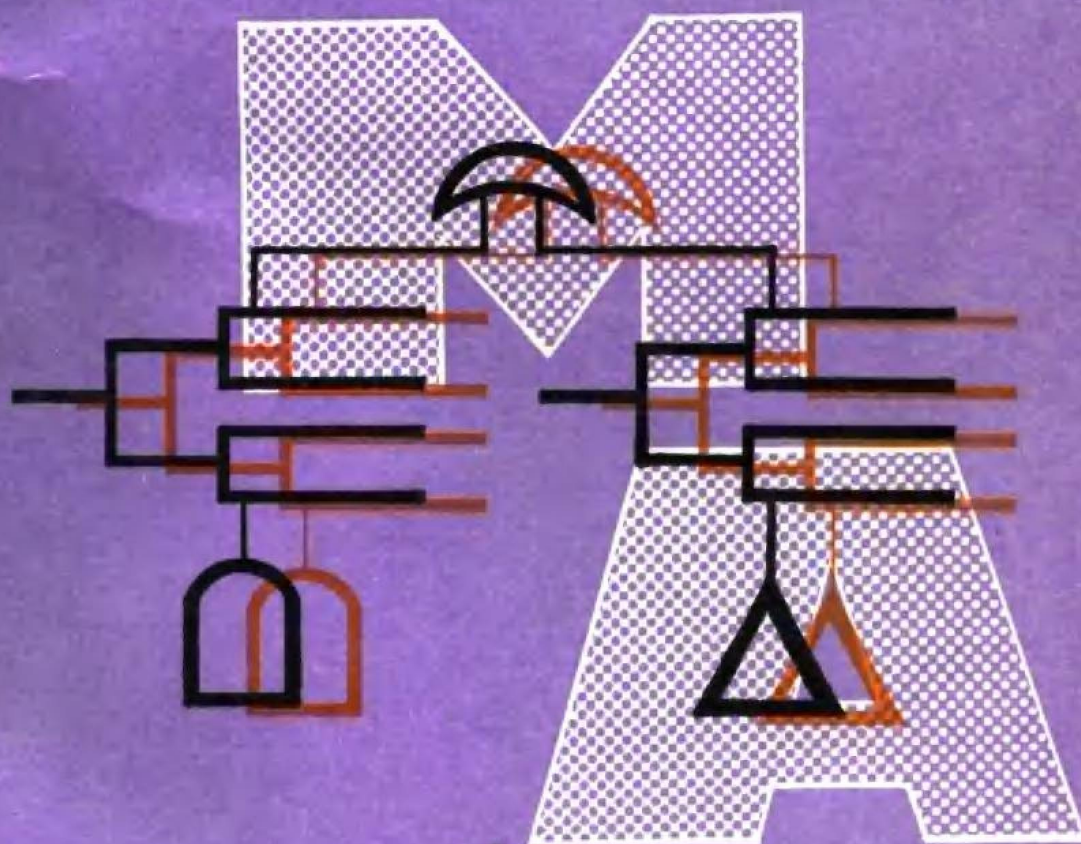


可靠性工程

黄祥瑞 编著



清华大学出版社

内 容 简 介

本书重点讲述在可靠性工程领域中有实际意义的分析方法,尤其是针对高技术中的可靠性、安全性及风险性分析中常见的方法,并收集了有用的成果和数据,以及近几年可靠性工程研究方面的新领域,如,人因、共因及风险分析等。本书可作为高等院校师生教学参考书,各章皆有习题及答案。也可作为从事可靠性工程技术人员工具性参考书。

可 靠 性 工 程

黄祥瑞 编著

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

人民教育出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/16 印张: 19.25 字数: 453 千字

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

印数: 0001~6000

ISBN 7-302-00649-0/F·41

定价: 4.20 元

前 言

可靠性工程是涉及范围极广的一门学科,近十年来,在我国各工业部门、工厂、设计研究所和高等院校被愈来愈多的人们所重视和实际应用。本书编入了作者自1976年来,从事教学与科研工作中积累的一些经验和科研成果,特别对核电站等高技术中的安全与可靠性分析中的PSA技术所涉及的理论和应用都作了较详细的介绍,书中介绍的方法和专题研究都是可靠性工程领域中的基本方法,适合于从事各类可靠性工程研究人员参考。

本书的前四章讲述可靠性工程最基本的方法,是学习可靠性工程不可缺少的基础知识,更为详细的论述可在其它的可靠性书籍中查阅到。第五章和第六章详细介绍了事件树和故障树分析的理论及应用,并结合一些实际问题进行讨论。第七章介绍了可靠性设计及管理方法,它有助于从事电子和机械产品开发的技术人员在实践中参考。第八章至第十章是可靠性工程中的专题讨论,讨论了在处理共因失效、人员可靠性分析这些困难但又十分重要的课题;以及风险分析技术在核电站的安全评价中的步骤和结果。第十一章是根据西安仪表厂高级工程师栾秉海长期亲从事可靠性管理的经验而撰写的,并且证明这些方法和步骤在实践中是切实有效的。

各章的习题和答案都是在长期的教学过程中精选的,它对掌握方法和解决实际问题有参考意义。

书末收集了一些重要的参考书图表和失效数据,以适应从事可靠性工程技术人员的查找。

在编写过程中,参考了国外大学的可靠性工程教科书以及各类参考资料。由于作者水平有限错误实属难免,恳请读者批评指正。对高云鹏副教授在内容和文字上的修改所做的贡献,作者表示衷心感谢。

黄祥瑞

1989年6月北京

目 录

第一章 概论	1
1.1 可靠性工程的任务	1
1.2 可靠性,安全性与风险性	2
1.3 可靠性工程的发展	3
第二章 可靠性工程数学	5
2.1 可靠度函数	5
2.2 常用的失效密度函数	6
2.2.1 二点分布	6
2.2.2 二项式分布	6
2.2.3 泊松分布	8
2.2.4 指数分布	9
2.2.5 威布尔分布	9
2.2.6 伽玛分布	10
2.2.7 正态分布	11
2.2.8 对数正态分布	11
2.2.9 混合分布模型	11
2.2.10 极值分布	12
2.3 概率分布的图形及相互关系	13
2.4 浴盆曲线	15
2.5 参数估计概论	16
2.5.1 统计量与抽样分布	17
2.5.2 点估计与区间估计	18
2.5.3 无偏估计量	18
2.5.4 矩法点估计	18
2.5.5 极大似然点估计	19
2.6 分布参数的区间估计	22
2.6.1 指数分布的区间估计	22
2.6.2 正态分布中的区间估计	23
2.7 非参数方法	25
第三章 系统的可靠性	27
3.1 串联、并联、串并联和并串联系统的可靠性	27
3.2 k/n 表决系统的可靠性	29
3.3 贮备系统的可靠性	30
3.4 网络系统的可靠性	33
3.4.1 结构函数	33

3.4.2	对偶结构函数	34
3.4.3	路集与割集	35
3.4.4	单调关联系统的可靠性	35
3.4.5	最小路集与最小割集的相互转换	36
3.5	概率分解法	38
3.6	用联络矩阵求系统的路集	40
第四章	可修复的系统	42
4.1	可用度与维修度	42
4.2	预防维修模型及其维修周期的确定	43
4.3	事后维修系统模型	45
4.4	定期检修模型中的可用度计算	49
4.5	更新过程	50
4.6	可修复系统的马尔可夫模型	55
4.6.1	马尔可夫过程及其基本性质和一般解法	55
4.6.2	两单元系统的马尔可夫模型	59
4.6.3	M/N 表决系统的马尔可夫模型	63
4.6.4	状态频率与持续时间	63
4.7	实际应用	66
4.7.1	电力供应不足情况下的可用度	66
4.7.2	备有高峰期间发电设备的电力系统可用度	67
4.7.3	考虑外界气候变化时的电力系统的可用度	68
第五章	事件树分析(ETA)	70
5.1	引言	70
5.2	事件树的建造	70
5.2.1	连续运转部件组成的系统事件树	70
5.2.2	有备用设备或序贯次序的系统事件树	72
5.3	事件树的简化	73
5.4	事件树的定量化	75
5.4.1	初因事件的频率	75
5.4.2	具有相互独立事件环节的事件树	75
5.4.3	事件树定量化中的相依关系	76
5.4.4	事件树定量化的区间估计	80
第六章	故障树分析(FTA)	82
6.1	引言	82
6.1.1	故障树分析法的特点	82
6.1.2	FTA 的步骤	83
6.1.3	FTA 的应用范围	83
6.2	FTA 的术语与符号	84
6.3	故障事件的分类	87
6.4	故障树的建造	88

6.4.1	建树前的准备	88
6.4.2	选顶事件	88
6.4.3	故障树建造原则及指南	89
6.4.4	故障树的建造方法	90
6.5	存在控制和反馈回路系统的故障树	108
6.5.1	节点关系图建造故障树法	109
6.5.2	节点关系图的建立	110
6.6	故障树定性分析	112
6.6.1	单调关联故障树定性分析	112
6.6.2	非单调故障树的定性分析	113
6.7	故障树的定量分析	116
6.7.1	底事件与顶事件发生概率的点估计	116
6.7.2	不交化与独立近似	117
6.7.3	顶事件的区间估计与误差传播分析	118
6.8	动态树理论(KITT)	121
6.8.1	基本参数的定义	121
6.8.2	失效-修复过程的部件微积分方程式	123
6.8.3	部件失效次数 $W(t_1, t_2)$ 和修复次数 $V(t_1, t_2)$	123
6.8.4	最小割集的有条件失效强度 $\lambda^*(t)$ 与无条件失效强度 $w^*(t)$	124
6.8.5	系统不可用度 $Q_s(t)$ 的计算	125
6.8.6	系统无条件失效强度 $w_s(t)$	126
6.8.7	短割近似法	128
6.9	重要度分析	129
6.9.1	部件概率重要度 Δg_i	129
6.9.2	部件结构重要度 I_i	130
6.9.3	关键重要度 I_i^{QP}	131
6.9.4	Fussell-Veselly 重要度 I_i^{FV}	131
6.9.5	Barlow-Proschan 重要度 I_i^{BP}	132
6.9.6	割集重要度 I_i^*	132
6.10	通用多功能微机 FTA 程序包	133
6.11	RISA 故障树分析程序的理论	134
6.11.1	截断准则的选择	134
6.11.2	系统部件的计算模型	135
6.11.3	系统的可靠性参数计算	136
第七章	可靠性设计	139
7.1	可靠性预计中的应力分析法	140
7.2	漂移设计	141
7.3	机械设计中的干涉理论	143
7.4	疲劳强度的可靠性设计	147
7.5	机械磨损量与其寿命的关系	148
7.6	机械产品老化过程的可靠度	150

7.7	冗余设计	153
7.7.1	部件冗余比全系统冗余更有利提高可靠性	153
7.7.2	部件有多种失效模式时的冗余设计	154
7.7.3	表决系统的可靠性设计	156
7.7.4	网络开关冗余系统的可靠性设计	157
7.7.5	串并联冗余系统整数优化方法	160
7.8	可靠性的优化技术	163
7.8.1	串联系统的可靠性分配	163
7.8.2	非线性规划问题中的乘法法	164
7.8.3	串联、并联系统的改进	165
7.8.4	系统可靠性的整数规划问题	167
7.9	实例:核电站主回路数目的优化	166
第八章	共因失效分析	173
8.1	概述	173
8.2	β 因子法	174
8.3	双因子法	177
8.4	马尔可夫模型计算系统共因失效	183
8.5	最小割集中共因失效计算	183
8.6	MGL方法	186
8.6.1	2/3(G)系统共因情况	187
8.6.2	1/3(G)系统共因情况	187
8.6.3	四单元冗余系统共因计算	187
第九章	人员可靠性分析	190
9.1	概论	190
9.2	应力	190
9.2.1	职业应力	191
9.2.2	操作人员应力	191
9.2.3	个人应力因素	192
9.3	人为差错	192
9.3.1	哈默人为差错分类	193
9.3.2	人为差错分类	193
9.3.3	人为差错概率的估计	194
9.4	人的行为特征与人的模型	196
9.4.1	人的行为特征	196
9.4.2	行为形成因子(PSF)	197
9.4.3	行为形成因子的选取	199
9.4.4	人的模型概念	200
9.5	人员可靠性的定量分析	201
9.5.1	广义人的行为可靠度函数与纠正错误函数	201
9.5.2	鲁克模型	201
9.5.3	人员可靠性分析的响应模型	202

9.5.4	HCR 计算模型	203
9.6	THERP 人为差错预计法	204
9.7	核电站 LOCA 事故人因分析(实例)	209
9.7.1	手动操作任务	209
9.7.2	边界条件	210
9.7.3	任务分析及 HRA 事件树的建造	210
9.7.4	行为形成因子(PSF)的修正	213
9.7.5	相关性分析	214
9.7.6	系统人员操作成功和失效概率的计算	214
9.7.7	修复因子的考虑	215
9.7.8	灵敏度分析	216
9.8	SHARP 人因分析程序	216
9.9	SLIM 法(似然权重指数法)	218
9.10	人员差错数据的获得(模拟机)	220
9.10.1	模拟机研究人员差错的任务内容	220
9.10.2	人员培训的内容及结果	221
第十章	概率风险评价	223
10.1	风险的定义	223
10.2	法默曲线及 CCDF 累积分布函数	226
10.3	概率风险评价技术	228
10.4	核电站的风险评价	230
10.4.1	WASH-1400 报告的要点	230
10.4.2	其它核电站 PSA 研究结果	244
10.4.3	IAEA 有关 PSA 的评价	248
10.5	液态金属钠冷快堆(LMFBR)的风险分析	249
10.6	高温气冷堆(HTGR)风险分析要点	251
10.6.1	AIPA 报告的结论	252
10.6.2	球床高温堆的风险研究	253
10.6.3	低温核供热堆的风险评价	255
第十一章	可靠性管理与质量控制	258
11.1	概述	258
11.2	质量的涵义及标准	259
11.3	质量保证与质量保证体系	259
11.4	可靠性管理的内容	260
11.5	设计阶段的可靠性管理	262
11.6	提高老产品可靠性的设计改进措施	266
11.7	制造阶段的可靠性管理	266
11.8	使用阶段的可靠性管理	267
11.9	质量控制及统计控制图	268
参考文献		273
练习及答案		275
附录 常用部件通用失效率数据		285

第一章 概 论

1.1 可靠性工程的任务

可靠性工程是系统工程的重要分支,它的任务是研究系统或设备在设计、生产和使用的各个阶段,定性与定量的分析、控制、评估和改善系统或设备的可靠性,并在设计中达到可靠性与经济性综合平衡。它是近 20 年来随着科学技术发展的需要而兴起的一门综合性应用学科。众所周知,系统的可靠性是指系统投入使用后,维持无故障工作的能力。当一个系统制造完毕后,它的可靠性究竟如何呢?凭工程技术人员的主观经验,可以给出一个初步的估计,但是,它不能做为系统质量可靠性评价或验收的标准。尤其是复杂系统,专家们的主观审定已愈来愈多的受到限制,因此,可靠性工程的任务也就是保证系统在设计、制造、试验和运行的整个过程达到用户所要求的可靠性。

质量与可靠性,在许多场合中当作同义词来使用,然而,它们之间是有区别的,无论是部件、整机,或是由若干设备组成的系统的质量,一般指它们在出厂时能否满足规范上的各项要求。而它们的可靠性则指在满足规范要求下,能维持多长时间,两者的差别在于使用寿命的着眼点。从

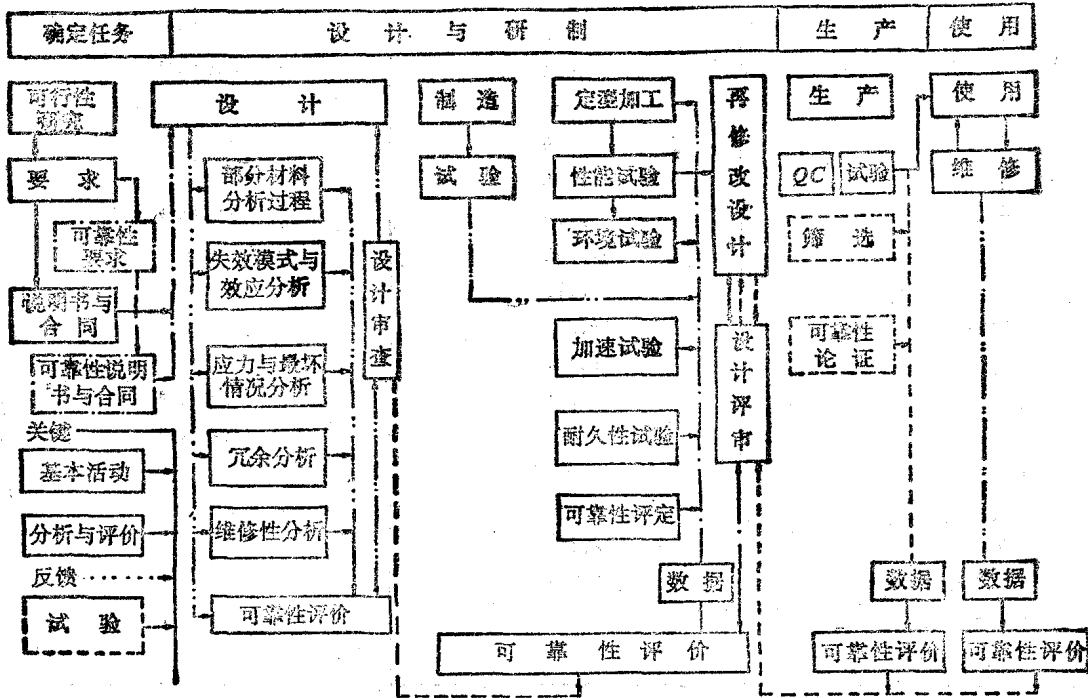


图 1.1 产品可靠性计划流程图

设计一开始,设法使系统在特定的使用条件下,特定的时间周期内,完成规定任务是可靠性的重要任务。图 1.1 给出了一般化的典型可靠性计划流程图。为了获得系统较高的固有可靠性,首先完善的设计方案以书面方式提出系统的技术指标、安全准则,以及功能要求、详尽的元器件和材料方案、周密的试验方案,建立元件、组件、整机、系统的试验制度,如质量鉴定试验、验收试验、筛选试验及性能试验,以及质量保证系统等。从管理上制定措施对有关生产人员及装配人员进行技术教育,使他们达到合格的工艺水平,实行全面质量管理和可靠性管理。

尽管量化地进行系统可靠性评定不能完全代替系统的审定,但是它可以为工程技术及管理人员提供一些有用的信息,例如,系统是怎样才会失效的?失效后果怎样?帮助改进设计,改善运行特性及减少投资。可靠性工程将有利于减少这些影响所带来的风险。

1.2 可靠性,安全性与风险性

可靠性,安全性与风险性这三个术语在词义上有一定程度的重叠,往往还相互混淆。

技术性能,经济指标与可靠性三个方面是评价产品质量的标志。它们三者之间存在着一定的折衷平衡关系。可靠性的经典定义是:系统或设备在规定的条件下,在规定的时间内,完成规

表 1.1 各种原因引起的人身早期死亡风险

事故类别	1969年死亡总人数	人身早期死亡风险概率/年 ^a
汽车	55,791	3×10^{-4}
坠落	17,827	9×10^{-5}
火灾与烫伤	7,451	4×10^{-5}
淹溺	6,181	3×10^{-5}
中毒	4,516	2×10^{-5}
枪击	2,309	1×10^{-5}
机械事故(1968)	2,054	1×10^{-5}
航运	1,743	9×10^{-6}
航空	1,778	9×10^{-6}
落体击伤	1,271	6×10^{-6}
触电	1,148	6×10^{-6}
铁道	884	4×10^{-6}
雷击	160	5×10^{-7}
飓风	118 ^b	14×10^{-7}
旋风	90 ^c	4×10^{-7}
其余	8,695	4×10^{-5}
全部事故	115,000	6×10^{-4}
核事故 (100座反应堆)	—	2×10^{-10d}

a 按全美国人口计算

c (1901—1972平均值)

b (1953—1971平均值)

d 按处于风险值的 15×10^6 人口计算

定功能的能力。规定条件包括使用条件、维护条件、环境条件等。规定时间是可靠性定义中的核心,不谈时间就无可靠性可言。可靠性指标与任务时间是紧密相关的。而规定功能一般指由用户提出的技术指标和要求。由于系统或设备失效的形式和过程不同,因此评价它们的可靠度也会有不同的方法。一个系统怎样才算是失效呢?精确地给予一个定义在工程上有时往往是非常困难的。有两类常用的失效准则。瞬时型失效是指系统在工作过程中随机地在某时刻突然地失去功能。例如,寿命型的系统可用一个非负随机变量来描述系统的寿命。另一种失效准则是非突发性的,它伴随性能衰退、老化和磨损过程,很难明确指出它的确定寿命,这类失效又称耗损失效或漂移失效,它在一些电路的设计中有重要的意义。

安全性不同于可靠性,但它们之间有密切关系。安全性的经典定义之一是:建立一种环境,使人们在这种环境下生活与工作感受到的危害或危险是已知的、清楚的,并且是可控制在可接受的水平上。安全性以风险值(风险水平)或接受的危险概率来定量描述安全性程度。风险值的计算是事故发生概率与该事故后果(人员死亡或者财产损失)的乘积。以核电站为例,定量的安全目标是:(1)对电站1英里边界上的居民所产生的平均瞬时死亡风险不应超过美国风险本底(5×10^{-4} 死亡/年)的0.1%,也就是说,瞬时死亡风险的定量设计目标为 5×10^{-7} /年;(2)在50英里范围的致癌风险不能超过本底致癌风险的0.1%,而美国癌本底风险值为 2×10^{-3} ,所以因核电站而造成的致癌风险设计目标为 2×10^{-6} /年。表1.1给出美国早期统计的各种原因引起的人身早期死亡风险数据。

1.3 可靠性工程的发展

可靠性的学科的发展是从第二次世界大战期间(1940~1945)开始,由于科学技术的迅速进步,使国防工业和军事工业中的设备系统愈来愈复杂,使用环境也较恶劣,因此产品的可用性直接决定于产品的可靠性和维修性。费用成本与产品的可靠性有密切关系。

美国发展可靠性技术最早,第一个正式的机构是电子装置可靠性咨询委员会(AGREE),为实现军用电子装置的可靠性,该委员会必须确保由科学、技术、生产和经营方面的权威人士组成,对电子装置的设计、开发、供应、生产、维修、使用和培训等各有关领域的可靠性都要进行监视。1956年初设置了9个专业分会,它们都是由专家组成的,1960年前后,陆续制定了军用规格、标准(MIL, MIL-STD),成为今日可靠性标准体系的基础。这就是可靠性工程发展的第一阶段,即调查研究、制定技术规范和标准的阶段。第二阶段从1957至1962年是统计试验阶段,即从可靠性环境试验到生产过程中的全面质量管理。第三个阶段是1968年以后,可靠性保证阶段,即全面实现以可靠性为中心的管理。日本可靠性技术的发展是在第二次世界大战以后,由于设备的事,设立了对策委员会,和产品推行全面质量管理后,日本使由美国引进的技术发挥了更大的效益,日本的产品在世界市场上取得重要的地位。

德国发展可靠性工程是从系统可靠性研究开始,为了提高德国VI, VII火箭的可靠性,发展了定量的、用统计方法处理的基本原理。它为美国导弹的可靠性研究奠定了基础。

我国可靠性工程近十年来,发展十分迅速,在可靠性数学和可靠性理论上已达到一定水平,然而可靠性技术在工业和企业中的应用尚不广泛,还没有达到先进的行列,企业管理人员的可靠性培训尚待进一步开展,我们相信,随着工业发展和管理现代化的需要,可靠性工程将会在各工业部门得到广泛的应用。

第二章 可靠性工程数学

2.1 可靠度函数

如果用随机变量 T 来表示系统从开始工作到发生故障的连续正常工作时间, 用 t 表示规定时间, 则系统在时刻 t 的可靠度 $R(t)$ 为随机变量 T 大于时间 t 的概率。

$$R(t) = P(T > t) \quad (2.1.1)$$

系统的不可靠度 $F(t)$,

$$F(t) = 1 - R(t) = P(T \leq t) \quad (2.1.2)$$

设有同一种类的产品 N_0 个, 在 $t=0$ 时开始使用或试验,

令: $N_s(t)$ = 工作到时间 t 存活的数目;

$N_f(t)$ = 工作到时间 t 失效的数目。

$$N_s(t) + N_f(t) = N_0$$

根据物理意义, 产品的可靠度由下式给出:

$$R(t) = \frac{N_s(t)}{N_0} = \frac{N_0 - N_f(t)}{N_0} = 1 - \frac{N_f(t)}{N_0} \quad (2.1.3)$$

类似地, 可以定义累计失效分布概率, 即不可靠度 $F(t)$,

$$F(t) = \frac{N_f(t)}{N_0} \quad (2.1.4)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{dF(t)}{dt} = -\frac{1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt} \quad (2.1.5)$$

当 $dt \rightarrow 0$ 时, 定义失效密度函数如下,

$$f(t) = \frac{1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt} \quad (2.1.6)$$

为了描述某一时刻产品失效的速率, 用失效率 $\lambda(t)$ 来定量的评价, 它的定义:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{\text{在 } t \text{ 到 } t + \Delta t \text{ 时间内单位时间失效的部件数}}{\text{在 } t \text{ 时刻仍然存活的部件数}} = \frac{1}{N_s(t)} \cdot \frac{dN_f(t)}{dt} \\ &= \frac{N_0}{N_0} \cdot \frac{1}{N_s(t)} \cdot \frac{dN_f(t)}{dt} = \frac{N_0}{N_s(t)} \cdot \frac{1}{N_0} \cdot \frac{dN_f(t)}{dt} = \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

或

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.1.8)$$

从概率的角度解释 $\lambda(t)$, 它是一个条件概率

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[\text{在 } [t, t + \Delta t] \text{ 区间故障} | t \text{ 时间正常}]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[t < T \leq t + \Delta t | T > t] \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P[(t < T \leq t + \Delta t) \cap (T > t)]}{P[T > t]} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P[t < T \leq t + \Delta t]}{P[T > t]} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{f(t) \Delta t}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \tag{2.1.9}
\end{aligned}$$

将(2.1.8)进行积分求解,得出一般化的可靠度函数的表达式

$$\begin{aligned}
\int_1^{R(t)} \frac{1}{R(t)} dR(t) &= \int_0^t -\lambda(t) dt \\
\ln R(t) &= \int_0^t -\lambda(t) dt \\
R(t) &= \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right] \tag{2.1.10}
\end{aligned}$$

当 $\lambda(t) = \text{常数} = \lambda$, 得到指数分布可靠度:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.1.11}$$

指数分布是最常用的一种分布,广泛地应用于电子设备的可靠性评价。

2.2 常用的失效密度函数

失效密度函数一般应当从工程中的失效数据的积累过程来确定,按照失效寿命的直方图来拟合,一般失效密度函数可分为离散型和连续型随机变量的分布函数。

2.2.1 二点分布

假定试验结果只有二个: 成功($X=1$), 和失败($X=0$)。它们的分布是:

X	1	0
$P(X)$	$1-p$	p

它的均值(期望值)与方差是

$$E(X) = m = 0 \cdot p(X=0) + 1 \cdot p(X=1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \tag{2.2.1}$$

$$D(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p) \tag{2.2.2}$$

2.2.2 二项式分布

考虑这样一类随机现象,由 n 个相同的贝努里试验组成,各试验结果相互独立,每次试验结果只有二个,成功与失败,假定成功事件 S , 失败事件 F , 在进行 n 次这样的试验中,成功 m 次的概率是多少? n 次试验的所有可能结果是由二项式方程的各个项得到:

$$[P(S) + P(F)]^n = 1 \quad (2.2.3)$$

成功 m 次随机事件的概率为

$$\begin{aligned} P(m) &= \binom{n}{m} [P(S)]^m [P(F)]^{n-m} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

其中 $P(S) = p$, $P(F) = 1 - p = q$

它的均值: $E(X) = np$ (2.2.5)

方差: $D(X) = np \cdot q$.

思考题: 试证明上述式(2.2.5)结果:

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = np$$

和 $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = npq$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^n x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n x(x-1) \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \end{aligned}$$

并注意利用公式

$$(p+q)^m = \sum_{y=0}^m \frac{m!}{y!(m-y)!} p^y \cdot q^{m-y} = 1.$$

例 2.1 设有四个相同部件组成的系统, 运行是相互独立的, 系统必须有三个以上部件工作, 每个部件的失效概率为 0.1, 求系统的失效概率?

解 列表计算各部件组合形式的概率:

部件全部正常 $p(0) = (0.9)^4 = 0.6561$

一个部件失效 $p(1) = 4 \times 0.9^3 \times 0.1 = 0.2916$

二个部件失效 $p(2) = 6 \times 0.9^2 \times 0.1^2 = 0.0486$

三个部件失效 $p(3) = 4 \times 0.9 \times 0.1^3 = 0.0036$

全部部件失效 $p(4) = 0.1^4 = 0.0001$

系统状态的组合形式按二项分布是:

$$(S+F)^4 = S^4 + 4S^3F + 6S^2F^2 + 4SF^3 + F^4$$

系统状态的总数等于各项系数和, $2^4 = 16$, 系统可靠度和失效概率为

$$R = 0.6561 + 0.2916 = 0.9477$$

$$F = 0.0486 + 0.0036 + 0.0001 = 0.0523$$

2.2.3 泊松分布

泊松分布可以在一定的条件下由二项分布推导而来, 由二项式分布可计算在 n 次试验中出现 r 次事件的概率:

$$P_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r} \quad (2.2.6)$$

如果 $n \gg r$, 有近似计算公式

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \cong n^r$$

当事件发生概率 p 比较小

$$q^{n-r} \cong (1-p)^n$$

$$P_r = \frac{(np)^r}{r!} \left[1 - np + \frac{n(n-1)}{2!} (-p)^2 + \cdots \right]$$

当 n 比较大时, $n(n-1) \cong n^2$

因此得到:

$$P_r = \frac{(np)^r}{r!} \left[1 - np + \frac{(np)^2}{2!} + \cdots \right] = \frac{(np)^r}{r!} e^{-np} \quad (2.2.7)$$

所以, n 比较大, p 比较小, $np = \mu$ 是常数, 由二项式分布直接推导出泊松分布:

$$P(r) = \frac{\mu^r}{r!} e^{-\mu} \quad r=1, 2, \dots \quad (2.2.8)$$

且有归一化条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1$$

均值:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{(\mu)^x}{x!} e^{-\mu} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \\ &= \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\mu} = \mu \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

方差

$$D(X) = E[X^2] - E^2[X] = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu \quad (2.2.10)$$

如果 μ 是事件平均发生的次数, 那么不发生事件的概率为 $e^{-\mu}$, 而发生一次概率为 $\mu e^{-\mu}$, 泊松分布的累积概率是指事件不超过 x 次的概率是:

$$P(\leq x) = \sum_{r=0}^x P(r) \quad (2.2.11)$$

将泊松分布引入与时间的关系, 且单位时间失效次数为常数, 令 $\mu = \lambda t$, 代入得到与时间有关的泊松分布形式, 其中 λ 是失效率且等于常数

$$P(r, t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \quad (2.2.12)$$

$P(r, t)$, 又称 Erlangian 分布函数, 它是泊松分布更一般的形式。当已知 t 时间已发生 $r-1$ 次失效事件, 那么在 $(t, t+dt)$ 时间间隔内再发生一次失效事件的概率密度函数

$$f(t) = \lambda P(r-1, t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t}}{(r-1)!} \quad (2.2.13)$$

在 $r=1$ 时, Erlangian 密度函数成为指数分布:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.2.14)$$

2.2.4 指数分布

指数分布是可靠性工程中常用的分布, 其均值:

$$m = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda t \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (2.2.15)$$

方差
$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t-m)^2 f(t) dt = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.2.16)$$

指数分布具有无记忆性; 若部件寿命服从指数分布, 在经过 t 时间使用之后, 如果部件仍然正常, 那么在以后的新寿命期间遵守原来的指数分布, 换句话说, 任何相同间隔部件的失效概率相等, 设部件使用 t 时间后的剩余寿命分布为

$$F_t(x) = P(T-t \leq x | T > t) \quad (2.2.17)$$

$$1 - F_t(x) = P(T-t > x | T > t) = \frac{P(T > x+t, T > t)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{P(T > x+t)}{P(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = 1 - F(x) \quad (2.2.18)$$

可见指数分布的产品与使用的开始时间无关。

2.2.5 威布尔分布

这是仅次于指数分布的广泛应用的失效分布, 它多用于反映失效率随时间不是常数的情况, 例如, 机械部件的腐蚀和磨损等过程, 分布的形状取决于形状参数 β , 较常见形式

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \right] \quad (2.2.19)$$

其中

$$t \geq 0, \beta > 0, \alpha > 0$$

两参数的威布尔分布是最常见的, 由此可得到

可靠度函数
$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t) dt = \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \right] \quad (2.2.20)$$

累积失效分布函数

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \right] \quad (2.2.21)$$

失效率函数

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^\beta} \quad (2.2.22)$$