,它的含义是:观测值落入 2 号子区间(自 7.315 毫米至 7.325 毫米)的频率为 2%(或频数为 3)。

3) 画出各子区间上的直方柱,使其面积等于相应的频率,如图 2-2 所示。显然,统计直方图的总面积应为 1。

4) 把各直方柱上部的中点用直线联起来,则得到一条由许多小折线联起来的曲线。这就是用实验方法由子样得到的分布密度曲线。从曲线的形状可以看出它服从正态分布。

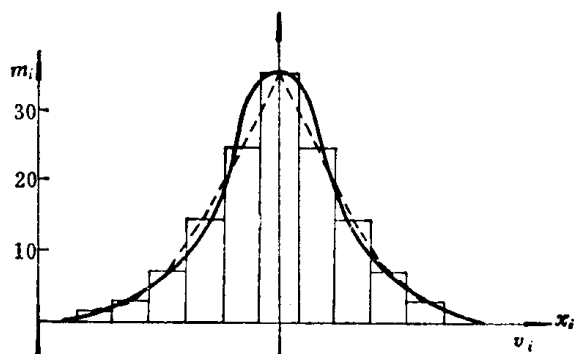


图 2-2

在图 2-2 中,若以横坐标记残差 v_i ,并将坐标原点移到算术平均值 $\bar{x} = 7.36$ 毫米处,纵坐标记为 y_i ,则得到著名的高斯误差分布曲线。

显然,若观测次数 $n \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$,那么带折线的经验分布曲线就趋于光滑的理论分布曲线了。

上述的实验估算法,在实际工作中经常采用,例如精密仪器和精密设备的精度检定。为了使实验估算法具有足够的精度,在绘制统计直方图时应考虑以下几个问题:

(一) 检定仪器的精度

检定仪器的误差应为被检定仪器的误差的 $\frac{1}{5}$,甚至 $\frac{1}{10}$ (最低限度应为 $\frac{1}{3}$),以使检定仪器的误差对检定结果的影响可以忽略不计。上例中测量钢球直径的仪器,其精度也应按此原则考虑。