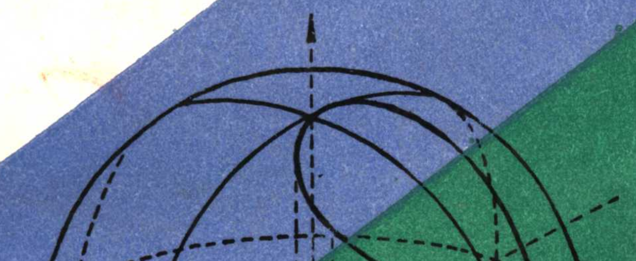
下册

高等数学自学指南

毛瑞庭　王树禾　编



中国科学技术大学出版社

高等数学自学指南

下 册

毛瑞庭 王树禾 编

中国科学技术大学出版社

1992·合肥

（皖）新登字08号

高等数学自学指南

下　册

毛瑞庭　王树禾　编

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号，230026）

安徽省金寨县印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32　印张：14.25　字数：369千

1992年7月第1版　1992年7月第1次印刷

印数：1—18000册

ISBN7-312-00335-4/O·108　定价：6.50元

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何与平面解析几何相仿，是通过建立空间坐标系，把空间的点与一个有序三数组对应起来，把空间的曲面和曲线用三元方程和三元方程组来表示，从而可以用代数的方法来研究几何问题，并且对三元方程或方程组给出几何意义和相应的图形表示。

正象平面解析几何的知识对学习一元函数微积分不可缺少一样，空间解析几何的知识对于学习多元函数微积分则是必要的。

本章首先建立空间直角坐标系，介绍在数学、物理和工程技术上极为有用的向量代数，并以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面和空间曲线。

一　学习要求

（1）掌握空间直角坐标系、柱坐标系和球坐标系。并弄清在这些空间坐标系中，空间的点与一个有序三数组的对应关系。

（2）正确理解空间点的坐标概念，弄清直角坐标与柱坐标，直角坐标与球坐标间的关系。

（3）会用平行六面体表示空间点的位置，确定点的直角坐标。

（4）会求空间两点间的距离。

（5）已知球心坐标和半径，会写出球面方程。

（6）熟练掌握向量、点的向径、向量的加（减）法、向量与数的乘积、向量的模、单位向量、零向量、负向量等概念。以及向量加（减）法及向量与数乘积的坐标表示法。

(7) 熟练掌握向量的数量积与向量积的概念，以及它们的运算法则和坐标表示法。

(8) 熟记两向量平行、垂直的充要条件。

(9) 会求两向量的夹角。

(10) 熟练掌握平面的点法式与一般方程，会由平面的方程作平面的图形。

(11) 熟练掌握空间直线的一般方程和标准方程。

(12) 会求点到平面的距离。

(13) 会判断平面与平面，直线与直线，直线与平面间的各种位置关系。

(14) 会求空间曲线在坐标面上的投影。

(15) 掌握几种特殊二次曲面(球面，椭球面，柱面，抛物面，圆锥面)的方程，并会画出它们的图形。

重点：向量的运算及其坐标表示法，两向量平行，垂直的条件，平面的点法式方程，直线的标准方程，两平面平行、垂直的充要条件，两直线共面，平行、相交的充要条件，几种特殊二次曲面的方程及其图形的画法。

难点：向量的向量积及坐标表示法，双曲抛物面的图形。

二　内容提要与评述

1　空间直角坐标系

过空间一个定点O，作三条互相垂直的直线，在这些直线上取定一个相同的单位长度，再各选一个方向作为正方向，即得三条坐标轴—x轴，y轴，z轴。规定这些坐标轴构成右手系，这样就在空间建立了一个直角坐标系$Oxyz$。

2　空间点M的坐标

(1) 直角坐标。设M为空间一已知点，我们在空间建立一

个直角坐标系，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P, Q, R（图 7.1），这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z,则有序三数组(x,y,z)与点 M 之间建立起一一对应关系，(x,y,z)称为点 M 的直角坐标。

（2）柱坐标。设点 M 在坐标面 xOy 上的投影为点 M'，且点M' 的极坐标为(r,φ)，则有序三数组(r,φ,z)称为点 M 的柱坐标（图 7.2, 7.3）。

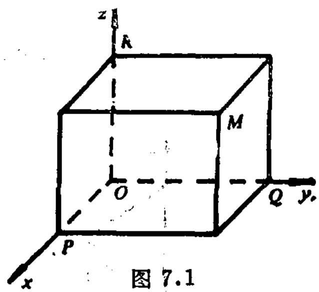


图 7.1

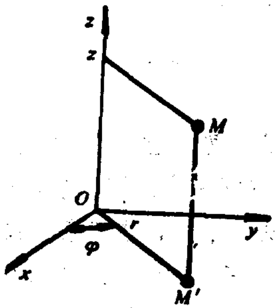


图 7.2

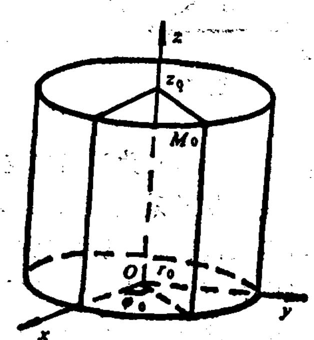


图 7.3

（3）球坐标。设点 M 是空间的一点，在给定的直角坐标系 $Oxyz$ 中，如下有序三数组(r,φ,θ)称为点 M 的球坐标，其中 r 为点 M 到原点的距离，φ是通过 z 轴和点 M 的半平面与坐标面 xOz 的夹角，θ 是线段 OM 与 z 轴正方向的夹角（图 7.4, 7.5）。

（4）直角坐标与柱坐标的关系

设点 M 的直角坐标为(x,y,z)，柱坐标为(r,φ,z)，则有

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

(5) **直角坐标与球坐标的关系**

设点 M 的直角坐标为(x, y, z)，球坐标为(r, φ, θ)，则有

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

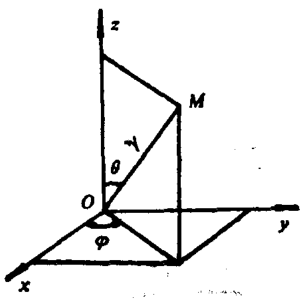


图 7.4

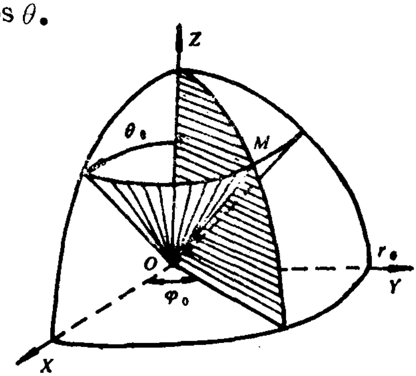


图 7.5

评述 (1) 为了确定空间点的位置，首先要在空间建立坐标系，在空间选定一点 O（原点）并过点 O 作三条不共面的直线，规定直线的正方向，并成右手系，在三条直线上取定一个相同的单位长度，就成了一个（右手）坐标系。若三条直线两两互相垂直就是空间直角坐标系，若三条直线不垂直就是空间仿射坐标系。

(2) 空间的任一点 M 与一个有序三数组(α, β, γ)能一一对应时，则有序三数组(α, β, γ)就是空间点 M 的坐标。当空间点 M 与有序三数组(x, y, z)一一对应时，(x, y, z)就是 M 的直角坐标，当空间点 M 与有序三数组 (r, φ, z)一一对应时。(r, φ, z)就是点 M 的柱坐标，当点 M 与有序三数组(r, φ, θ) 一一对应时，(r, φ, θ)就是点M的球坐标。

2 空间两点间的距离

设空间两点 M_1，M_2 的直角坐标为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2,$

y_2, z_2)，则 M_1 与 M_2 的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

评述 空间两点的距离公式是基于勾股定理推得的，因此当两点的M_1,M_2的坐标不是直角坐标时，首先要化成直角坐标，才能使用上述公式。例如，已知空间两点 M_1，M_2 的柱坐标分别为 $M_1(r_1, \varphi_1, z_1)$，$M_2(r_2, \varphi_2, z_2)$。则

$$|M_1M_2| = \sqrt{(r_2\cos\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1)^2 + (r_2\sin\varphi_2 - r_1\cos\varphi_1)^2 + (z_2-z_1)^2},$$

而不等于$\sqrt{(r_2-r_1)^2+(\varphi_2-\varphi_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

3 向量

(1) 向量的概念

具有大小和方向的量称为向量，向量可以用一条有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。向量通常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 等表示。我们把长度相等，方向相同的向量都看成是相等的。因此向量在保持长度和方向不变的条件下可以自由平移，故又称自山向量。

评述 我们讨论的向量是自由向量，在实际问题中，除自由向量外还有其它向量，例如力可以用一个向量表示，但是力有三个要素：大小，方向，作用点。它的起点是确定的，故表示力的向量不能在空间平行移动，这种不能在空间平行移动的向量，称为非自由向量。本书只讨论自由向量。

(2) 向径

空间一点 M 的位置可以用起点固定在原点 O，终点为 M 的向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 确定，向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**向径**。设 M 的直角坐标为(x,y,z)，向量 $\overrightarrow{OM}$ 记成

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} = (x, y, z).$$

评述 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$与$M(x,y,z)$都能反映出空间点$M$的位置，但$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$是起点在原点，终点在$M$的向量，而$M(x,y,z)$是点$M$的直角坐标，二者的意义不同。

（3）向量的模

向量$\boldsymbol{a}$的长度称为$\boldsymbol{a}$的模，记为$|\boldsymbol{a}|$。若$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

（4）零向量

模为零的向量称为零向量，记为$\boldsymbol{O}$。零向量的起点与终点重合，所以没有确定的方向。

评述 我们规定，一切零向量相等。这种特殊的向量在向量的代数运算中，起着类似数0（零）在代数运算中的重要作用。

（5）单位向量

模为1的向量称为单位向量。与任意非零向量$\boldsymbol{a}$方向相同的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

与x轴，y轴，z轴正方向同方向的单位向量称为基本单位向量，分别记为$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，即

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),$$
$$\boldsymbol{j}=(0,1,0),$$
$$\boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

（6）向量的方向余弦

若非零向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则向量$\boldsymbol{a}$与坐标轴$x$，$y$，$z$正向的夹角$\alpha$，$\beta$，$\gamma$称为向量$\boldsymbol{a}$的方向角，方向角的余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，显然有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

评述　(1) 由于向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的模为 1，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦所组成的向量是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量

$$\boldsymbol{a}^\circ = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

(2) 由向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，可以确定 $\boldsymbol{a}$ 的方向角。

$$\alpha = \arccos\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\beta = \arccos\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\gamma = \arccos\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

4　向量的运算

(1) 向量的加减法

设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$　则

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 + b_3).$$

向量的加减法符合平行四边形法则或三角形法则，满足交换律和结合律。

评述　数学的发展是基于科学技术的进步和生产的发展，微积分的产生就是当时科学技术中提出了许多需要微积分解决的问题，由于速度，加速度，力等（这些量都是向量），相加时都是按照平行四边形法则进行的，所以数学中就规定向量相加按平行四边形法则进行。

(2) 向量与数的乘积

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$m$ 为实数，则

$$m\boldsymbol{a}=(ma_1, ma_2, ma_3),$$

$$|m\boldsymbol{a}|=|m||\boldsymbol{a}|.$$

(3) 向量的数量积(又称点乘或内积)

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

向量的数量积满足交换律、结合律、分配律，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积的结果是一个数，所以称为数量积。

评述 向量的加法定义是基于速度、加速度、力等向量合成时满足平行四边形法则；向量的数量积的定义则是基于一物体在常力$\boldsymbol{F}$作用下从点M_1移动到点M_2(以$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{M_1M_2}$表示位移向量)所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$$

这一物理背景抽象后得出的。

(4) 向量的向量积(又称叉乘或外积)

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$；

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的结果是一个向量，它的模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{a,b}),$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向由"$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$，且三向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系"来确定。

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$的几何意义为以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为相邻两边的平行四边形的面积。

向量的向量积满足结合律，分配律和反交换律（不满足交换

律）即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。

评述　（1）向量的向量积的定义也有其实际背景，设刚体以角速度 ω 绕定轴转动时，其上距离转动轴线为 R 的一点 M 的速度 $\boldsymbol{v}$，由于转动时，点 M 描出中心在轴线上且半径为 R 的圆周，所以速度 $\boldsymbol{v}$ 应位于这圆周的切线上。如果在转动轴线上引进一向量 $\boldsymbol{\omega}$ 称为角速度向量，其大小等于转动的角速度 ω，而方向与转动的方向构成右手螺旋系统（图 7.6），这时若以 $\boldsymbol{r}$ 表示点 M 的向径，则 $\boldsymbol{v}$ 必垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所决定的平面，且 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ 组成右手系。$\boldsymbol{v}$ 的大小

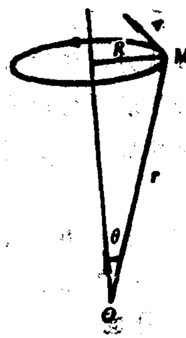


图 7.6

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\theta=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}}),$$

三个向量 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ 的这种关系，不仅在运动学中出现，而且在电磁学等其它领域内也多次出现，基于这种实际需要，我们引进了向量的向量积。

（2）向量的向量积不满足交换律而满足反交换律的性质，应引起我们特别注意，因为我们到目前为止还是首次遇到乘积不满足交换律的现象。

5　向量的基本性质

（1）两向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \text{ 或 } a_1b_1+a_2b_2+a_3+b_3=0.$$

（2）两向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 平行的充要条件是

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（$\lambda$ 为实常数），

或
$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

（3）两非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 间的夹角

可由下式确定。

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

评述 （1）零向量 $\boldsymbol{O}=(0, 0, 0)$ 与任意向量 $\boldsymbol{a}$ 的数量积为零，也与任意向量 $\boldsymbol{a}$ 的向量积为零向量，因此，零向量可认为与任意向量垂直，也可认为与任意向量平行。

（2）若两向量平行，由于我们只讨论自由向量，因此总可把它们平移后，位于同一条直线上，所以两向量平行又称两向量共线。

（3）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，等式右端是数 0，若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，等式右端是零向量，不要把数 0 与零向量 $\boldsymbol{O}=(0, 0, 0)$ 相混淆。

6 平面

（1）平面的一般式方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$。

（2）平面的点法式方程

若平面通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，且平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(A, B, C),$$

平面的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

（3）截距式方程

若平面在三个坐标轴 x, y, z 上的截距为 a, b, c，则平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

评述 （1）任何平面都可用 x, y, z 的三元一次方程表示。反之，任何 x, y, z 的三元一次方程表示一个平面。

（2）三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中一次项的系数组成的向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ 就是平面的法向量。

（3）当三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中有些变量的系数为零时（但不能全为零，否则就不成其为三元一次方程了），就形成空间特殊位置的平面。

例如，$A=0$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(0, B, C)$，它与基本单位向量 $\boldsymbol{i}=(1, 0, 0)$ 垂直，因此方程 $By+Cz+D=0$ 表示平行于 x 轴的平面。再如 $A=B=0$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(0, 0, C)$，它与基本单位向量 $\boldsymbol{k}=(0, 0, 1)$ 平行，所以方程 $Cz+D=0$ 表示平行于坐标面 xOy 的平面。

7　两平面的关系

设两平面的方程分别是

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

其法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1), \quad \boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2).$$

（1）两平面平行的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2};$$

（2）两平面重合的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2};$$

（3）两平面垂直的充要条件为

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0,$$

即

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

（4）两平面相交所成的二面角就是其法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角，记为 φ，则

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

8 点到平面的距离

设点 M_0 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外的一点，则点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$到平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

9 空间直线

（1）直线的一般式方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

其中 x, y, z 的系数不成比例。

（2）标准方程（或称点向式方程）

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

其中 $\boldsymbol{v}=(l, m, n)$为直线的方向向量，$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上的一点。

（3）两点式方程

过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

（4）参数方程

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$为直线上一点，$\boldsymbol{v}=(l, m, n)$ 为直线的方向向量。则直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt,\end{cases}$$

其中 t 称为参数。

评述 （1）空间直线可以看成是两平面的交线，因此直线的一般式方程是两个三元一次方程的联立方程组。