航空高等院校教材

曲线·曲面·光顺

熊振翔　李心灿　王日爽　编

国防工业出版社

内容简介

本书从理论和实践两个方面介绍了工程技术中常用的曲线、曲面的构造方法，推荐了几种比较可行的光顺法则，列举了一些得到具体应用的实际例子。

占本书较大篇幅的曲线与曲面的数学模型的推导都各有一条主线贯穿始终：前者用的是所谓“待定系数法”，后者用的是所谓“母线法”。这两种方法都经过了反复使用，内容就显得比较通俗易懂，便于掌握。书中所归纳的几种光顺方法，其中大部分是我国的数学工作者（院校）和实际工作者（工厂）通力合作，共同研究总结出来的，因此有它自己的特点。最后收入的实例，也是结合某些产品部件列举的，有一定的典型性。

本书可以作为工科院校有关专业的教科书或参考书，也可以作为技术人员、工程师，特别是从事飞机、船舶、汽车的设计与制造工作的同志的应用数学读物。只要具有一般的微积分及线性代数的基本知识，就不难阅读本书。

曲线 曲面 光顺

熊振翔、李心灿、王日爽　编著

*

国防工業出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可証出字第074号

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$787\times1092^{1}/_{16}$印张$13^{1}/_{2}$　314千字

1979年12月第一版　1979年12月第一次印刷　　印数：0,001— 2,200册

统一书号：15034 1905　　定价：1 40元

序 言

近二、三十年来，随着科学和生产的飞速发展，某一类物体（如飞机、轮船、汽车等）的外形自动化设计工作，严峻地摆在人们的面前。虽然电子技术（特别是电子计算机辅助设计这样一门新的学科正在形成）的广泛应用为解决这一课题开辟了广阔的前景，可是曲线与曲面的数学模型的建立，又为电子技术能够深入这一领域提供了前提。本书就着重介绍实际应用中的曲线与曲面拟合的数学方法。

这种数学方法，最早约可追溯到两个世纪以前，例如书中提到的牛顿（Newton）插值、拉格朗日（Lagrange）多项式和伯恩斯坦（Bernstein）逼近等。尽管它们在理论上是比较臻善的，而它们在实际当中的应用却受到很大的局限性。一般说来，它们的计算量大、不稳定、收敛性也不好。直到本世纪中期，才由舍恩贝格（Schoenberg）等人提出了一种可行的有效的方法，可是它真正得到广泛而有成效的应用和在理论上的进一步发展，则是在六十年代以后的事。因此本书又特别着重在讨论这一阶段上所发展起来的有关数学方法，例如样条（spline）曲线和孔斯（Coons）曲面等。这种数学方法不同于以往的数学方法，以前的解析几何和微分几何等，虽然它们都可以引为借鉴，但是它们毕竟是研究图形的几何特点和局部性质的，所以不能与之相比。而新的数学方法则着眼于曲线与曲面的构造方法、修正技巧和整体性质，并且在计算上有着一系列的优点。

事实证实了恩格斯的话："社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。"

我们想把这些方法推荐给读者，愿工厂的工人、技术人员，学校的学生、教师以及在这方面感兴趣的同志，为学习新理论、采用新技术，为实现我国"四个现代化"，为赶超世界先进水平贡献力量。

本书从理论和实践两个方面向读者介绍了工程技术中常用的曲线与曲面的构造方法，提供了几种比较可行的光顺法则，列举了一些得到具体应用的实际例子。占本书较大篇幅的曲线与曲面的数学模型的推导，都各有一条主线贯穿始终：前者用的是所谓"待定系数法"，后者用的是所谓"母线法"。这两种方法都经过了反复使用，内容显得比较通俗易懂、便于掌握。本书所归纳的几种光顺方法，其中大部分是我国的数学工作者（院校）和实际工作者（工厂）通力合作、共同研究总结出来的，因此它有自己的特点：结合实际，行之有效。本书最后收入的实例，也是结合某些产品部件列举的，有一定的典型性。

本书是在学习国内各有关科研单位、学校和工厂的研究成果和实践经验的基础上，结合自己的工作和教学体会，以及参考国外有关文献写成的。在编写过程中，我们力求叙述明了，便于自学。因此在推导上步骤尚且详细，但没有过多地去追求理论上的严谨、完整和内容方面的包罗万象，从而使得只要具有一般的微积分及线性代数的基本知识的人即不难阅读本书。

我们向提供资料的单位和个人，向支持本书出版的各位同志，表示深深的谢意。

由于我们的水平不高、经验又少，欠妥和谬误之处在所难免，诚恳地希望读者批评、指正。

编 著 者

目 录

第一章　曲　　线

在生产实践和科学实验中，函数是常用来表达物质运动规律的数量关系的。在实际问题中遇到的函数 $y=f(x)$，虽然从原则上来说，它在某个区间$[a, b]$上是存在的，但是通常这些函数关系是通过实验测得的，例如：机翼曲线的形状；飞机发动机叶片曲线的形状；船舶曲线的形状；汽轮机叶片的形状等等，最后都是根据风洞试验或水池试验或其它一些实验确定的，即只知道这些函数 $y=f(x)$ 的一张数据表 (x_j, y_j) $(j=1, 2, \cdots, n)$，也就是说，只能用一些离散的型值点（简称离散点或型值点）来描述这些曲线的大致走向，而对于数据表以外 x 的其它值，$y=f(x)$ 是多少？怎样变化？光凭上面已知的 (x_j, y_j) $(j=1, 2, \cdots, n)$ 就无法知道了，这样就有很多不方便的地方，例如：由于它不是解析表达式，用它来分析这些曲线的几何性质，研究这些物质运动的变化规律，在机床上加工出这些曲线以及当需要不断改变曲线的形状以满足一定的设计或工艺准则时都很不方便。另外，不能用它来计算象斜率、曲率等曲线的重要属性，也不能用它来计算 (x_j, y_j) $(j=1, 2, \cdots, n)$ 以外的函数值。于是就提出这样的问题，能不能把这些函数用解析式子（公式）来表示呢？那怕表示的方法是近似的也好。例如，在建立飞机外形的数学模型时，就常常需要将离散的型值点用一条连续的、足够光滑的曲线来表示，使其在 $x=x_j$ 时，y 等于给定的 y_j，而对其它点上的 y 值，则要求用这条曲线对应的解析表达式来计算。又如，利用数控机床加工精密工件时（如机翼样板），由于通常只是给出了这些工件外形的若干离散的型值点，为了加工出这些精密工件，使加工后的外形是一条光滑的曲线，也需要将这些离散的型值点连续化而作出符合要求的曲线。总之，根据离散的型值点及有关要求构造一条连续的曲线，使它符合实际的需要，这就是我们要解决的问题。可是在以前的解析几何和微分几何中，对于这个课题，一般是就已给定的曲线、曲面去研究它的几何特性，而对于根据实际问题提出的要求如何构成这些曲线、曲面则讲述得较少。

本章专门谈曲线，我们除了对几种常用的古典的插值方法作简单的介绍外，主要是介绍二次曲线法及样条函数。在这个基础上介绍了张力样条，圆弧曲线，空间样条函数和贝齐尔-伯恩斯坦曲线等。这些方法都是着眼于将一些给出的离散点连续化而作出符合要求的曲线的一些比较基本的方法。我们在介绍各种平面样条函数及空间样条函数时，一直使用的是“待定系数法”。这一点是阅读这一部分内容时应该特别注意的。

§1　牛顿插值法

设 $y=f(x)$ 是定义在$[a, b]$上的一个连续函数，已知它在$[a, b]$上 n 个互不相同的有序点 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 上取值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，今要求作一个不高于 $n-1$ 次的多项式 $P_{n-1}(x)$ 来逼近 $f(x)$，并且使

$$P_{n-1}(x_j)=y_j \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

我们先讨论 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形。

若已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_1, x_2 上的值为 y_1, y_2，要求作一个一次多项式 $y=P_1(x)$ 使

$$P_1(x_1)=y_1,\ \ P_1(x_2)=y_2$$

那么，由直线的两点式知，这条直线的方程为

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)=P_1(x) \tag{1-1}$$

其中 $P_1(x)$ 是 x 的一次函数，称为一次插值多项式。这种插值又叫线性插值。在区间 $[x_1, x_2]$ 上用 $y=P_1(x)$ 的值去近似 $y=f(x)$ 的值，其余项为

$$R_1(x)=f(x)-P_1(x)$$

若已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_1, x_2, x_3 上的值为 y_1, y_2, y_3，要求作一个不高于二次的多项式 $y=P_2(x)$，使

$$P_2(x_1)=y_1,\ \ P_2(x_2)=y_2,\ \ P_2(x_3)=y_3$$

其几何意义就是通过三点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 作一条曲线，若这三点不在一条直线上，通过这三点的曲线就是抛物线，它是一个二次方程，其一般形式为

$$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

这里 a_0, a_1, a_2 是待定的系数，它们可由曲线 $y=P_2(x)$ 通过上述三点的三元一次联立方程来求得。这就需要求解联立方程，计算较复杂。而二次多项式 $P_2(x)$ 并不一定要写成如上的形式，它可以根据给定的条件写成其它便于计算的形式。我们知道一次函数

$$P_1(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

满足

$$P_1(x_1)=y_1,\ \ P_1(x_2)=y_2$$

而二次函数

$$Q(x)=c(x-x_1)(x-x_2)，(其中\ c\ 为待定系数)$$

满足

$$Q(x_1)=Q(x_2)=0$$

从而二次函数

$$P_2(x)=P_1(x)+Q(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+c(x-x_1)(x-x_2) \tag{1-2}$$

自然满足

$$P_2(x_1)=y_1,\ \ P_2(x_2)=y_2$$

因此，只要再利用条件 $P_2(x_3)=y_3$ 就可以求出（1-2）式中的系数 c，这比用原式定出 a_0, a_1, a_2 要简单得多。现在将 $x=x_3$ 代入（1-2）式，应得

$$P_2(x_3)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)+c(x_3-x_1)(x_3-x_2)=y_3$$

于是

$$c(x_3-x_1)(x_3-x_2)=y_3-y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)=y_3-y_2-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_2)$$

即有

$$c=\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}$$

然后，将此结果代入（1-2）式，即得

$$P_2(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}(x-x_1)(x-x_2) \qquad (1\text{-}2')$$

$P_2(x)$ 是 x 的二次函数，叫做二次插值多项式。用$P_2(x)$ 的值做为 $f(x)$ 的近似表达式，其余项为

$$R_2(x)=f(x)-P_2(x)$$

一般地，若已知函数 $y=f(x)$ 在 n 个互不相同的点 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 上取值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，要求作一个 $n-1$ 次多项式

$$P_{n-1}(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

使

$$P_{n-1}(x_j)=y_j \ (j=1, 2, \cdots, n)$$

一种方法是根据给出的 n 个条件从这个式子中求出 n 个待定的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$，这要解 n 个联立方程，计算复杂。另一种方法就是仿照上面推导一次及二次插值多项式的方法。为此，我们对（1-1）和（1-2′）式作进一步地分析，从中找出规律性的东西。

在公式（1-1）中有

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

它是函数 $f(x)$ 在$[x_1, x_2]$中的平均变化率。

在公式（1-2′）中有

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{及} \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

它们各是函数 $f(x)$ 在$[x_1, x_2]$及$[x_2, x_3]$中的平均变化率。

有时又称它们为 $f(x)$ 的一阶均差（或称差商），记作

$$f(x_1, x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

及

$$f(x_2, x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

于是公式（1-2′）中的二次因子的系数可以表示为

$$\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}=\frac{f(x_2, x_3)-f(x_1, x_2)}{x_3-x_1}$$

它是一阶均差的均差，称为二阶均差，记作 $f(x_1, x_2, x_3)$。

一般地，可以定义 $n-1$ 阶均差为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{f(x_2, x_3, \cdots, x_n)-f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}{x_n-x_1}$$

在引入均差的定义之后，公式（1-1）及（1-2′）的规律就更明显了。根据均差的定义，(1-1)及（1-2′）式可分别改写为

$$P_1(x)=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1)$$

及

$$P_2(x)=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1)+f(x_1, x_2, x_3)(x-x_1)(x-x_2)$$

事实上，从均差的定义极易得到上述公式，并且可以推广到 n 个插值点的情形，同时还可以得到插值多项式的余项。为此，只要在 n 个插值点 x_j 以外再给一个点 $x \neq x_j$，它可以是区间［a，b］上任一点，由均差的定义得

$$\begin{cases} f(x)=f(x_1)+f(x, x_1)(x-x_1) \\ f(x, x_1)=f(x_1, x_2)+f(x, x_1, x_2)(x-x_2) \\ f(x, x_1, x_2)=f(x_1, x_2, x_3)+f(x, x_1, x_2, x_3)(x-x_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x, x_1, x_2, \cdots, x_{n-2})=f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ \qquad\qquad +f(x, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})(x-x_{n-1}) \end{cases}$$

由此容易看出，将其中的第二式 $f(x, x_1)$ 代入第一式则得

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1) \\ &\quad+f(x, x_1, x_2)(x-x_1)(x-x_2)=P_1(x)+R_1(x) \end{aligned}$$

其中

$$R_1(x)=f(x, x_1, x_2)(x-x_1)(x-x_2)$$

是一次插值的余项。

类似地，若将其中的 $f(x, x_1, x_2)$ 代入上式又可得

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1) \\ &\quad+f(x_1, x_2, x_3)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad+f(x, x_1, x_2, x_3)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &=P_2(x)+R_2(x) \end{aligned}$$

其中

$$R_2(x)=f(x, x_1, x_2, x_3)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

是二次插值的余项。

由此可以得出一般的规律，这就是每增加一个插值点，只要将其中高一阶的均差代入前一公式即可。依此类推，可得

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1)+\cdots \\ &\quad+f(x_1, x_2, \cdots, x_n)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &\quad+f(x, x_1, x_2, \cdots x_n)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \end{aligned} \tag{1-3}$$

将前面 n 项记为

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x)&=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1)+\cdots \\ &\quad+f(x_1, x_2, \cdots, x_n)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1-4}$$

这是次数不超过 $n-1$ 的多项式，并且由以上的推导过程可知

$$P_{n-1}(x_j)=y_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

因此，$P_{n-1}(x)$就是所求的插值多项式，称为均差插值多项式，也称为牛顿（Newton）插值多项式。公式（1-3）称为均差插值公式，它的最后一项称为插值多项式的余项，记做 $R_{n-1}(x)$。若引入记号

$$W(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

则

$$R_{n-1}(x)=f(x,x_1,x_2,\cdots x_n)W(x)$$

上面得到的均差多项式，计算起来非常方便。每当增加一个插值点时，只需多计算一项，而 $P_{n-1}(x)$ 的各项系数恰好又是各阶均差值，很有规律。这一点可以从下述的均差表（表 1-1）中看出：

表1-1　均　差　表

x_j	$f(x_j)$	一阶均差 $f(x_{j-1},x_j)$	二阶均差 $f(x_{j-1},x_j,x_{j+1})$	三阶均差 $f(x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2})$	四阶均差 $f(x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3})$
x_1	$f(x_1)$				
		$f(x_1,x_2)$			
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1,x_2,x_3)$		
		$f(x_2,x_3)$		$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2,x_3,x_4)$		$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$
		$f(x_3,x_4)$		$f(x_2,x_3,x_4,x_5)$	
x_4	$f(x_4)$		$f(x_3,x_4,x_5)$		
		$f(x_4,x_5)$			
x_5	$f(x_5)$				

$P_{n-1}(x)$ 的系数就是均差表中下面画有横线的各阶均差。当 x 给定而要计算 $P_{n-1}(x)$ 的值时，可把 $x-x_j$ 列在均差表中右端最后一行，更便于计算。以下举例说明这种插值多项式的具体灵活应用。

〔例 1〕 设在 XOY 平面上给了六个离散点 $A_1(0.40,0.41075)$，$A_2(0.55,0.57815)$，$A_3(0.65,0.69675)$，$A_4(0.80,0.88811)$，$A_5(0.90,1.02652)$，$A_6(1.05,1.25386)$ 要求作出一条次数不超过 5 的多项式曲线通过这六个点，求这条曲线所对应的方程，并求这条曲线上 $x=0.596$ 处所对应的 y 值。

解　根据给定的条件，先作均差表如下：

j	x_j	$f(x_j)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	$0.596-x_j$
1	0.40	0.41075					0.196
			1.1160				
2	0.55	0.57815		0.2800			0.046
			1.1860		0.197		
3	0.65	0.69675		0.3580		0.034	-0.054
			1.2757		0.214		
4	0.80	0.88811		0.4336		0.034	-0.204
			1.3841		0.231		
5	0.90	1.02652		0.5260			
			1.5156				
6	1.05	1.25386					

从均差表中可以看出，四阶均差是相等的数，故五阶均差必为零，因此可做四阶插值多项式$P_4(x)$，我们利用表中划横线的各阶均差值，由公式（1-4）得

$$
\begin{aligned}
P_4(x)=&0.41075+1.116(x-0.4)\\
&+0.28(x-0.4)(x-0.55)\\
&+0.197(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)\\
&+0.034(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)
\end{aligned}
$$

这个方程所对应的曲线显然通过A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，六个点。

为了计算$P_4(0.596)$的值，计算时可用下面的方式：

$$
\begin{aligned}
P_4(0.596)=&0.41075+0.196\{1.116+0.046[0.28+(-0.054)\\
&(0.197+0.034(-0.204))]\}=0.63192
\end{aligned}
$$

〔例 2〕 某叶片一截面的样板所给列表数据如下表：

样板曲线的数据表

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x	25.67	25.92	26.66	27.90	29.13	30.36	35.29	40.21	44.88	50.02	54.91	59.78	64.64	69.48	71.91	74.32
y	48.74	48.61	48.36	48.11	47.95	47.82	47.63	47.74	48.01	48.40	48.92	49.57	50.34	51.22	51.64	52.14

现作均差表如下：

均　差　表

j	x	$f(x)$	一阶均差 $f(x_{j-1},x_j)$	二阶均差 $f(x_{j-1},x_j,x_{j+1})$	三阶均差 $f(x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2})$	四阶均差 $f(x_{j-1},x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3})$
1	25.67	48.74				
			-0.520			
2	25.92	48.61		0.18402		
			-0.338		-0.051670	
3	26.66	48.36		0.06880		0.011346
			-0.202		-0.012411	
4	27.90	48.11		0.02896		
			-0.132		-0.005146	
5	29.13	47.95		0.00992		
			-0.106		-0.000133	
6	30.36	47.82		0.01090		
			-0.039		-0.000426	
7	35.29	47.63		0.00618		
			0.022		-0.000171	
8	40.21	47.74		0.00370		
			0.058		-0.000126	
9	44.88	48.01		0.00184		
			0.076		-0.000081	
10	50.02	48.40		0.00304		
			0.106		-0.000017	
11	54.91	48.92		0.00278		
			0.133		-0.000015	
12	59.78	49.57		0.00257		
			0.158		-0.000011	
13	64.64	50.34		0.00241		
			0.182		-0.000301	
14	69.48	51.22		-0.00124		
			0.173		-0.000888	
15	71.91	51.64		0.00735		
			0.208			
16	74.32	52.14				

根据数控机床加工该零件的精度要求，由上述均差表可看出，除开始四个节点x_1, x_2, x_3, x_4构成的区间$[x_1, x_4]$之外，在$[x_4, x_{16}]$区间内，三阶均差皆近似于零（这里所谓近似于

“零”，严格地说是在所考虑的区间内有$|R_2(x)|<\delta$（公差），一般地从均差表上作粗略地判断即可）。这说明对于该样板的轮廓线如果用高次曲线来描述不仅计算量大，效果也不一定好。因此，对这种情况，我们一般不采用高次曲线，也就是说对于这个问题我们不去做十五次插值多项式，而是采用分段插值的方法来描述，即在$[x_1, x_4]$上采用三次多项式

$$\begin{aligned}P_3(x)=&48.74+(-0.520)(x-25.67)\\&+(0.18402)(x-25.67)(x-25.92)\\&+(-0.051670)(x-25.67)(x-25.92)(x-26.66)\end{aligned}$$

而在其它各段均采用二次插值多项式，即以每相邻三节点x_{j-1}, x_j, x_{j+1}（$j=5, 7, 9, 11, 13, 15$）为插值点的二次多项式，作为区间$[x_{j-1}, x_{j+1}]$上函数$y=f(x)$的近似表达式。这时牛顿二次插值多项式可写成

$$\begin{aligned}P_{j-1,j,j+1}(x)=&f(x_{j-1})+f(x_{j-1}, x_j)(x-x_{j-1})\\&+f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})(x-x_{j-1})(x-x_j)\\&(j=5, 7, 9, 11, 13, 15)\end{aligned}$$

在列表曲线中，这种牛顿插值二次多项式常被采用。

§2 拉格朗日插值法

上节介绍的牛顿插值多项式，由于计算上很有规律，因此进行实际计算时，在不少情况下（例如，当n不很大时）都可以采用。但是它却不太直观，在应用上有时也不很方便。在这一节中，我们介绍另一种形式的插值多项式，通常称为拉格朗日(Lagrange)插值多项式。问题叙述如下：

若已知n个型值点(x_j, y_j)（$j=1, 2, \cdots, n$），要求作一个次数不高于$n-1$的多项式$L_{n-1}(x)$，使插值条件

$$L_{n-1}(x_j)=y_j \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

成立。

我们所希望的是，在得到的插值多项式中，插值条件能够比较明显地反映出来。

我们仍然先来讨论$n=2$和$n=3$的情形。

若已知两点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，要求作一个一次多项式

$$y=L_1(x)$$

使

$$L_1(x_1)=y_1,\ L_1(x_2)=y_2$$

由上节知，通过两点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)的一次插值多项式为

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

为了能明显地看出插值条件成立，我们把上式改写成

$$y=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2=L_1(x)$$

即按y_1，y_2的线性关系整理。

若已知三点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)要求作一个不高于二次的多项式

$$y=L_2(x)$$

使

$$L_2(x_1)=y_1,\ L_2(x_2)=y_2,\ L_2(x_3)=y_3$$

由上节知，通过这三点的二次插值多项式可写成

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+\frac{\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}(x-x_1)(x-x_2)$$

为了能明显地看出插值条件成立，我们也把上式按 y_1, y_2, y_3 的线性关系整理成类似于 $L_1(x)$的形式，即

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3=L_2(x)$$

若已知 n 个点$(x_1,\ y_1)$，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)要求作一个次数不高于 $n-1$ 的多项式 $L_{n-1}(x)$使

$$L_{n-1}(x)=y_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

我们仿照 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形，用递推的方法可得

$$\begin{aligned}L_{n-1}(x)=&\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}y_2\\&+\cdots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n\end{aligned} \tag{1-5}$$

由这个式子，显然可以看出插值条件

$$L_{n-1}(x_j)=y_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

成立，且 $L_{n-1}(x)$是次数不超过 $n-1$ 的多项式，而形式上又是对称的。(1-5) 式称为拉格朗日多项式。

为了书写简便，我们再引入记号

$$W(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

则

$$\begin{aligned}W'(x)=&(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\\&+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

从而有

$$W'(x_k)=(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

于是可把拉格朗日多项式写成

$$L_{n-1}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{W(x)}{(x-x_j)W'(x_j)}y_j \tag{1-5'}$$

可以证明，通过 n 个不同的点$(x_j, y_j)$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的拉格朗日插值多项式只有一个。

我们用反证法来证明这一点。倘若除 $L_{n-1}(x)$外还有一个满足要求的 $\widetilde{L}_{n-1}(x)$，那么

$L_{n-1}(x)-\widetilde{L}_{n-1}(x)$是一个次数不超过$n-1$的多项式，且在$x=x_j(j=1,2,\cdots,n)$时其值为零，也就是说$L_{n-1}(x)-\widetilde{L}_{n-1}(x)$有$n$个根$x_1,x_2,\cdots,x_n$，但由于次数不超过$n-1$的多项式的根不可能超过$n-1$个，从而只有一种可能，即

$$L_{n-1}(x)-\widetilde{L}_{n-1}(x)\equiv 0$$

亦即

$$L_{n-1}(x)\equiv\widetilde{L}_{n-1}(x)$$

还应该指出，多项式$L_{n-1}(x)$的次数可能小于$n-1$，例如，当$n=2$且$y_1=y_2$时，$L_1(x)=y_1$是一个零次多项式，而非一次多项式。

以上说明，通过n个点只存在一个次数不超过$n-1$的满足要求的插值多项式，因此，不管用什么方法推导，用什么形式表示，它们实际上都是相等的。

〔**例 1**〕 求通过$A(-1,\ 1)$，$B(0,\ 1)$，$C(1,\ 1)$，$D(2,\ -5)$四点的拉格朗日插值多项式。

解 将四点代入公式(1-5)(此处$n=4$)，得

$$\begin{aligned}L_3(x)=&\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}\times 1\\&+\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)}\times 1\\&+\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)}\times 1\\&+\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}\times(-5)\\=&-\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)+\frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)-\frac{1}{2}x(x+1)(x-2)\\&-\frac{5}{6}x(x+1)(x-1)=-x^3+x+1\end{aligned}$$

〔**例 2**〕 求通过三点$(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$及$(2,\ 3)$的拉格朗日插值多项式。

解 将这三点代入(1-5)式(此时$n=3$)，得

$$\begin{aligned}L_2(x)=&\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 2\\&+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 3=x+1\end{aligned}$$

这个例子说明，过n个点的插值多项式的次数不超过$n-1$，也可能小于$n-1$。

§3 最小二乘法

用前面介绍过的拉格朗日插值多项式来拟合n个离散点的曲线，一般说来势必要导出一个$n-1$次多项式。但在不少工程技术问题中，n的次数可能是很大的，例如几十或几百，那么对于这样一个高次多项式，运算起来是很麻烦的。另一方面，由于y_1，y_2，$\cdots$，y_n时常是测量得到的数据，它本身就不是精确的数值，因此对于这类问题并不要求作出的曲线必须通过所有的点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，(x_n,y_n)，而只要求作出一条近似的曲线，使它能反映出已知这些数据的一般趋势，并且尽量不出现局部的波浪就行。对于这类问题，

可使用最二小乘法以一个低于 $n-1$ 次的多项式来实现这个目的。

现在考虑 n 对数据 $(x_j,\ y_j)(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，我们要从这些数据中找到一个近似函数关系式

$$y=f(x)$$

取最简单的情形，我们就用一个低于 $n-1$ 次的 m 次多项式

$$y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j\quad(m<n-1)\tag{1-6}$$

来表达。

为了确定这个近似多项式的系数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$，使它对于给出的数据 (x_j,y_j) 具有所谓“好的拟合”，可以根据下面的分析来处理。如果把点 $(x_j,\ y_j)$ 代入上述多项式，就有 n 个方程

$$\begin{cases}a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_mx_1^m-y_1=0\\a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_mx_2^m-y_2=0\\\cdots\cdots\cdots\\a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_mx_n^m-y_n=0\end{cases}$$

当方程的个数 n 多于未知数的个数 $m+1$ 时，上述方程组一般地是无解的。可是这些数值 $y_1,\ y_2,\ \cdots y_n$ 对于表达函数 $f(x)$ 而言，我们也很难预先认为那些不重要而去掉它们，来减少方程组中方程的个数。那么，怎样来解决这个矛盾呢？最小二乘法的原理，是解决这个问题的一种常用的法则，它处理这个问题的方法是这样的：令

$$\begin{cases}\varepsilon_1=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_mx_1^m-y_1\\\varepsilon_2=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_mx_2^m-y_2\\\cdots\cdots\cdots\\\varepsilon_n=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_mx_n^m-y_n\end{cases}$$

在上式中 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n$ 是 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ 的已知函数。虽然不能取一组 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ 使它的右边都是零，但我们可以取 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ 使得偏差平方和

$$\varphi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j-y_i\right]^2\tag{1-7}$$

达到最小。

根据通常求极值问题的方法可知，使

$\varphi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)$ 为极小的 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$，必须适合下列方程组：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_k}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j-y_i\right]x_i^k=0\qquad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

或写成

$$\sum_{i=1}^{n}y_ix_i^k=\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+j}\qquad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

为了简化书写，我们引入记号

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^k=S_k\qquad\sum_{i=1}^{n}y_ix_i^k=T_k$$

则方程组变为

$$\sum_{j=0}^{m} a_j S_{k+j} = T_k \qquad (k=0,1,\cdots,m)$$

这个方程组称为“正规方程组”。

这里是$m+1$个方程，用来求解$m+1$个未知数a_0，a_1，a_2，…，a_m，常可解出，把解出的这些$a_j(j=0,1,\cdots,m)$代入(1-6)式，即得所求的多项式曲线。

当然，在这里需要证明正规方程组的系数行列式

$$\Delta = \boldsymbol{det}(S_{k+j}) \qquad (j,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

不等于零。

我们用反证法来证明这个结论。

假定 $$\Delta = 0,$$

则对应于正规方程组的齐次方程组

$$\sum_{j=0}^{m} a_j S_{k+j} = 0 \qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

就有非零解$(a_0,a_1,\cdots,a_k,\ \cdots,a_m)$，其中$a_0$，$a_1$，…，$a_k$，…，$a_m$不全为0，现将上述方程组中第$k$个方程乘以$a_k$，然后对所有的$k$相加，则有

$$0 = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{m} a_j S_{k+j} = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k\right]\left[\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)$$

这里$f(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$，今即

$$\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) = 0,$$

则必定每一个m次多项式的值$f(x_i)=0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。但是，由于$m<n-1$，根据代数基本定理：除非所有$a_k=0$，一个$m$次多项式不能在$n\ (>m+1)$个点上的值等于零，可见以上情况不能出现，因此齐次方程组没有非零解，亦即$\Delta \neq 0$。

我们还须进一步证明正规方程组的解$a_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$确实给出$\varphi(a_0,\ a_1,a_2,\ \cdots,\ a_m)$的最小值。为此，设

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

是任意一个m次多项式，令

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - y_i]^2 - \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

则有

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-f(x_i)]^2+2\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-f(x_i)][f(x_i)-y_i]$$

但由

$$\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-f(x_i)][f(x_i)-y_i]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}[b_k-a_k]\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]x_i^k=0$$

即知

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-f(x_i)]^2\geqslant 0$$

这就表明了多项式曲线 $f(x)$ 确实使 $\varphi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)$ 取得最小值。

这里着重指出，在实际解题过程中，数据 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 可能是测得的数据，而且我们又知道某些数据测得精确一些，而另一些数据测得粗糙一些。当然我们希望粗糙的数据起的作用小些，而精确的数据起的作用大些，为此，我们可在(1-7)式中每项按其精度高低分别乘上大小不同的系数 $\lambda_i\geqslant 0$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)，而且要求

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$$

于是(1-7)式就变成

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[\sum_{j=0}^{n}a_jx_i^j-y_i\right]^2$$

而相应地有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^k=S_k,\qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_ix_i^k=T_k$$

这里系数 λ_i($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) 叫作权系数。

最后我们指出，按最小二乘法用多项式曲线去拟合给定的实验数据，一般步骤如下：

(1) 由实验数据在坐标纸上点画出实验数据函数的粗略图形。

(2) 由这粗略图形确定拟合多项式的次数。

(3) 写出正规方程组。

(4) 求解正规方程组得出拟合曲线的系数。

(5) 检验最大偏差是否在容许误差范围之内。

〔**例**〕 某一个工程技术问题，我们测出如下数据：

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y	1.00762	1.00392	1.00153	1.00000	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878
x	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	
y	0.99919	0.99967	1.00024	1.00091	1.00167	1.00253	1.00351	1.00461	1.00586	1.00721	

要求我们用最小二乘法找出一个多项式，来近似地表示 x 和 y 的变化规律。

解 按照上面指出的具体解题过程，可分以下几步：

（1）由测出的上述数据，点画出 x 和 y 的函数的粗略图形，见图1-1上离散点。

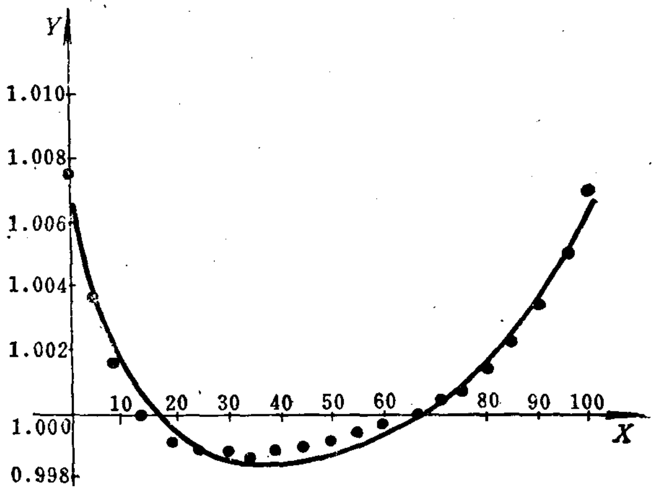

图 1-1

（2）确定函数类型。从图1-1的离散点可以看出，如果通过这些点作一条曲线，它近似于抛物线，但又不象抛物线表现出有轴的对称性，所以确定 y 和 x 的函数关系为三次多项式

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3,$$

这里 a_0，a_1，a_2，a_3 为待定的系数。

（3）写出正规方程组

$$\begin{cases}21a_0+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i\right)a_1+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^2\right)a_2+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^3\right)a_3=\sum\limits_{i=0}^{20}y_i\\ \left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i\right)a_0+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^2\right)a_1+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^3\right)a_2+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^4\right)a_3=\sum\limits_{i=0}^{20}x_iy_i\\ \left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^2\right)a_0+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^3\right)a_1+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^4\right)a_2+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^5\right)a_3=\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^2y_i\\ \left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^3\right)a_0+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^4\right)a_1+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^5\right)a_2+\left(\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^6\right)a_3=\sum\limits_{i=0}^{20}x_i^3y_i\end{cases}$$

这个方程组的未知数是 a_0，a_1，a_2，a_3，它们的系数及方程组的常数项由下表给出

	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_i^5	x_i^6
$\sum\limits_i$	0.105000×10^4	0.717500×10^5	0.551250×10^7	0.451666×10^9	0.385416×10^{11}	0.338212×10^{13}
	y_i	x_iy_i	$x_i^2y_i$	$x_i^3y_i$		
$\sum\limits_i$	0.210280×10^2	0.105200×10^4	0.719514×10^5	0.553187×10^7		

（4）用消去法求解上述方程组，得

$$y=1.006447-0.0004987884x+0.000008459123x^2-0.00000003453391x^3$$

（5）画出这条三次曲线，见图1-1的曲线。从图上可以看出，最大偏差是在 $x=0$ 处出现，其误差为0.0012，如果认为这样大小的误差可以容许，我们就可以用这条三次曲线来拟合原给定的数据。