$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

环与模

陈家鼐 著

北京师范学院出版社

环 与 模

陈家鼐 编著

*

北京师范学院出版社出版

（北京阜成门外花园村）

新华书店首都发行所发行

北 京 燕 山 印 刷 厂 印 刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：11.25 字数：276千

1989年12月北京第1版 1989年12月北京第1次印刷

印数：0,001—3,000 册

ISBN 7-81014-310-7/O·3

定价：5.50元

序　言

本书是根据1981年以来我在北京师范学院为代数专业的研究生讲授环论课的讲义写成的。

非交换环论的发展自本世纪初以来大致经历了以下三个阶段：（一）关于有限维代数的研究；（二）关于有极小条件环的研究；（三）关于一般环即不带有限条件环的研究（参考刘绍学著《环与代数》序言）。第（一）阶段研究工作的总结可见于Deuring(1935)和Albert(1964)，第二阶段的可见于Artin Nesbitt-Thrall（1944），第三阶段的可见于Jacobson（1964）和Faith Ⅰ，Ⅱ(1973，1976)，其中Faith Ⅰ又集中地讨论有极大条件的环而FaithⅡ则几乎概括了到那时为止运用同调方法于环研究所取得的全部成果。与此同时，同调代数和模论本身也迅速地发展起来。

Jacobson和Faith Ⅰ，Ⅱ的内容都极丰富，如何把这些材料的主要部分吸收到环论课程中来是件远非容易的工作。本书在借鉴国外文献的基础上作了初步的尝试。与国外大多数同类的书相比，本书的时间跨度比较大，也就是追溯得更远些并且力求按照环论发展的顺序来写。另一方面也力求使古典环论即使在模论和同调代数方法得到大量应用之后在全书中仍然有较强的贯穿性。

第一、二章介绍了古典环论的基础。这里主要是介绍Artin-Jacobson的环理论。关于有限维代数，我们建议最好为环论研究方向的学生另开（一学期的）独立课程。这方面有Deuring和Albert的经典著作，还有内容丰富的Herstein（1968）和刘绍学的《环与代数》(1983)可供学习。

第三章是关于模范畴的基本理论。包括生成和余生成理论、

分解理论、有限条件和由正则模到一般模的过渡等。它们和线性代数以及理想理论有着密切的联系。这一章的第1节和第7节也可看作是同调代数的预备知识。

第四章介绍一些由同调方法决定的特殊模类和环类。这里主要着重同调代数在环论中的应用，对于同调理论本身和与它关系密切的范畴理论则涉及不深。这一章选材比较自由，各节基本上彼此依赖不深。讲授者可以根据自己的需要来选择或加以增减。

本书的内容可以在一年内以每周4小时的进度讲完，其中第1—3章和第4章各讲一学期。如果加以适当的调整，那么第1—2章作为环论初步，第1、3两章作为模论初步，第4章的一部分加上§3.1和§3.7作为同调代数初步都可以在一学期内以每周2—3小时的进度讲完。这些课程都适合作为数学专业本科生三、四年级和各研究方向的研究生一、二年级的选修课。

本书编写时参考了Anderson-Fuller（1972）、Behrens (1965)、Cohn(1977)、Herstein(1968)、Kasch(1977)和Lambek(1966)等有关环论和模论的书。希望它们的特点能在书中得到反映。而任何缺点都应该由作者负责。

本书的编写和出版一直得到北京师范大学的刘绍学和吴品三教授，北京师范学院的梅向明、田孝贵和芮泽民诸位教授的支持和帮助，谨致以诚挚的谢意。北京师范学院出版社在出版过程中给予鼎力支持和愉快的合作，也在此一并致谢。

对于书中的缺点，请读者们多加指正。

作者

1989年于北京

著者简介

陈家鼐，1937年生于江苏南通。1960年毕业于台湾大学电机工程学系。1964年从台湾到西德攻读数学。1971年获得西柏林自由大学数学硕士，主修数学和物理。毕业后曾在西德比利菲尔德大学担任研究助理。1976年回到国内工作。现为北京师范学院数学系副教授。专业方向是环论、同调代数、群表示理论等。

目　录

第一章　基础知识

1.1　环、环同态、Abel 群的自同态环

我们首先介绍有关环和模的基本概念和方法。其中，中心化子和双中子化子的概念将是第二章中理论的基础。

我们将著重任意环 R 可以嵌入到某个 Abel 群 M 的自同态环 Endz M 中去这一事实(作为起点，我们当然可以把 M 取为“忘记”了乘法结构的 R)。然后我们逐步“缩小” Endz M 的范围并修饰这一嵌入，使我们能从这嵌入得到尽可能多的关于环 R 的结构的消息。模、中心化子、双中心化子等关键性概念的作用，都可以在这过程的发展中被认识到。

1.1.1　定义

设 R 是集合，R 具有两个内结合(记作 $+$，$\cdot$)。(R，$+$，$\cdot$)叫做环，如果

(1) (R，$+$)是 Abel 群，

(2) (R，$\cdot$)是半群，

(3) $+$ 和 $\cdot$ 是“相容的”，即 $\forall a, b, c \in R$ 有

(3a)　$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$,

(3b)　$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

注：(1) $a \cdot b$ 常写作 ab。

(2) 我们也简单地说，R 是环。

(3) 群(R，$+$)单位元的称做环 R 的零元，记作 0，$a \in (R, +)$ 的逆元记作 $-a$。

(4) 如果$(R,\ \cdot)$是有单位元的半群，就称R是有单位元的环或有1的环（记作$R\ni 1$）。半群$(R,\ \cdot)$的单位元记作1_R或1。

(5) 如果$R\ni 1$，则我们规定R的任意子环S也以1为乘法单位元。

(6) 如果$\forall a,\ b\in R,\ ab=ba$，则$R$叫交换环，这时(3a)和(3b)这两个式子可以互相导出。

1.1.2 环的例子

(1) 环的常见的例子：整数环$\mathbf{Z}$、环R上的多项式环$R[x]$、除环K上的矩阵环K_n等。

(2) 设M是Abel群，记$\mathrm{End_Z}\,M=\{f:M\to M\mid f$是Abel群同态$\}$为$M$上所有Abel群自同态的集合，在$\mathrm{End_Z}\,M$上定义两个内结合$+$，$\cdot$如下：

$$+:\ \mathrm{End_Z}\,M\times\mathrm{End_Z}\,M\to\mathrm{End_Z}\,M$$

$(f,\ g)\mapsto f+g$，$f+g$：$M\to M$定义为：$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$\forall x\in M$

$$\cdot:\ \mathrm{End_Z}\,M\times\mathrm{End_Z}\,M\to\mathrm{End_Z}\,M$$

$(f,\ g)\mapsto f\cdot g$，$f\cdot g$：$M\to M$定义为：$(f\cdot g)(x)=f(g(x))$，$\forall x\in M$

则$(\mathrm{End_Z}\,M,\ +,\ \cdot)$是有1的环。乘法单位元是$1_M$，即从$M$到自身的单位映射。

证明只须对定义1.1.1中的条件(1)—(3)逐条验证，特别注意在验证$f+g$，$f\cdot g$的群同态性质时，需要用到M的交换性。

例(2)中的Abel群M的自同态环不像$\mathbf{Z}$或$R[x]$或K_n那么常见，但这一类型的环在理论上却是极为重要的。下面将看到，任意一个环R都可以“看作”是某个合适的Abel群的自同态环的子环（在群的情形，这就是著名的Cayley定理）。也就是说，任意环R都可以被嵌入到某个合适的Abel群的自同态环中去。这

个嵌入是研究环论的一个最基本的方法。

1.1.3 定义

(1) 设 R、S 是环，映射 f：$R\to S$ 叫做一个环同态，如果 $\forall x$，$y\in R$有：

$$\text{(i)} \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$\text{(ii)} \quad f(xy)=f(x)f(y)$$

如果R、$S\ni 1$，则f还需满足：

$$\text{(iii)} \quad f(1_R)=1_S$$

(2) 环同态 f：$R\to S$ 叫做单同态、满同态、同构，如果 f作为映射是单的、满的、单且满的[1]。

单同态、满同态有时分别记作 f：$R\rightarrowtail S$、f：$R\twoheadrightarrow S$。同构通常记作 f：$R\xrightarrow{\cong}S$，或 f：$R\cong S$，或 $R\overset{f}{\cong}S$。

1.1.4 环同态的例子

(1) φ：$\mathbf{Z}\to 2\mathbf{Z}$

$$x\mapsto 2x$$

是单且满的映射，但不是环同态。例如 $\varphi(2\cdot 3)=\varphi(6)=12$，但 $\varphi(2)\cdot\varphi(3)=4\cdot 6=24$。

(2) φ：$\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_n$，$n\in N$，$\mathbf{Z}_n$的加法和乘法按照通常的定义。

$$x\mapsto\bar{x}=x+n\mathbf{Z}$$

是环同态。φ是满的，但不是单的。

(3) 设R是没有1的环。定义$(R^1,\ +,\ \cdot)$如下

$$R^1=\mathbf{Z}\times R=\{(n,\ r)\mid n\in\mathbf{Z},\ r\in R\}$$

$\forall(n_1,\ r_1)$，$(n_2,\ r_2)\in R^1$，令

$$(n_1,\ r_1)+(n_2,\ r_2):=(n_1+n_2,\ r_1+r_2)$$

$$(n_1,\ r_1)\cdot(n_2,\ r_2):=(n_1\cdot n_2,\ n_1r_2+n_2r_1+r_1r_2)$$

---

[1] 严格地说，同构的定义应该是范畴意义的，但对于任意仅具代数结构的范畴，范畴意义的同构和这里的定义是一致的，参考[19]。

不难验证，$(R^1, +, \cdot)$ 是环，它的零元是 $(0, 0)=(0_Z, 0_R)$，单位元是 $(1, 0)=(1, 0_R)$，且

$$\varphi: R\to R^1 \quad r\mapsto(0, r)$$

是单的环同态。换言之，R 可以被嵌入到 R^1 中（有时记作 $R\hookrightarrow R^1$）。

1.1.5(a) **命题**

设 R 是任意环，则存在一 Abel 群 M 使 $\lambda: R\to \mathrm{End}_Z M$ 是环单同态。

【证明】 1° 首先设 $R\ni 1$。

定义 $(M, +):=(R, +)$，由 1.1.2(2) $\mathrm{End}_Z R$ 是有 1 的环。定义 $\lambda: R\to \mathrm{End}_Z R$

$a\mapsto L_a$，L_a 的定义为 $L_a: R\to R$：$r\mapsto ar$（L_a 叫左乘）。

则 λ 是环同态，因为

(1) $\lambda(a+b)=\lambda(a)+\lambda(b)$：

任取 $r\in R$，$[\lambda(a+b)](r)=L_{a+b}(r)=(a+b)r$

$=ar+br=L_a(r)+L_b(r)=(L_a+L_b)(r)$

$=[\lambda(a)+\lambda(b)](r)$

(2) $\lambda(ab)=\lambda(a)\lambda(b)$：

任取 $r\in R$，$[\lambda(ab)](r)=L_{ab}(r)=(ab)r=a(br)$

$=L\ (br)=L_a(L_b(r))=L_aL_b(r)$

$=[\lambda(a)\lambda(b)](r)$

(3) $\lambda(1)=1_R$：

任取 $r\in R$，$[\lambda(1)](r)=L_1(r)=1r=r=1_R(r)$

2° 上面的 λ 是单的。

设 $L_a=L_b$，则 $L_a(1)=L_b(1)$，即 $a=a1=b1=b$。

3° 再考虑 R 不含 1 的情形：利用1.1.4(3)

$$\lambda: \quad R\xrightarrow{\lambda_1}R^1\xrightarrow{\lambda_2}\mathrm{End}_Z R^1$$

是单同态，因 λ_1，λ_2 是单同态（λ_2 即 1° 中的λ）。 ▮

1.1.5(b) 命题

相应地，对于任意环R（不妨设$R\ni 1$）

ρ：$R\to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}R$

$a\mapsto R_a$，R_a的定义为：R_a：$R\to R$，$r\mapsto ra$。则ρ是环单同态（R_a叫右乘）。

1.1.6 注

设$R\ni 1$，则λ，ρ是环同构$\Rightarrow R$是交换环（例：$\mathbf{Z}\cong \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}$）。

【证明】 假设R是非交换的，则$\exists a, b\in R: ab\neq ba$。但对于$R_b\in \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}R$，由于$\lambda$是环同态，$\exists c\in R$：$\lambda(c)=L_c=R_b$。因此$c=c1=L_c(1)=R_b(1)=1b=b\Rightarrow L_c=L_b=R_b\Rightarrow L_b(a)=R_b(a)\Rightarrow ba=ab$。矛盾！ ▮

在1.1.5中$(R, +)$还是太特殊，从而$\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}R$还难以充分反映$(R, +, \cdot)$的性质，因此我们在下节中引入$R$-模、$R$-同态的概念来建立比$\lambda$，$\rho$：$R\to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}R$更为一般的嵌入。也就是设法寻找适当的$R$-模$M$并把$R$嵌入到$\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}M$的一个子环中去。

1.1.7 注

以后我们将像1.1.5中那样，总是把映射写在“变量”的左侧。当然，这个约定实际上是任意的，许多作者采取右侧的约定。

习题 1.1

1. 设$M=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. M上的加法定义为

$$(m_1, m_2)+(n_1, n_2):=(m_1+n_1, m_2+n_2),$$
$$m_1, m_2, n_1, n_2\in\mathbf{Z}.$$

证明$(\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}M, +, \cdot)$是有1的非交换环，其中加+由$M$上的加法所诱导，乘法·是映射的合成。

2. 证明1.1.4(3)中的R'是有1的环且存在嵌入

$$R\hookrightarrow R', \quad r\mapsto(0, r).$$

3. 设R，S是有1的环.

(a) 试构造一个映射f：$R\to S$使f满足1.1.3(1)中的(i)，(ii)，但

不满足(iii).

(b) 考虑(a)中的f. 证明若f是满射, 则$f(1_R)=1_S$.

(c) 设同(a). 举例说明若u是R中的单位, 则$f(u)$不必是S的单位.

(d) 设同(a), 若u是R的单位且$f(u)$是S的单位. 证明$f(1_R)=1_S$且$f(u^{-1})=f(u)^{-1}$.

4. (a) 设R, S, f同上. 又设存在$0\neq r\in R$使$f(r)\neq 0$. 证明若$R\ni 1$且S是无零因子环, 则S是以$f(1_R)$为1的环.

(b) 设R是整环(即无零因子的交换环). 问环同态集$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R)$由哪些元素组成?

5. 定义: 环R叫做素环$\Longleftrightarrow \forall A, B\leqslant {}_RR_R: AB=0\Rightarrow A=0\vee B=0$.

证明下列条件是等价的:

(a) R是素环;

(b) $\forall a, b\in R: aRb=0\Rightarrow a=0\vee b=0$;

(c) $1\neq 0\ \wedge\forall A, B\leqslant R_R: AB=0\Rightarrow A=0\vee B=0$.

6. 设$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$是有限集, $\mathbf{R}^X=\{f: X\to\mathbf{R}\mid f$是映射$\}$, 在$\mathbf{R}^X$上定义加法和乘法如下:

$$(f+g)(x_i):=f(x_i)+g(x_i)$$
$$(f\cdot g)(x_i):=f(x_i)g(x_i)$$
$$f, g\in\mathbf{R}^X, i=1, \cdots, n.$$

证明:

(a) $(\mathbf{R}, +, \cdot)$是有1的交换环;

(b) $\mathbf{R}^X$是主理想环;

(c) 每个理想都可写成极大理想的交;

(d) 一切极大理想的交为O;

(e) 每个理想都是直和项;

(f) $\mathbf{R}^X$是极小理想的直和.

7. 设K是域, $R:=\begin{pmatrix}K & K\\ O & K\end{pmatrix}$. 证明对于任意$x=\begin{pmatrix}a & b\\ o & c\end{pmatrix}\in R$:

(a) x左可逆$\Longleftrightarrow x$右可逆$\Longleftrightarrow ac\neq 0$;

(b) x幂零的$\Longleftrightarrow x^2=0\Longleftrightarrow a=c=0$;

(c) x 幂等的$\Longleftrightarrow x\in\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&b\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&b\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.

(定义 $a\in R$ 叫幂零元$\Longleftrightarrow\exists n\in\mathbf{N}: a^n=0$; $a\in R$ 叫幂等元$\Longleftrightarrow a^2=a$).

1.2 R-模、R-同态、中心化子和双中心化子

1.2.1 定义

设R是环，$(M, +)$是 Abel 群，$\cdot: R\times M\to M$ 是 M 上

$$(a, m)\mapsto a\cdot m$$

的一个(以 R 为左算子区的)外结合.但下面将把 $a\cdot m$ 记作 am。

$(M, +, R\cdot)$叫做一个左 R-模，如果 $\forall a, b\in R, \forall x, y\in M$:

(1) $a(x+y)=ax+ay$,

(2) $(a+b)x=ax+bx$,

(3) $(ab)x=a(bx)$。

如果 $R\ni 1$, $(M, +, R\cdot)$除有性质(1)—(3)外还满足

(4) $1x=x$。

则叫$(M, +, R\cdot)$ 为左 R-幺模。

在不致引起误解的情形下，我们也把$(M, +, R\cdot)$简记作 ${}_RM$ 或更简单地记作 M。

1.2.2 命题

左 R-模的定义等价于:

$\exists\lambda$: $R\to\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}M$ 且 λ是 环同态。即 λ 满足

$$a\mapsto\lambda(a)$$

(1) $\lambda(a+b)=\lambda(a)+\lambda(b)$,

(2) $\lambda(ab)=\lambda(a)\lambda(b)$。

当 M 是左 R-幺模时，M 还满足

(3) $\lambda(1)=1_M$

【证明】 (1.2.1⇒1.2.2) $\forall m\in M$, 定义 $\lambda(a)(m)=am$。

(1.2.2=>1.2.1)　定义　$(a, m) \mapsto [\lambda(a)](m)$。

验证是直接的。　▌

1.2.3　**注**

(1) 右 R-模；右 R-幺模以及和1.2.2 相应的命题可以对称地得到；并且相应地有记法 M_R。

(2) 1.2.2 中的性质可以看作是 1.1.5 的推广。换言之，1.1.5(a)和 1.1.5(b) 分别说：R^1 是左-R 幺模和右 R-幺模。

(3) 常用 $M \in {}_R\underline{M}$，$M \in \underline{M}_R$ 表示 M 是左 R-模，M 是右 R-模。也分别记作 ${}_RM$，M_R（参看 3.7.2.）。

(4) 如果 M 同时是环 R 和 S 上的左模($M \in {}_R$，${}_S\underline{M}$)，则我们要求 $r(sm) = s(rm)$，$\forall r \in R$，$\forall s \in S$，$\forall m \in M$。

(5) 如果 M 同时是左 R-模和右 S-模（$M \in {}_R\underline{M}_S$），则我们要求$(rm)s = r(ms)$，$\forall r \in R$，$\forall s \in S$，$\forall m \in M$。

1.2.4　**R-模的例子**

(1) 除环K上的向量空间V（验证1.2.1）。

(2) 环 R 本身是左和右 R-模（验证 1.2.1 或 1.2.2）。${}_RR$、R_R、${}_RR_R$称做R的（左、右、双侧）正则模。

(3) 对任意环 R，$R^1(={}_RR^1{}_R)$是双侧R-模。同时 R^1 还有下列特殊性质：

$$\forall a \in R: \begin{cases} aR^1 = 0 \Rightarrow a = 0 & (1) \\ R^1a = 0 \Rightarrow a = 0 & (2) \end{cases}$$

因为，$R^1a = 0 \Rightarrow (1, 0)a = 0 \Rightarrow (1, 0)(0, a) = 0 \Rightarrow (0, a) = 0 \Rightarrow e = 0$。对称地可得到(1)式。

在 1.2.5—1.2.8 中，模指左模。关于右模的对称命题我们不再复述。

1.2.5　**定义**

设$M \in {}_R\underline{M}$，M叫忠实模，若$\forall a \in R$：$aM = 0 \Rightarrow a = 0$，或等价地，$A_l(M) = 0$。这里 $A_l(M) := \{a \in R \mid aM = 0\}$叫做 M 的

左零化子理想（$A_l(M)$ 是 R 的理想，见(1.2.8)）.

1.2.6 命题

设 $M\in {}_R\underline{M}$. λ: $R\to \mathrm{End}_Z\, M$ 是 M 的模定义所诱导的环同态.

则

(1) $\mathrm{Ker}\lambda = A_l(M)$;

(2) M 是忠实模$\Longleftrightarrow\lambda$ 是单同态.

【证明】 (1) 由 λ 的定义我们有 $\forall a\in R$: $\lambda(a)(m)=am$, $\forall m\in M$. 因此

$$\mathrm{Ker}\lambda=\{a\in R \mid \lambda(a)=0\}.$$

易证 $\mathrm{Ker}\lambda\subseteq A_l(M)$, $A_l(M)\subseteq\mathrm{Ker}\lambda$.

(2) 是(1)的直接推论. ∎

1.2.7 例

(1) 在 1.2.4(1) 中，除环 K 上的任意向量空间 V 是忠实的.

(2) 1.1.4(3) 和 1.2.4(3) 保证了任意环 R 一定有一个忠实模.

1.2.8 命题

设 $M\in {}_R\underline{M}$，则

(1) $A_l(M)\leqslant {}_RR_R$，即 $A_l(M)$ 是 R 的双边理想;

(2) $M\in {}_{R/A_l(M)}\underline{M}$ 是忠实的;

(3) $\forall I\leqslant {}_RR_R$，若 $I\subseteq A_l(M)$，则 $M\in {}_{R/I}\underline{M}$.

现在我们可以把 1.1.5 的结果加强为如下的命题.

1.2.9 命题

设 R 是环，则存在环单同态:

(1) λ: $R\to\mathrm{End}_Z\, M$, $M\in {}_R\underline{M}$ 是忠实模;

(2) p: $R\to\mathrm{End}_Z\, M$, $M\in \underline{M}_R$ 是忠实模.

1.2.10 定义

设 M、$N\in {}_R\underline{M}$，$f\in\mathrm{Hom}_Z\,(M, N)$ 叫(左) R-同态，如果

有

$$\forall x \in M,\ \forall r \in R:\ f(rx) = rf(x),$$

记作 $f \in \mathrm{Hom}({}_RM,\ {}_RN)$。

$f \in \mathrm{Hom}(M_R,\ N_R)$可以对称地定义。

在不致引起误解的情形下，$\mathrm{Hom}({}_RM,\ {}_RN)$ 和 $\mathrm{Hom}(M_R,\ N_R)$ 都简记作 $\mathrm{Hom}_R(M,\ N)$。

1.2.11　命题和定义

(1) 若 $M \in {}_R\underline{M}$，则

$$K:=\mathrm{End}_RM = \{\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}\, M \mid \forall r \in R,\ \forall m \in M:\ \alpha(rm) = r(\alpha m)\}$$

是 $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}\, M$ 的子环。

(2) 若 $M \in \underline{M}_R$，则

$$L:=\mathrm{End}M_R = \{\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}\, M \mid \forall r \in R,\ \forall m \in M:\ \alpha(mr) = (\alpha m)r\}$$

是 $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}\, M$ 的子环。

K、L 叫 R 在 ${}_RM$、M_R 上的中心化子，或简单地，${}_RM$、M_R 的中心化子。

【证明】 (1) $\forall \alpha,\ \beta \in K$

$$(\alpha-\beta)(rm) = \alpha(rm) - \beta(rm) = r(\alpha m) - r(\beta m) = r((\alpha-\beta)m),$$

$$(\alpha\beta)(rm) = \alpha(\beta(rm)) = \alpha(r(\beta m)) = r(\alpha(\beta m)) = r((\alpha\beta)m),$$

$$\forall r \in R,\ \forall m \in M.$$

$\therefore\quad K \leqslant \mathrm{End}_{\mathbf{Z}}\, M$。

(2) 类似。 ▮

1.2.12　定义

设 R、T 是环，且

(1) 设 $S \subseteq R$，$C_R(S):=\{r \in R \mid \forall s \in S:\ rs = sr\}$叫 S 在 R 中的中心化子，也记作 S^R。