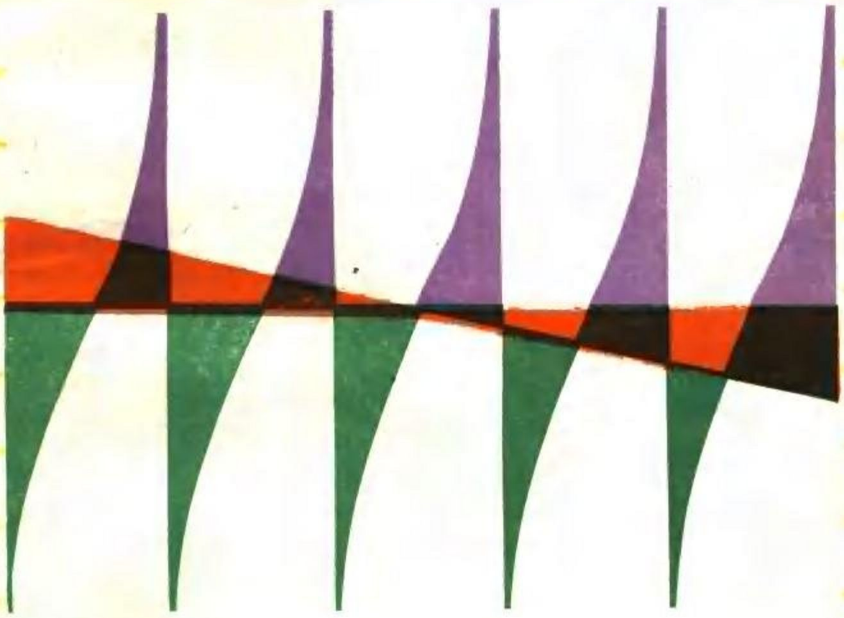
魏季和 编著

下册

冶金工程数学



冶金工业出版社

冶金工程数学

下　册

魏季和　编著

冶金工业出版社

内 容 简 介

本书分上、下两册。上册包括场论、傅里叶级数及傅里叶积分、数学物理方程、线性代数和计算方法等五章；下册包括概率论和数理统计、过程最优化方法等两章。书中简明扼要地叙述了有关的数学基本原理，结合实例介绍了这些基本原理在冶金、化工等领域中的应用。书后列有十个附录，其中上册有五个：附录Ⅰ为梯度、散度、旋度及调和量在柱坐标系和球坐标系中的表示式；附录Ⅱ为傅里叶变换和拉普拉斯变换表；附录Ⅲ简要介绍了几个特殊函数，并给出了Γ函数表和贝塞尔函数表；附录Ⅳ为误差函数表；附录Ⅴ列出了某些超越方程的根。下册有五个，为一些常用的数理统计表。

中国科学院学部委员、冶金学家邵象华，以及北京钢铁学院教授曲英分别为本书作序。曲英教授和西安冶金建筑学院数学教研室石殿璋副教授分别校阅和审阅了全稿。

本书可作为冶金科技工作者的参考书，对化学和化工、环境工程等方面的科技工作者亦有参考价值，还可作为高等学校有关专业的教学参考书。

冶金工程数学

下　　册

魏季和　　编著

*

冶金工业出版社出版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32　印张15 5/8字数 412 千字

1988年7月第一版　　1988年7月第一次印刷

印数00,001～1,830册

ISBN 7-5024-0145-8

TF·52　定价4.55元

序　一

《冶金工程数学》的出版，是一件值得欢迎的事。

近二、三十年来，冶金科学和技术在世界范围内得到了迅速的发展。冶金工作者所面临的问题变得更加复杂了；数学作为描述和求解这类问题的语言和方法，也变得更为重要。这也许主要是因为冶金过程，不论是生产中的还是实验中的冶金过程，一般都是多变量的复杂过程，冶金工作者的任务，日益明显地涉及分析过程中诸变量之间的关系。要做到这点，就必须具备对过程作数学表达和数学分析的能力。用到的数学不但数量增多，而且门类也越来越广。在冶金生产和科研中有效地应用计算机，也要求冶金科技工作者熟悉有关的数学方法。

就数学而言，大部分年长一些的冶金工作者过去学得不多，用得更少，所以往往不太熟悉。年轻一些的同志受过的数学基础教育比较好，但一般说经验较少，对于如何用数学方法研究和解决实际问题，也往往不太熟练。我觉得，本书给我们冶金界的同事们提供了一个方便，能帮助大家在较短的时间内更好地掌握数学工具，来更好地解决为实现四个现代化而做的工作中所遇到的科技问题。

邵象华

1984年1月，于北京

序　二

冶金是一门古老的技艺。我国殷周时代，青铜冶铸技术就得到了蓬勃发展；春秋战国以来，冶铁术的发展呈现了丰富多彩的面貌。然而，由于没有科学的指导，很多优秀的技艺没有能传授下来，而湮没在漫长的历史之中，成为今天科技史学者的研究对象。

本世纪三十年代以来，在化学、物理学和数学等基础科学的推动下，冶金终于由技艺发展成为一门工程科学。特别在六十年代以后，冶金学的发展极为迅速，并且日臻成熟，其标志是广泛应用动力学和传输现象理论分析冶金过程，控制冶金生产，极大地提高了生产的质量和效率。

数学是一切工程科学的共同基础。冶金学的迅速发展，现代数学起了重要的作用，没有现代计算数学的帮助，传输现象理论在冶金中的应用几乎是不可想象的。对于冶金科技工作者来说，了解现代数学的各重要领域的成就，掌握数学工具并加以运用，无疑是很有必要的。

国外出版的化学工程数学书籍，已有很多版本，它们对冶金工作者掌握现代数学工具是有益的。但直接与冶金相结合的工程数学书籍，则仅见日本鞭巖等所著《冶金实用数学》一书。

魏季和同志结合多年工作经验，写成《冶金工程数学》一书，是在这方面的首次尝试。我读过手稿后，感到获益非浅。他把数学中的微分方程、计算技术、统计分析、最优化等方法和冶金工程中的问题相结合，展示了在冶金领域应用数学来分析问题的技巧。书稿中关于数学基本规律的介绍，也比较简明扼要。相信《冶金工程数学》一书的出版，对于我国的冶金科技工作者，是会有所帮助的。谨祝作者的辛勤努力取得成功。

曲　英　于北京钢铁学院

1983年7月28日

前　言

近二十余年来，冶金科学和技术，无论在新冶金过程的开发和研究还是在原有操作工艺的改进方面，都取得了进步，其中一个显著的特点是在分析冶金问题和体系以研究工业过程及其控制时，更多地利用了数学方法。这在很大程度上是由于在冶金过程研究和冶金体系的设计及操作中，引入了包括传质、传热和动量传输理论在内的科学原理所致。这些科学原理在冶金中的广泛应用，使冶金科学和技术发生了质的变化，开始向数学化和精确化的方向迈进，进入了冶金发展史上的新阶段。

在这种发展和变革中，电子计算技术起了极大的推动和促进作用，它为运用数学方法来分析和控制冶金过程提出了必要性，也提供了可能性。

因此，作为工程科学的基础，数学在冶金科学和技术的研究及发展中所起的作用和重要性变得越来越明显。冶金不需要很多数学知识的传统观念已被彻底冲垮，八十年代的冶金工作者必须具备更多的数学知识。

为适应这种情况，写成本书。在这以前，笔者曾为大学本科高年级学生开设过选修课程“冶金工程数学”。但是，由于学时所限，仅讲述了部分内容。现在写成的这本书，内容较丰富，共分七章，第一章场论，主要介绍梯度、散度及旋度等重要概念和场论中的一些重要公式；第二章扼要介绍了傅里叶级数，包括二重傅里叶级数，着重介绍了傅里叶积分和积分变换；第三章讨论了几个特殊的数学物理方程，重点是与冶金过程密切相关的导热（扩散）方程，以及求解定解问题时最常用的分离变量（傅里叶）法，附带介绍了积分变换法等方法；第四章线性代数，阐述了行列式，矢量和有关矩阵的理论，以及线性代数方程组的一般理论和求解方法；第五章讨论了一些常用的计算方法和必要的

误差分析；第六章介绍有关概率论和数理统计的基本理论及方法；最后一章过程最优化方法，讨论了最优化的基本概念和有关过程模拟的问题，以及处理各类最优化问题的一些基本的数学技巧。为方便读者，书后共有十个附录，上、下册各五个。由于篇幅所限，并考虑到具体情况，本书未涉及复变函数等内容。本书大部分内容曾在讲师、工程师以上冶金科技人员进修班上讲述过。

对于工程技术人员来说，数学只是一种工具。因此，本书只着重于介绍有关的基本原理和实际应用，不追求严格的论证。在尽可能不失去数学本身的科学性的前提下，力求叙述通俗易懂，并结合冶金实例来阐述有关的数学规律和方法，大多数例题是冶金工作者熟悉的冶金问题，以期做到“从冶金中来，到冶金中去”，也便于已具有微积分知识的读者自学。但愿本书对于冶金工作者应用数学方法来分析和处理各种冶金问题，对于促进我国冶金科学和技术的发展，能有一点裨益和作用。

在酝酿和撰写本书的过程中，自始至终得到北京钢铁学院曲英教授的热情鼓励和支持，他还校阅了全稿；西安冶金建筑学院数学教研室石殿璋副教授审阅了全稿。他们都提出了许多宝贵的意见。笔者谨向他们致衷心的感谢。本书得以完成，也是与冶金界的许多同志，特别是冶金界的前辈、我的老师邵象华，魏寿昆、梁宁元等教授，以及中国金属学会的有关领导、冶金过程动力学及反应工程学学术委员会的鼓励和支持分不开的。在此，表示衷心的感谢。另外，书中不少例题所用的数据，引自一些已公开发表的论文和内部资料，因条件所限，未能将这些论文及资料一一列出。笔者在此谨对诸位原作者表示深切的谢意和歉意。

最后要指出的是，由于笔者水平十分有限，书中定会有不少缺点和错误，诚恳希望广大读者批评指正。

魏季和　于西安

1983年7月初写

1985年1月改写

1987年9月再写

总 目 录

第一章 场 论

第二章 傅里叶级数及傅里叶积分

第三章 数学物理方程

第四章 线 性 代 数

第五章　计　算　方　法

第六章　概率论和数理统计

第七章　过程最优化方法

下　　册

目　　录

第六章　概率论和数理统计

第七章 过程最优化方法

第六章 概率论和数理统计

§6-1 引 言

象其它科学技术领域一样，在冶金过程研究和冶金生产实践中，也经常会遇到一类现象，它们有一个共同的特点，即在相同的条件下作一系列试验或观测时，每次试验或观测的结果都显示出不确定性。换言之，每次试验或观测的可能结果不是唯一的。因而，在每次试验或观测之前，其结果无法确切预计。

例如，在正常生产条件下，铁水和钢水的化学成分；转炉吹炼时间；出钢时钢水的温度；钢水在钢包中的镇静时间；等等，它们总在一定的范围内波动，不可能预先确知。

又如，在同样条件下向钢包加入同样成分同样数量的脱氧剂及合金添加剂所得钢的化学成分；在同一台轧机上使用同种孔型和钢坯轧制同种型钢材所得产品的尺寸；同一批钢材的机械性能；等等，也都无法预先确知。

这类现象的另一个共同点是，尽管就每次试验或观测结果来说，具有不确定性，但在大量重复试验或观测的情况下，其结果总会表现出某种固有的规律性，即所谓统计规律性。这种在个别试验或观测中显示出不确定性，而在大量重复试验或观测中则具有统计规律性的现象，称之为随机现象。概率论和数理统计就是研究随机现象的数学工具。

概率论与数理统计之间有着密切的联系。大体上说，概率论研究大量同类随机现象所遵循的基本规律，是数理统计的理论基础；而数理统计则利用这些基本规律，根据试验或观测到的数据，对研究对象的客观规律作出种种合理的估计和判断；是概率论的实际应用。

鉴于随机现象的普遍性，概率论和数理统计的理论和方法具

有普遍意义，它已经渗入包括冶金科学和技术在内的各个科技领域，正在获得越来越广泛的应用。我们将结合冶金实例，着重介绍概率论的基本原理和常用的数理统计方法。

§6-2　概率论的基本概念

6-2-1　样本空间和随机事件

上面所说的随机现象，一般说来，它可以是数量性的，如前述铁水和钢水的化学成分，轧制型钢的尺寸，钢材的机械性能等；也可以是具有不同属性的，如在相同的生产工艺下某合金钢材产生或不产生点状偏析、白点、发纹等。此外，随机现象可以是简单的，也可以是复合的；可以是单一的，也可以是多重性的。例如，考察每炉钢水的浇注结果，有一支锭报废或两支锭报废，这是简单的随机现象，而有三支以下的钢锭报废则是复合的，它包含了有一支锭报废和两支锭报废这两种情况；如果只考虑某批钢材是否满足机械性能要求，那末所研究的问题就是单一性的，而除考虑是否满足机械性能要求外，若还要考察其满足或不满足机械性能要求时的钢材重量，则问题就变成多重的。

可以通过试验或观察来研究随机现象。如果某个试验可以在相同的条件下重复进行；在每次试验中可能出现的结果不只一个，且事先能确知所有可能的结果；而每次试验究竟出现哪个结果，事先却不能肯定，那么，称该试验为随机试验，简称试验；并把试验中可能出现的每个最基本的结果称为该试验的样本点，以ω示之。所有样本点的集合就是该试验的样本空间，记作 Ω。

举例来说：

测定正常生产条件下k炉高炉铁水的含碳量，其值均波动在C_{min}和C_{max}之间，则该试验的样本空间为：

$$\Omega_1=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_k,\ C_{min}<\omega_k<C_{max}\},$$

ω_k表示第k炉铁水的含碳量；它共有k个样本点。

考察某批合金钢材产生发纹与否，若以ω_1、ω_2分别表示产生和不产生发纹，那末，该试验的样本空间由两个样本点组成：

$$\Omega_2=\{\omega_1,\ \omega_2\}。$$

测试某种高温合金棒材 700°C和 30kgf/mm²应力下的持久寿命，若以ω_t表示其寿命为t小时（$t\geqslant 0$），相应的样本空间为：

$$\Omega_3=\{\omega_t,\ t\geqslant 0\},$$

它有无限多个样本点。

在随机试验的每次试验中可能出现也可能不出现的一些结果，称为该试验的随机事件，简称事件，它们是某些样本点的集合，一般以 A、B、C 等表示：只含有一个样本点的事件称为基本事件。因此，某个试验的事件是由基本事件所组成，或本身就是基本事件，它是该试验的样本空间Ω中的一个子集。

例如，在考察某批合金钢材出现发纹情况的试验中，事件A为出现发纹，事件B为不出现发纹，则

$$A=\{\omega_1\},\ B=\{\omega_2\}。$$

又如，在测定某种高温合金棒材 700°C和 30kgf/mm²应力下的持久寿命的试验中，事件A为寿命超过 100h，事件B为寿命不到200h，事件C为寿命介于100h与200h之间，则有：

$$A=\{\omega_t,\ t>100\},\ B=\{\omega_t,\ 0\leqslant t<200\},$$

$$C=\{\omega_t,\ 100<t<200\}。$$

在某个试验中，亦即在一定的条件下，必然发生的事件，称为必然事件；必然不会发生的事件，称为不可能事件。例如，在标准大气压下，加热到100°C的水沸腾是必然的，这是必然事件；常温常压下，石墨转变成金刚石是不可能的，这是不可能事件；等等。任一试验的样本空间Ω必然发生，它也是必然事件；与此相对应，不可能事件是不含任何样本点的集合，即空集，记作Φ。必然事件和不可能事件具有确定性，因此，它们不属于随机事件。但是，为以后讨论方便，可以把它们看作为特殊的随机事件来处理。

现在我们可以看到，通过试验或观察来研究随机现象，实际上就是研究相应的随机事件。为此，必须了解事件间的关系和事件的一些运算法则。在某个试验的样本空间Ω内，

1）如果事件A的发生，必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，或称事件A是事件B的子事件，记作$B\supset A$，或$A\subset B$。例如，“钢水化学成分不合格”必然导致“钢水报废”，所以“钢水报废”这一事件包含了“钢水化学成分不合格”这一事件。为便于讨论，对任何事件，设定$\Phi\subset A\subset\Omega$。

如果事件B包含A，事件A也包含B，即$B\supset A$和$A\supset B$同时成立，则称事件A与事件B相等，记作$A=B$。

2）事件A和事件B至少有一个发生而组成事件，则称这一事件为事件A与B之和，记作$A\cup B$，它由A与B的全部样本点组成。例如，如果只需考虑碳和硅这两个成分，“钢水化学成分不合格”就是“含碳量不合格”与“含硅量不合格”这两个事件之和。

推而广之，如果事件A的发生等价于事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中至少有一个发生，则称事件$A$为事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…的和，可记作：

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n。$$

设钢中合金元素和杂质元素个数为k，以$A_n(n=1, 2, \cdots, k)$表示“相应元素的含量出格”，则“钢水化学成分不合格”这一事件可表示为：

$$A=\bigcup_{n=1}^{k}A_n。$$

3）事件A发生而事件B不发生所组成的这一事件，称为事件A与事件B的差，记作$A-B$，它由在A内而不在B内的全部样本点组成。例如，“钢水的含碳量合格，但含硅量不合格”就是“钢水含碳量合格”与“钢水含硅量合格”这两个事件之差。

4）事件A和事件B同时发生而组成的事件，称为事件A与事件B的积或交，记作$A\cap B$或AB，它由A与B共有的全部样本点组成。例如，氧气转炉吹炼终点“命中”包括钢水含碳量合格和钢水温度合格两方面，因此，终点“命中”就是含碳量“命中”

和温度“命中”的积。类似地，可以定义一系列事件 A_1，A_2，…，A_n，…的积，记作：

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n。$$

5）如果事件A和事件B不能同时发生，即A的发生必然导致B不发生，反之亦然，则称事件A与事件B互不相容，这时有$AB = \phi$。例如，在测定某种高温合金棒材 700℃ 和 30kgf/mm^{2}应力下的持久寿命的试验中，“寿命不到100h”与“寿命超过200h”是互不相容的，而“寿命介于100h到200h 之间”则为“寿命超过 100h”与“寿命不到 200 h”这两个事件之积。所有基本事件都必是互不相容的。

6）在试验中，事件A和事件B两者中必然有一个且只有一个发生，对于这种情况，则称事件A与事件B互逆，或互称对立事件，记作$A = \overline{B}$或$B = \overline{A}$。这时，两者必满足$A \cup B = \Omega$，$AB = \phi$。例如，“钢水化学成分合格”与“钢水化学成分不合格”，“持久寿命超过200h”与“持久寿命不超过 200h”，等等。

7）如果几个事件分别发生，且互不影响，则它们是相互独立的，称之为独立事件。例如，在钢种相同的情况下，钢水“因含碳量不合格而报废”与“因含硅量不合格而报废”可看作是互不影响的，故它们是相互独立的。容易理解，若事件A与事件B两者相互独立，则$\overline{A}$与B，和A与$\overline{B}$，以及$\overline{A}$与$\overline{B}$亦分别相互独立。

在实际应用中，往往根据专业知识来判断事件的相容性以及独立性。

8）随机事件的运算符合如下规律：

交换律　$A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$；

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(AB)C = A(BC)$；

分配律　$(A \cup B)C = AC \cup BC$，

$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$；

对偶律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，　$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$。